THE UNIVERSITY

OF ILLINOIS

LIBRARY

510.5
BI
Ser.3 v.11

MATHEMATICS
DEPARTMENT

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

University of Illinois Library

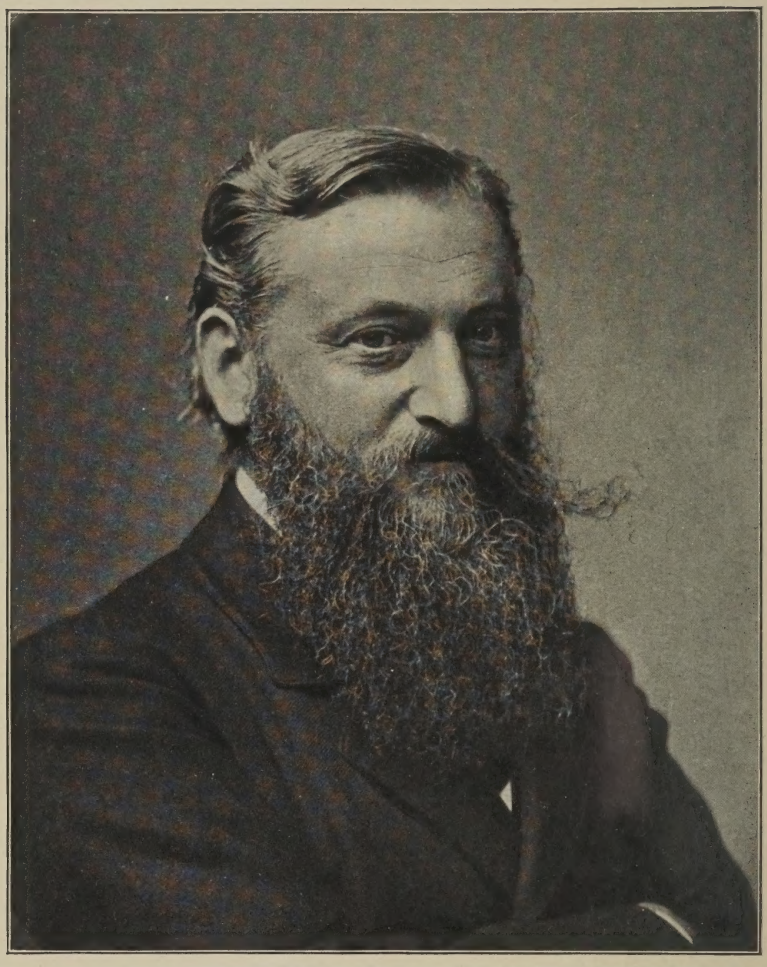
SEP 26 1967

SEP 21 REC'D

MAY 28 1968

L161—O-1096

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS



A. v. Braunmühl

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN
VON
GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

3. FOLGE. ELFTER BAND.

MIT DEM BILDNIS VON A. v. BRAUNMÜHL ALS TITELBILD
SOWIE 2 FAKSIMILES IM TEXT UND 74 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1910—1911.

510.5
BI
Ser. 3 v. 11

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Cajori, 22, 24.
Eneström, 1—3, 5, 12, 15, 17—21, 31.
Favaro, 2.
Heiberg, 13.
Karpinski, 9, 11, 14.
Kaye, 6.
Loria, 4.
Miller, 27, 28.
Schlesinger, 25, 26.
Smith, 16.
Stäckel, 23.
Suter, 7, 8, 10.
Valentin, 30.
Wiedemann, 13.
Wieleitner, 29.

Sach-Register.

Abu Kamil el-Misri, 8.
Abu'l Raihan Muh. el-Biruni, 10.
Aktuelle Fragen, 30, 31.
d'Alembert, 23.
Algebra, 11, 14, 15, 17, 22, 27, 28.
Alkhwarismi, 11.
Anfragen, 12, 15, 17, 19—21.
Arabische Mathematik, 7—11, 13.
Arithmetik, 9.
Besthorn, 7.
Bibliographie, 3, 30, 31, 32.
Biographien, 16, 29.
Braunmühl, 29.
Briefe, 23.
Cantor, 2.
Codex Leidensis 399, 1, 7.
Delisches Problem, 4.
Diofantos, 5.
Ebene gemischtlinige Figuren, 12.
Ernennungen, 33.
Euler, 23.
Fluxionsrechnung, 20, 21.
Funktionentheorie, 25, 26
Galilei, 18.
Geometrie, 4, 7, 10, 12, 13
Gleichungen, 17, 22, 23.
Griechische Mathematik, 4, 5.
Gruppentheorie, 27.
Hamilton, 27.
Heath, 5.
Heiberg, 7.
Hohlspiegel, 13.
Indische Mathematik, 6.
Infinitesimalrechnung, 20, 21, 25, 26.
Integralrechnung, 25, 26.
Jacobi, 25, 26.
Kegelschnitte, 13.
Kronecker, 28.
Leibniz, 21.
Literarische Notizen, 33
Mathematik im allgemeinen, 2, 3.
Mathematiker-Versammlungen, 33.
Mathematische Geschichtsschreibung, 1
Mathemathische Terminologie, 15.
Mathematisch-historische Vorlesungen, 33.
Mourraille, 24.
Näherungsformeln, 19, 24.
Neuerschienene Schriften, 32
Newton, 20, 21.
Newtonsche Näherungsmethode, 24.
Optik, 13.
Parabel, 13.
Parabolische Hohlsp'egel, 13.
Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung, 1.
Preisaufgaben, 33.
„Radix relata", 15.
Rezensionen, 3, 5, 7, 18.
Robert von Chester, 11.
Rolle, 22.
Rolles Theorem, 22.
Schöner, 16.
Sehnenkonstruktionen, 10
Simpsonsche Annäherungsformel, 19.
Stadtbibliothek in Frankfurt a. M., 3.
Todesfälle, 33.
Trigonometrie, 10.
Valentin, 30, 31.
Wissenschaftliche Chronik, 33.
Würfelverdopplung, 4.
Zahlentheorie, 5, 8.
Zahlzeichen, 9.

BINDING 67
216356

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Seite

1. Über Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung. Von G. Enestrom . . . . . 1—10

2. Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von G. Enestrom, A. Favaro 81—90, 158—181, 233—275, 331—353

3. Stadtbibliothek Frankfurt am Main. Katalog der mathematischen Abteilung (1909). Rezension von G. Enestrom . . . . . 184—186

Geschichte des Altertums.

4. Sopra una relazione che passa fra due antiche soluzioni del problema di Delo. Di Gino Loria. Mit 2 Textfiguren . . . 97—99

5. Heath, Diophantus of Alexandria (1910). Rezension von G. Enestrom 356—358

Geschichte des Mittelalters.

6. Some notes on Hindu mathematical methods. By G. R. Kaye. Mit 2 Textfiguren . . . . . 289—299

7. Besthorn et Heiberg, Codex Leidensis 399, 1 (1900—1910). Rezension von H. Suter . . . . . 277—280

8. Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el-Misri. Übersetzt und mit Kommentar versehen von Heinrich Suter . . . . . 100—120

9. Hindu numerals in the Fihrist. Von Louis C. Karpinski . . 121—124

10. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l-Raihan Muh el-Biruni. Übersetzt und mit Kommentar versehen von Heinrich Suter. Mit 60 Textfiguren . . . . . 11—78

11. Robert of Chester's translation of the algebra of Al-Khowarizmi. By L. C. Karpinski. Mit 1 Faksimile im Text . . . . . 125—131

12. Sätze über ebene gemischtlinige Figuren im Mittelalter. [Anfrage 148.] Von G. Enestrom 90

13. Eine arabische Schrift über die Parabel und parabolische Hohlspiegel. Von J. L. Heiberg und E. Wiedemann. Mit 6 Textfiguren . . . . . 193—208

Seite

14. An italian algebra of the fifteenth century. By Louis C. Karpinski. Mit 1 Textfigur . . . . . 209—219

15. Über die Bedeutung des Termes „radix relata“ und verwandter Ausdrücke im 15. Jahrhundert. [Anfrage 152.] Von G. Enestrom 353—354

Geschichte der neueren Zeit.

16. A note on Johannes Schonerus. By David Eugene Smith. Mit 1 Faksimile im Text . . . . . 79—80

17. Über die Geschichte der ersten algebraischen Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. [Anfrage 149.] Von G. Enestrom . . . . . 182—183

18. Le opere di Galileo Galilei, volume XX (1909). Rezension von G. Enestrom . . . . . 91—93

19. Über die älteste Geschichte der sogenannten Simpsonschen Annäherungsformel. [Anfrage 150.] Von G. Enestrom 183

20. Über die Erfindung des Algorithmus der Newtonschen Fluxionsrechnung. [Anfrage 151.] Von G. Enestrom 276

21. Leibniz und die Newtonsche „Analysis per aequationes numero terminorum infinitas“. [Anfrage 153.] Von G. Enestrom . . 354—355

22. On Michel Rolle's book „Methode pour résoudre les egalitez“ and the history of „Rolle's theorem“. By Florian Cajori . . . 300—313

23. Ein Brief Eulers an d'Alembert. Von P. Stäckel. Mit 2 Textfiguren . . . . . 220—226

24. Fourier's improvement of the Newton-Raphson method of approximation anticipated by Mourraille. By Florian Cajori. Mit 1 Textfigur . . . . . 132—137

25. Über Jacobis Auffassung des realen Integrals als einer mehrdeutigen Funktion. Von L. Schlesinger . . . . . 138—152

26. Bemerkung zu dem Aufsatze „Über Jacobis Auffassung des realen Integrals als einer mehrdeutigen Funktion“. Von L. Schlesinger 275—276

27. Note on William R. Hamilton's place in the history of abstract group theory. By G. A. Miller . . . . . 314—315

28. Kronecker and the Galois theory of equations. By G. A. Miller 182

Seite

29. Anton von Braunmühl. Von Heinrich Wieleitner. Mit Bildnis als Titelbild . . . . . 316—330

Aktuelle Fragen.

30. Über den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie. Von G. Valentin . . . . . 153—157

31. Wie soll die Herausgabe der Valentinschen mathematischen Bibliographie gesichert werden? Von G. Enestrom . . . . . 227—232

---

32. Neuerschienene Schriften . . . . . 94—95, 187—190, 281—285, 359—363

Autoren-Register. — Zeitschriften. Allgemeines. — Geschichte des Altertums. — Geschichte des Mittelalters. — Geschichte der neueren Zeit. — Nekrologe. — Aktuelle Fragen.

33. Wissenschaftliche Chronik . . . . . 96, 191—192, 286—288, 364—366

Ernennungen. — Todesfälle. — Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften. — Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften. — Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1910. — Vermischtes.

Namenregister . . . . . 367—378

Das 1. Heft dieses Bandes (S. 1— 96) wurde am 20. Dezember 1910 ausgegeben.
„ 2. „ „ „ (S. 97—192) „ „ 21. April 1911 „
„ 3. „ „ „ (S. 193—288) „ „ 1. August „ „
„ 4. „ „ „ (S. 289—378) „ „ 23. November „ „

Verbesserung.

Band **10** Seite 330 Zeile 11 lies Giuseppe statt Giovanni.

Über Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung.

Von G. Enestrom in Stockholm.

Wie jede andere historische Wissenschaft hat auch die mathematische Geschichtsschreibung teils ein besonderes Material zu sammeln, teils dasselbe nach gewissen Grundsätzen zu ordnen, und wenn die Grundsätze leicht anzuwenden sind, kann die Reihenfolge der Bestandteile des Materials im großen und ganzen als eindeutig bestimmt betrachtet werden. Denken wir uns zum Beispiel, daß das Material aus Sätzen über Thetafunktionen, die im 19. Jahrhundert veröffentlicht worden sind, besteht, und nehmen wir an, daß diese chronologisch nach den Druckjahren der Schriften, in denen sie zuerst veröffentlicht wurden, geordnet werden sollen, so bietet die Arbeit, sobald das ganze Material gesammelt und mit den nötigen Angaben versehen worden ist, kaum irgendwelche Schwierigkeiten dar. Fordert man dagegen, daß die Sätze alphabetisch nach den Namen der ersten Entdecker geordnet werden sollen, wird die Sache schon ein wenig verwickelt, denn bevor man das Ordnen beginnen kann, muß man in gewissen Fällen besondere Untersuchungen anstellen, die vielleicht nicht immer zu einem sicheren Ergebnis führen. Noch verwickelter wird die Arbeit, wenn man z. B. verlangt, daß die Bedeutung der Sätze für die Funktionentheorie bei ihrem Ordnen in Betracht gezogen werden soll, so daß die wichtigsten Sätze eine besondere Abteilung bilden. In diesem und ähnlichen Fällen müssen also gewisse Fragen erledigt werden, bevor die eigentliche historische Darstellung in Angriff genommen werden kann, und diese Fragen nenne ich Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung.

Man sieht sofort ein, daß diese Probleme nicht nur von der Art des Materials, sondern auch von dem Zweck der Darstellung abhängen, und je wichtiger das Ergebnis ist, das man durch die historische Darstellung erzielen will, um so schwieriger werden die Probleme, die zu lösen sind. Bezweckt man beispielsweise, zu ermitteln, was die mathe-

matischen Theorien für die Kultur bedeutet haben[1]), sind die Schwierigkeiten meines Erachtens so groß, daß es noch nicht der Mühe lohnt, auch nur einen Versuch zu machen, sie zu besiegen.[2]) Um nur auf eine einzige Schwierigkeit aufmerksam zu machen, bemerke ich, daß man vorläufig das folgende Problem lösen muß: „Vorausgesetzt, daß ein wesentlicher Teil der Geistesarbeit, die bisher für die Entwickelung der mathematischen Theorien verwendet worden ist, einem anderen Gebiete der Kultur zu Nutzen gekommen wäre, wie würde unsere Kultur dann aussehen?", und dieses Problem ist meiner Ansicht nach bis auf weiteres unlösbar. Aber dann ist es ja nicht einmal möglich, zu entscheiden, ob im großen und ganzen die Mathematik für die Kultur nützlich oder schädlich gewesen ist.

Ein anderes wichtiges Problem der mathematischen Geschichtsschreibung, das tatsächlich gestellt worden ist, bezieht sich auf die Entwickelung und den Verfall der griechischen Mathematik. Das Problem lautet[3]): „Welches waren die Ursachen des Verfalles der griechischen Mathematik, und welche Maßregeln sollten also ergriffen werden, um für die Zukunft einen ähnlichen Verfall der mathematischen Forschungsarbeit zu vermeiden?" Auch dieses Problem möchte ich als bis auf weiteres unlösbar bezeichnen, und sogar wenn man annimmt, daß der erste Teil des Problems erledigt werden kann, stelle ich in Abrede, daß man daraus schließen darf, wie die zweite Frage beantwortet werden soll.

Allerdings können geistreiche Verfasser, wenn sie auf dem mathematisch-historischen Gebiete sachkundig sind, interessante Bemerkungen über Probleme der soeben genannten Art bringen, aber im allgemeinen ist es dringend zu empfehlen, sich auf die Behandlung einfacherer Probleme zu beschränken. Schon bei der Bearbeitung einer Entdeckungsgeschichte der Mathematik treten sehr oft Fragen auf, die Probleme genannt werden könnten. Teils sind die Quellenwerke, aus denen der Rohstoff entnommen werden soll, oft unvollständig oder unzuverlässig, teils haben die früheren Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete nicht selten das von ihnen benutzte Material unkritisch oder nachlässig bearbeitet. Im letzten Falle kann die Frage durch Zurück-

1) Vgl. Conrad H. Müller, *Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **18**, 1904, S. 63.

2) Vgl. G. Enestrom, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete;* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 11.

3) Siehe P. Tannery, *Le vrai problème de l'histoire des mathématiques anciennes;* Bullet. d. sc. mathém. 9_2, 1885, S. 104—120. Wieder abgedruckt: *La géométrie grecque,* Paris 1887, S. 1—17.

gehen auf die Quellen erledigt werden, aber viel schwieriger wird natürlich die Sache, wenn die Quellen selbst unvollständig oder unzuverlässig sind oder auf mehr als eine Weise gedeutet werden können.

Besonders häufig kommen die Probleme in der Entdeckungsgeschichte der Mathematik des Altertums vor, und ihre Erledigung erfordert im allgemeinen besondere philologische oder literaturhistorische Kenntnisse. Oft genügen auch nicht solche Kenntnisse, um die Probleme endgültig zu lösen, z. B. in betreff der Fragen: Hat Pythagoras den pythagoreischen Lehrsatz gekannt? Wann lebte Heron? Was meinte Euklides mit der 4. Definition des 1. Buches der Elemente: „Die Gerade ist die Linie, die auf gleiche Weise (ἐξ ἴσου) in betreff ihrer Punkte gelegen ist.“ Die letzte Frage ist besonders interessant, weil es sich herausgestellt hat, daß die wahre Bedeutung des Ausdruckes ἐξ ἴσου schon zu Zeiten des Proklos verloren gegangen war. Auch in der Entdeckungsgeschichte der Mathematik des Mittelalters spielen die Probleme zuweilen eine wichtige Rolle; ich brauche nur beispielsweise auf die folgenden Fragen hinzuweisen: Wann lebte Jordanus Nemorarius? Und welches ist die von ihm verfaßte Algorismusschrift? Hinsichtlich der ersten Frage ist es bis auf weiteres zweifelhaft, ob sie jemals befriedigend erledigt werden wird, und für die definitive Beantwortung der zweiten Frage ist noch nicht genügendes Material gesammelt worden.

Dagegen werden Probleme, die von der Natur der Quellen abhängen, um so seltener, je mehr man der Neuzeit näher rückt, weil die Quellenwerke immer vollständiger und zuverlässiger werden. Allerdings kann auch die Entdeckungsgeschichte der modernen Mathematik Probleme dieser Art bieten, die nicht ganz leicht gelöst werden dürften, und hier unten bringe ich einen Beleg dafür.

Vor einiger Zeit bemerkte ich in einem kleinen Artikel über die Geschichte der krummlinigen Koordinaten[1]), daß es am richtigsten sein dürfte, diese Geschichte mit Gauss beginnen zu lassen. Die Bemerkung veranlaßte einen geschätzten Mitarbeiter der Bibliotheca Mathematica mir brieflich mitzuteilen, er halte für sehr wahrscheinlich, daß schon Euler krummlinige Koordinaten benutzte und er verwies mich auf eine Stelle der Eulerschen *Adversaria*. An der fraglichen Stelle[2]) bezeichnet Euler die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Fläche durch t, u, v und bemerkt, daß jede dieser drei Größen als Funktion von zwei anderen voneinander unabhängigen Veränderlichen r und s aus-

1) G. Enestrom, *Über das angebliche Vorkommen krummliniger Koordinaten bei Leibniz;* Biblioth. Mathem. $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 47.

2) L. Euler, *Opera postuma* **1**, Petropoli 1862, S. 494—496.

gedrückt werden kann. Ferner betrachtet Euler zwei Punkte r und s der gegebenen Fläche, und nimmt an, daß für den Punkt r nur die Größe r, für den Punkt s nur die Größe s variabel sei. Dann hat in Wirklichkeit der Ort des Punktes r die Gleichung $s =$ Konst., der Ort des Punktes s die Gleichung $r =$ Konst.; diese Örter sind also tatsächlich zwei Parameterlinien der gegebenen Fläche und die Veränderlichen r, s folglich krummlinige Koordinaten. Anderseits deutet Euler selbst nicht mit einem einzigen Worte an, daß er diese Veränderlichen als räumliche Gebilde betrachtet. Wenn man Euler auf Grund der fraglichen Stelle die Benutzung krummliniger Koordinaten zuschreiben will, muß man also seinen Worten einen Sinn geben, der nicht ausdrücklich darin enthalten ist, und die Frage ist: „Kann man annehmen, daß Euler nicht selbst die wahre geometrische Bedeutung der Veränderlichen r und s erkannt hat?“ Ein moderner Mathematiker muß geneigt sein, diese Frage sofort mit Nein zu beantworten, für den Historiker enthält sie ein Problem, das freilich nicht wie die Fragen der älteren Entdeckungsgeschichte der Mathematik durch philologische oder literarhistorische Kenntnisse mehr oder weniger vollständig erledigt werden kann.

Die Probleme, die nicht von den Quellen selbst veranlaßt worden sind, können oft sehr leicht gelöst werden. Als Beispiele nenne ich die Fragen: War Leonardo Pisano Kaufmann? Hat Leibniz krummlinige Koordinaten benutzt? Ein wenig verwickelter, aber jedenfalls nicht besonders schwierig ist z. B. die Frage: Hat J. Pell die Pellsche Gleichung behandelt? Sehr schwierig ist zuweilen die Erledigung, wenn es sich um verdächtige Angaben früherer Historiker handelt, für welche gar keine Belege gebracht worden sind. Beispielsweise kommen in einer 1857 erschienenen Abhandlung von M. Marty: *Wie man vor 1000 Jahren lehrte und lernte* gewisse unbelegte Angaben über Rechenunterricht im Mittelalter vor, und es dürfte nicht ganz leicht gewesen sein nachzuweisen, daß diese Angaben keinen geschichtlichen Wert besitzen, wenn man nicht vom Verfasser selbst erfahren hätte, daß er in der Abhandlung seine eigenen Vermutungen als historische Tatsachen dargestellt hat.

Ich komme jetzt zu den Problemen der Entwickelungsgeschichte der Mathematik. Hier handelt es sich nicht um die Richtigkeit oder Unrichtigkeit einzelner Angaben, sondern um die Auffindung eines Zusammenhanges zwischen Tatsachen, wenn dieser Zusammenhang nicht unmittelbar aus den Quellen hervorgeht. Die am meisten vorkommenden Probleme sind die zwei folgenden:

1. Man weiß, daß ein gewisser Mathematiker einen wichtigen Satz, der früher nicht nachweislich bekannt war, aufgestellt hat; es wird gefragt, auf welchem Wege er zu diesem Satz gekommen ist.

2. Es handelt sich um die Entdeckung einer gewissen mathematischen Theorie; es wird verlangt zu untersuchen, welche früheren mathematischen Errungenschaften als Vorarbeiten für diese Theorie betrachtet werden können.

Hinsichtlich des ersten Problemes kann man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der fragliche Satz wahr oder falsch ist. Ist der Satz falsch, kann das Aufstellen desselben ganz einfach als ein Versehen oder aus der individuellen Begabung des betreffenden Mathematikers erklärt werden, aber unter Umständen ist es von Interesse zu untersuchen, ob nicht das Versehen teilweise mathematisch-historisch erklärt werden kann. Da ich indessen in einem früheren Artikel den Gegenstand ziemlich ausführlich behandelt habe, erlaube ich mir auf diesen Artikel zu verweisen.[1])

Ist der Satz dagegen wahr, muß man sich in erster Linie genaue Kenntnis der Geschichte des betreffenden Zweiges der Mathematik verschaffen und überlegen, ob der Mathematiker wirklich imstande gewesen ist, den Satz selbst zu entdecken. Wenn dies nicht der Fall ist, muß man natürlich versuchen seine Quelle ausfindig zu machen. Selbstverständlich können in jedem Falle nur solche Wege in Betracht kommen, die der Entdecker des Satzes nachweislich oder wenigstens wahrscheinlich benutzen konnte. Aber je verwickelter das Verfahren und je willkürlicher der Ausgangspunkt desselben ist, um so weniger befriedigend wird die Lösung des gestellten mathematisch-historischen Problems und um so mehr ist es zu empfehlen, entweder von der ganzen Sache Abstand zu nehmen oder eine bessere Lösung zu suchen. Als Beispiel einer Lösung, die aus dem soeben angeführten Grunde verfehlt sein muß, nenne ich den Versuch G. Wertheims, die bei Heron vorkommende Annäherungsformel $\sqrt[3]{m} = a + \frac{(a+1)\,d_1}{(a+1)\,d_1 + a\,d_2}$ herzuleiten, wo $a = E\,(\sqrt[3]{m})$, $d_1 = m - a^3$, $d_2 = (a+1)^3 - m$. Wertheim nimmt an, daß Heron die Methode des doppelten falschen Ansatzes benutzt hat, und daß er $-(a+1)\,d_1$ und $a\,d_2$ als die Fehler, die den Annahmen a und $a+1$ entsprechen, betrachtet hat. Allein tatsächlich gibt es keinen Beleg dafür, daß die griechischen Mathematiker überhaupt die Methode des doppelten falschen Ansatzes kannten, und die Voraussetzung inbetreff der zwei Fehler ist nicht nur durchaus willkürlich, sondern überdies höchst unwahrscheinlich.[2])

1) G. Enestrom, *Zur Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung;* Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 3—4.

2) G Wertheim, *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln;* Zeitschr. für Mathem. **44**, 1899, Hist. Abt. S. 1—3. Vgl. Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 412. — Um zu ersehen, zu welchen eigentümlichen Ergebnissen die letzte Voraussetzung Wertheims führt, braucht man nur $m = 3$, also $a = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 5$ zu setzen. Dann sind in Wirklichkeit die Fehler, die den Annahmen $\sqrt[3]{m} = a$ und $\sqrt[3]{m} = a + 1$

Die Ermittlung des Weges, auf dem ein Mathematiker zu einem wichtigen Satz gekommen ist, hat ohne Zweifel für die Geschichte der Mathematik großes Interesse, aber viel wichtiger ist meines Erachtens die zweite Art von Problemen, die ich oben erwähnt habe. In Wahrheit ist es ja der Hauptzweck der Entwickelungsgeschichte der Mathematik, über den Zusammenhang der mathematischen Ideen Auskunft zu geben, und in der zweiten Art von Problemen handelt es sich gerade darum, die aktenmäßigen Angaben über diesen Zusammenhang zu ergänzen. Allein für diesen Zweck ist es fast immer nötig, gewisse Hypothesen über den allgemeinen Gang der Entwickelung einer gegebenen Idee aufzustellen. Nun habe ich mich schon in einem früheren Artikel[1]) über die Hypothesen der mathematischen Geschichtsschreibung geäußert und dabei hervorgehoben, daß eine Hypothese erst dann berechtigt wird, wenn sie auf eingehendem Studium des Quellenmaterials gegründet ist. Aber für die Hypothesen, die hier in Betracht kommen, ist es ebenso wichtig, daß man in jedem einzelnen Falle genau untersucht, ob und auf welche Weise frühere Errungenschaften der Mathematik als Vorbereitung zu einer neuen Theorie zu bezeichnen sind. Leider übersieht man nicht selten die Wichtigkeit dieses Verfahrens und stellt gleich anfangs Hypothesen auf, wodurch die soeben erwähnte Untersuchung verhindert wird, oder man unterläßt dieselbe aus anderen Gründen. Einen besonders lehrreichen Fall dieser Art bieten die Darstellungen der Vorgeschichte der Koordinatengeometrie.

Im Jahre 1877 veröffentlichte S. Günther eine Abhandlung über diesen Gegenstand[2]), worin er drei Stufen des Koordinatbegriffes unterschied, nämlich: 1. man nimmt zwei schon vorhandene oder zwei beliebige gleichartige Linien als Achsen an, und die Punkte der Operationsfläche werden auf diese bezogen; 2. man konstruiert zu bestimmten Abszissen die Ordinaten und verbindet die so erhaltenen Punkte durch einen Zug; 3. man stellt eine Kurve durch eine wirkliche Gleichung zwischen zwei als Koordinaten aufgefaßten veränderlichen Größen dar. Er untersuchte weiter, welche Vertreter die drei Stufen gehabt haben, und gelangte dabei

---

entsprechen, $-0{,}442$ und $+0{,}558$, während sie nach der Voraussetzung Wertheims -4 und 5 werden, also mehr als achtmal größer als die wirklichen! Freilich sucht Wertheim den Konsequenzen zu entgehen, indem er als Fehler nicht die wirklichen Fehler, sondern die Größen $-d_1$ und d_2 betrachtet, aber man sieht leicht, daß die Sache dadurch nur wenig verbessert wird, wenn a eine große Zahl ist.

1) G. Enestrom, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 1—8.

2) S. Günther, *Die Anfänge und Entwickelungsstadien des Coordinatenprincipes;* Abhandl. d. naturf. Ges. zu Nürnberg **6**, 1877, S. 3—50. Italienische Übersetzung: *Le origini ed i gradi di sviluppo del principio delle coordinate;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **10**, 1877, S. 363—406.

zu dem Ergebnis, daß die Griechen noch nicht zur zweiten Stufe vorgedrungen waren. Dagegen sei diese Stufe im Mittelalter von Oresme erreicht worden, während die dritte Stufe erst bei Fermat und Descartes nachgewiesen werden könne.

Gegen diese Darstellung der Entwickelung des Koordinatenbegriffs hat H. G. Zeuthen hervorgehoben[1]), daß sie von einer willkürlichen Voraussetzung ausgeht, und diese Bemerkung ist meines Erachtens durchaus begründet. Günther hat nämlich nicht bewiesen, daß die zwei ersten Stufen für das Hervortreten des vollständigen Koordinatenbegriffs notwendig sind, und er hat nicht einmal nachgewiesen, daß sich der Begriff auf diese Weise entwickelt hat Es ist nicht ungewöhnlich, daß ein mathematischer Begriff zuerst bei der Behandlung einer speziellen Frage, für welche die Benutzung des Begriffs eine fast selbstverständliche Sache ist, hervortritt, und daß man erst viel später die Bedeutung des Begriffs für eine ganze Theorie entdeckt. Meines Erachtens liegt gerade in betreff des Koordinatenbegriffs ein solcher Fall vor.

Aber auch mit der Zeuthenschen Darstellung der Geschichte des Koordinatenbegriffs kann ich nicht einverstanden sein. Zeuthen hat selbst hervorgehoben, daß er die Anwendung der Koordinaten bei den Griechen als eine Tatsache betrachtet[2]), und ich will nicht behaupten, daß er dabei durchaus unrecht hat. Dagegen hat er meiner Ansicht nach mit Unrecht unterlassen, genau zu untersuchen, bis zu welchem Grade die Koordinatenanwendung der Griechen als eine wirkliche Koordinatengeometrie betrachtet werden darf. Allerdings weist er nach, daß bei Apollonius die Gerade und die Kegelschnitte durch Größen definiert werden, die tatsächlich Koordinaten sind, so daß man aus den Definitionen sofort ihre Gleichungen in rechtlinigen Koordinaten herleiten kann. Allein die Grundeigenschaften der Gerade und der Parabel sind eben der Art, daß ihre Definitionen sofort durch zwei Koordinaten ausgedrückt werden können; für die Ellipse und die Hyperbel findet ein ähnliches Verhältnis statt, aber dennoch ist es kaum richtig, daß die Definitionen dieser Kurven bei Apollonius unzweideutig als Gleichungen zwischen zwei Koordinaten aufgefaßt werden müssen. Im Gegenteil könnte man sagen, daß in den Definitionen drei Koordinaten vorkommen, nämlich eine Ordinate und zwei Abszissen, und daß Apollonius die Bedeutung eines im voraus bestimmten Anfangspunktes des Koordinatensystems weder explizit noch implizit andeutet, so daß man eigentlich nicht von einer Koordinatengeometrie, sondern nur von

1) H. G. Zeuthen, *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument;* Bullet. de l'acad. danoise des sciences 1888, S. 139—140. 2) Zeuthen, a. a. O. S. 128.

einer Ordinatengeometrie sprechen kann.[1]) Noch weniger kann man behaupten, daß Apollonius einen Fingerzeig gegeben hat, wie andere Kurven durch eine Relation zwischen zwei Koordinaten definiert werden können.

Außer den oben erwähnten Arten von mathematisch-historischen Problemen gibt es natürlich noch andere, aber die meisten dieser Probleme sind sehr nahe mit jenen verwandt und die übrigen sind meines Erachtens entweder unlösbar oder von untergeordneter Bedeutung. Ein von gewissen Verfassern mit besonderer Vorliebe behandeltes Problem ist das folgende: Zwei Mathematiker haben etwa gleichzeitig dieselbe oder fast dieselbe Entdeckung gemacht; es wird verlangt, zu ermitteln, inwieweit sie voneinander unabhängig gewesen sind. Allerdings sind diese Probleme nicht selten von Interesse, aber wenn ihre Behandlung mit einer vollständigen Darstellung der Prioritätsstreitigkeiten, wozu die gleichzeitige Entdeckung Anlaß gegeben hat, verbunden wird, kann die Behandlung leicht so ausführlich werden, daß sie nicht durch die Bedeutung der Frage motiviert ist.

Bisher habe ich von Problemen gesprochen, deren Lösung für eine vollständige und zuverlässige Darstellung der Geschichte der Mathematik notwendig oder wenigstens wünschenswert ist. Indessen gibt es auch Fragen ähnlicher Art, deren Erledigung recht eigentlich den Zweck hat, die historische Darstellung wertvoller und interessanter zu machen. Hierzu gehört zum Beispiel die Würdigung der verschiedenen Errungenschaften auf einem bestimmten Gebiete oder der wissenschaftlichen Wirksamkeit eines bestimmten Mathematikers, und da es sich nicht um nackte Tatsachen handelt, könnte man auch diese Fragen mathematisch-historische Probleme nennen. Ihre Behandlung stimmt auch insofern mit der der eigentlichen Probleme überein, als in beiden Fällen wirkliche Sachkunde und kritische Schulung nötig sind. Wie leicht man sonst zu unzuverlässigen Ergebnissen kommt, zeigt u. a., was M. Cantor in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von der „bahnbrechenden" Arbeit des Jordanus Nemorarius auf einem gewissen Gebiete zu erzählen hat.[2])

Diese bahnbrechende Arbeit des Jordanus besteht nach Cantor darin, daß jener in seiner *Arithmetica* fortwährend allgemeine Buchstaben statt besonderer Zahlen benutzt. Allein erstens kann man diese Benutzung nicht

1) Das hat auch Zeuthen selbst später anerkannt (siehe *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 195: „die Ordinaten sind bei ihnen [den griechischen Mathematikern] mehr im allgemeinen von der Lage des Punktes auf der Abszissenachse, von dem sie ausgehen, als gerade von der Abszisse dieses Punktes abhängig gemacht").

2) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2^2, Leipzig 1900, S. 61—62.

„bahnbrechend" nennen, da Jordanus nicht verstanden hat, die Endergebnisse der von ihm ausgeführten Rechnungen vermittels der ursprünglich gewählten Buchstaben darzustellen; aus diesem Grunde erwies sich die fragliche Bezeichnungsweise in den meisten Fällen als unzweckmäßig, so daß sie nur ausnahmsweise zur Anwendung kommen konnte. Zweitens wird die Bezeichnungsweise, von der Cantor spricht, mit der Euklidischen identisch, wenn man die bei diesem in Zusammenhang mit den Buchstaben vorkommenden Linien streicht, und diese einfache Modifikation kann kaum bahnbrechend genannt werden.[1]) Drittens besitzen wir nicht die Originalmanuskripte der Schriften des Jordanus, so daß wir nicht definitiv entscheiden können, ob dieser wirklich Buchstaben ohne Linien benutzt hat oder ob vielleicht das Weglassen der Linien von späteren Abschreibern herrührt. Die Art und Weise, wie Cantor in diesem Falle die Bedeutung des Jordanus würdigt, kann also von drei verschiedenen Gesichtspunkten aus als unzuverlässig bezeichnet werden.

Ein anderes Beispiel derselben Art befindet sich in einer kürzlich erschienenen Abhandlung über Ludolf van Ceulen.[2]) Es wird darin bemerkt, daß die Schrift van Ceulens *Van den Circkel* (Delft 1596) eine merkwürdige Methode der abgekürzten Division enthalte, und daß diese die erste gedruckte der fraglichen Art sei.[3]) Wenn man indessen den Bericht über das Verfahren van Ceulens näher untersucht, so findet man, daß es aus zwei Teilen besteht, von denen allerdings der eine methodisch genannt werden kann, nämlich die vorläufige Berechnung einer Tabelle der Zahlen $n \cdot D$, wo D der Divisor und $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ ist, und Anwendung dieser Tabelle bei der Division. Allein dieses Vorgehen war in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts allgemein bekannt[4]), so daß es gar nicht als eine Entdeckung van Ceulens bezeichnet werden kann, und übrigens ist das Vorgehen keine abgekürzte Division im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Anderseits ist es richtig, daß der zweite Teil des Verfahrens eine Art von abgekürzter Division ist, aber es ist bis auf weiteres höchst unwahrscheinlich, daß die Abkürzungen nach irgendeiner Methode ausgeführt worden sind. Van Ceulen will die Zahl 3 104 408 582 051 595 051 714 durch die Zahl 4 876 393 597 557 198 936 703 dividieren, und die Abkürzung besteht darin, daß er allmählich bei den Subtraktionen die letzten Ziffern der oben erwähnten Divisorentabelle wegläßt, so daß der letzte Subtrahendus nur 5 Ziffern enthält, während die entsprechende Zahl der Tabelle 23stellig

1) Vgl. G. Enestrom, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 85—86.

2) H. Bosmans, *Un émule de Viète: Ludolphe van Ceulen;* Annales de la société scientifique de Bruxelles **34**: 2, 1910, S. 88—139.

3) H. Bosmans, a. a. O. S. 109—111.

4) Vgl. G. Enestrom, Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 180.

ist. Überdies kürzt van Ceulen an ein paar Stellen auch den Dividendus auf ähnliche Weise ab. Er hat also erkannt — was jeder geübte Rechner sofort einsehen muß —, daß die letzten Ziffern eines großen Divisors im Laufe einer langen Annäherungsdivision bedeutungslos werden, aber ein methodisches Verfahren sucht man bei ihm vergebens. Im Gegenteil rundet er nicht einmal die Zahl 859 ab, wenn diese durch Streichung der letzten Ziffer 9 der Zahl 8599 erhalten worden ist. Es ist darum meines Erachtens eine unrichtige Würdigung der Verdienste van Ceulens um die abgekürzte Division, wenn man behauptet, daß er die erste Methode dieser Art veröffentlicht hat.

Die vorhergehenden Zeilen beanspruchen gar nicht, den Gegenstand erschöpfend behandelt zu haben. Ihr Zweck ist in erster Linie, die Schwierigkeiten hervorzuheben, die mit einer exakten Bearbeitung der Geschichte der Mathematik verbunden sind. Leider ist die Ansicht noch sehr verbreitet, daß man eine wissenschaftliche Abhandlung auf diesem Gebiete anfertigen kann, wenn man erst die Quellenwerke aufsucht, daraus die nötigen Exzerpte macht und endlich dieses Material etwa wie einen Artikel einer politischen Zeitung bearbeitet. Allerdings kann die Veröffentlichung des Materials, das in einer solchen Abhandlung enthalten ist, sehr nützlich sein, aber die Urteile, die gefällt werden, werden leicht minderwertig, weil der Verfasser nicht erkennt, daß er es mit mathematisch-historischen Problemen zu tun hat, die nach den oben von mir angegebenen Gründen behandelt werden sollen.

Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise[1] von Abū'l-Raiḥān Muḥ. el-Bīrūnī.

Übersetzt und mit Kommentar versehen
von Heinrich Suter in Zürich.

Einleitung.[2]

Du weißt wohl, Gott stärke dich, was für eine Ursache mich bewog, nach einer Anzahl von Beweisen zu forschen zur Bewahrheitung einer Behauptung der alten Griechen betreffend die Teilung der gebrochenen Linie in jedem (beliebigen) Kreisbogen mittels der auf sie von seiner Mitte aus gezogenen Senkrechten, und was ich für eine Leidenschaft für diese Sache empfunden habe, und was für eine Neigung, immer wieder den Blick darauf zu richten, so daß du mir wegen der Beschäftigung mit diesen Kapiteln der Geometrie Vorwürfe gemacht hast (?), ohne Kenntnis zu haben von dem wahren Wesen dieser Gebiete, das eben in jeder Sache in dem Hinausgehen über das Genügende besteht. Wenn du doch, Gott stärke dich, genau achten wolltest auf die Ziele der Geometrie, die in der Bestimmung der gegenseitigen Verhältnisse ihrer Größen mit Rücksicht auf die Quantität bestehen, und daß sie es ist, durch die man zur Kenntnis der Größe aller meßbaren und wägbaren Dinge gelangt, die zwischen dem Mittelpunkt der Welt und der äußersten Grenze der sinnlichen Wahrnehmung liegen. Und wenn du doch wüßtest, daß mit ihnen (den geometrischen Größen) gemeint sind die (bloßen) Formen, losgelöst von der Materie, und daß wir die Richtigkeit der Beweise mit Hilfe der bildlichen Darstellung so klar machen können, daß es (das Verstehen) den Geometern nicht so schwer fällt, wie den meisten Logikern und Philosophen.[3] Was immer für einen Weg in seiner Kunst er (der Geometer) beschreiten möge, so wird er durch das Mittel der Übung von

1) Der vollständige arabische Titel lautet: *Kitāb istikhrādj el-autār fī'l-dā'ira bi-khawāṣṣ el-khaṭṭ el-munḥanī el-wāḳi' fīhā* = das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise mittels der Eigenschaften der in ihn fallenden gebrochenen Linie.

2) Dieses Wort steht nicht im Text.

3) D. h. das Verständnis der geometrischen Sätze ist leichter als das der Sätze der reinen Logik und Philosophie, weil es durch bildliche Darstellung (Figuren) unterstützt wird.

den physischen Lehren emporgeführt zu den göttlichen, die schwer zugänglich sind wegen der schweren Verständlichkeit ihres Sinnes (ihrer Bedeutung) und der schweren Erreichbarkeit ihrer Quellen (ihres Ursprungs) und der Subtilität ihrer Wege (Methoden) und der Majestät ihrer Sache, und wegen des Umstandes, daß es nicht jedem möglich ist, sich eine Vorstellung von ihnen zu machen, und besonders dem nicht, der von der Kunst der Beweisführung sich abwendet. Du hättest recht, Gott stärke dich, mich zu tadeln, für das, was ich erwähnt habe, wenn ich die Aufsuchung dieser Wege (Methoden) insgesamt unterlassen hätte, und die Zeit für etwas verschwendet hätte, von dem das leichtere schon genügen würde; oder wenn die Arbeit nicht bis zu dem Punkte gelangt wäre, der die Grundlage für die Astronomie bildet, nämlich bis zur Berechnung der Sehnen im Kreise und der Verhältnisse ihrer Größen zu der angenommenen des Durchmessers. Es sind mir nun aber von den Beweisen zu jener Behauptung eine große Menge in die Hände gekommen von den vortrefflichsten Männern der Wissenschaft, und ich habe mich bemüht ihre Richtigkeit zu prüfen, und die Beweise zu denselben zu ordnen. So häufte sich bei mir ein Material an, in das ich oft meine Blicke werfen konnte, getrieben von der Liebe zur Wissenschaft und der Verehrung für jene vortrefflichen Gelehrten . . . . ., so daß ich schließlich ihr Genosse wurde in der Aufstellung von Beweisen zu jenen Behauptungen, wie man im Verlaufe der Abhandlung sehen wird. Diese ist durchaus aus den Elementen der Geometrie hervorgegangen, und es gründet sich auf sie die Beantwortung vieler Fragen, die an mich gestellt worden sind. Alles dieses habe ich für dich gesammelt und habe jeden Beweis seinem Urheber zugeteilt, wie es meine Gewohnheit ist, damit du sie ins Auge fassest und erkennest, wie sie alle auf den einen Punkt zurückgehen, und was sich daraus schließlich ergibt für die Kenntnis der Sehnen. Und so ist denn meine Entschuldigung dir gegenüber in Ordnung . . . . . oft ist der Tadler selbst tadelnswert. Nur bei Gott, dem Allmächtigen und Allweisen ist die Hilfe!

Die erste Behauptung.

Wenn in einen beliebigen Kreisbogen eine gerade Linie ungleich (d. i. in zwei ungleiche Teile) gebrochen gelegt wird, und von der Mitte des Bogens eine Senkrechte auf sie gefällt wird, so wird sie (die gebrochene Linie) dadurch halbiert. Zum Beispiel: ABG sei die gebrochene Linie im Bogen ABG, und von der Mitte D dieses Bogens sei die Senkrechte DE auf sie gefällt, so sage ich, daß die gebrochene Linie ABG halbiert sei, d. h. daß $AE = EB + BG$. Gott weiß am besten das Richtige!

a) Beweis dazu von Archimedes im Buche der Kreise.

Er sagt: Man mache [Fig. 1] Bogen $DH = DB$ und $EZ = EB$ und ziehe DZ und DA, so ist, weil DE gemeinschaftlich, und die beiden Winkel bei E rechte sind, $DB = DZ$, also auch $DH = DZ$. Und weil Bogen $DB = DH$ ist, ist auch der übrigbleibende (von der Hälfte) Bogen $AH = BG$; nun sind die zwei Winkel HDA und DAB zusammen = dem Winkel DBA oder dem Winkel DZB; aber Winkel DZB = Winkel ZAD + Winkel ZDA, also ist Winkel ZDA = Winkel HDA, ferner $DH = DZ$ und AD gemeinschaftlich, also ist $AZ = AH$[1]); aber $AH = BG$ und $EZ = EB$, also ist $AZ + EZ = EB + BG$, q. e. d.

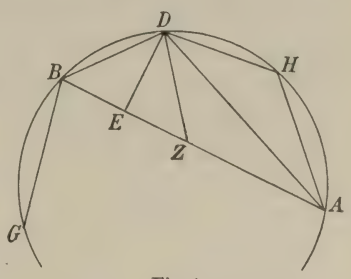


Fig. 1.

b) Beweis von Abū Saʿīd Muḥ. b. ʿAlī el-Ḍarīr el-Djordjānī.[2])

Es gibt auch einen Beweis von Abū Saʿīd el-Ḍarīr, der ähnlich demjenigen des Archimedes ist. Er sagt: Man mache (s. vorige Figur) Sehne $AH = BG$, ferner $AZ = AH$ und ziehe AD, DZ, DH. Dann ist, weil Bogen $AD = DG$, und Bogen $AH = BG$ angenommen wurde, auch Bogen $DH = DB$, also ist Winkel HAD = Winkel DAZ, und $AH = AZ$, und AD gemeinschaftlich, also ist $HD = DZ$; aber $HD = DB$, also auch $DZ = DB$; aber DE senkrecht auf BZ, also $BE = EZ$, mithin $AZ + EZ = EB + BG$, q. e. d.

c) Zweiter Beweis von Archimedes im Buche der Kreise.

Er sagt: Wir verlängern [Fig. 2] AB über B hinaus und machen $EZ = AE$, und ziehen DA, DG, DB, DZ. Dann ist, weil die beiden Sehnen AD und DG gleich sind, und auch $AD = DZ$, auch $DZ = DG$, und weil die beiden Winkel DAB und DGB gleich sind, da sie auf demselben Bogen stehen, und ebenso die beiden Winkel DAE und DZE

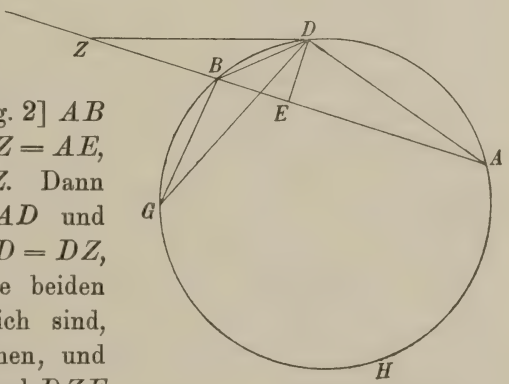


Fig. 2.

1) Man beachte, daß hier u. a. a. O. die Kongruenz der Dreiecke wohl der Kürze halber nicht ausgesprochen ist, sondern sofort auf die Gleichheit der übrigen Stücke geschlossen wird.

2) Vgl. H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber, etc.* in Abhandlungen z. Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900, p. 27, Nr. 48.

gleich sind, ist auch Winkel DZB = Winkel DGB. Und weil Bogen $DA = DG$, und Bogen AHG gemeinschaftlich, so ist Bogen $DAHG$ = Bogen $DGHA$; aber Winkel DBG steht auf dem Bogen $DAHG$, und die beiden Winkel DAB und ADB auf dem Bogen $DGHA$ nämlich Winkel DAB auf dem Bogen BD, und Winkel ADB auf dem Bogen BGA, also ist Winkel DBG = Winkel DAB + Winkel ADB; aber Winkel DBZ ist als Außenwinkel des Dreiecks DBA = Winkel DAB + Winkel ADB, die ihm gegenüber liegen, also ist Winkel DBG = Winkel DBZ; soeben wurde aber bewiesen, daß Winkel DZB = Winkel DGB, also ist auch Winkel GDB = Winkel ZDB, und $DZ = DG$ und DB gemeinschaftlich, also ist BG[1]) = BZ, also BG[1]) + $BE = ZE$, d. h. = AE, q. e. d.

d) Beweis von ABŪ'L-ḤASAN ADARKHŪDĀ B. USHTĀDH (sic) HASHBAS (od. HASHTAS?).[2])

Von ihm hat man hierüber einen dem vorangegangenen nahe verwandten Beweis. Er sagt: Wir verlängern AB (s. vorige Figur mit der Linie ZG) und machen $EZ = AE$, und ziehen DA, DB, DZ, DG, ZG; dann ist, weil $AE = EZ$ und ED gemeinschaftlich und die Winkel bei E rechte, $AD = DZ = DG$, und die Winkel DAB, DZB und BGD sind untereinander gleich, und das Dreieck DZG ist gleichschenklig, also Winkel DGZ = Winkel DZG; wenn wir nun von diesen die beiden gleichen Winkel DGB und DZB wegnehmen, so bleibt Winkel BGZ = Winkel BZG, also ist auch $BG = BZ$, nun ist $BZ + BE = AE$, also auch $BG + BE = AE$, q. e. d.

e) Dritter Beweis von ARCHIMEDES im Buche der Kreise.

Derselbe wurde auch gefunden in Fragen (Problemen) von Griechen, von denen es nicht sicher ist, ob sie von APOLLONIUS seien, und die von YŪḤANNĀ B. YŪSUF[3]) übersetzt worden sind. — Er sagt: Wir verlängern AB (s. Fig. 2) und machen $EZ = AE$ und ziehen DG, DB, DZ; weil nun DG eine Sehne im Kreise ist, so ist das Bogenstück DBG kleiner als der Halbkreis, denn es ist nicht möglich, daß es größer sei, weil der Bogen AD gleich dem Bogen DG, und es nicht möglich ist, daß es in einem Kreise zwei gleiche Bogen gebe, von denen jeder größer als der Halbkreis ist, ohne daß sie ein gemeinsames Stück hätten; also ist der Winkel DBG, welcher ihr (der Sehne DG) gegenüberliegt, ein stumpfer; und weil AD eine Sehne im Kreise ist, so ist das Bogenstück DGA

1) Der Text hat DB. 2) Siehe Kommentar.

3) Vgl. H. SUTER, l. c. p. 60, Nr. 131, und den Kommentar.

größer als der Halbkreis, also der Winkel DBA, welcher ihr (der Sehne AD) gegenüberliegt, ein spitzer, also ist der Winkel DBZ ein stumpfer. Ferner sind die Winkel DZB und DGB gleich, ebenso die beiden Linien DG und DZ, also ist ihr Verhältnis zu der Linie DB dasselbe, mithin haben die beiden Dreiecke DBZ und DBG je einen Winkel gleich ($G = Z$), und die Seiten, welche zwei andere Winkel einschließen, sind proportional, und die beiden Winkel DBG und DBZ sind jeder größer als ein rechter, also sind die übrigen Winkel auch gleich, und die beiden Dreiecke sind ähnlich, also sind sie auch kongruent[1]), nun ist $BZ = BG$, also $BG + BE = AE$, q. e. d.

f) Zweiter Beweis von Abū Sa'īd el-Darīr el-Djordjānī.

Er sagt: Wir verlängern [Fig. 3] AD und machen $DH = AD$ und beschreiben um D mit dem Radius DH einen Kreis, so ist klar, daß er durch die Punkte A und G geht, und es ist AH sein Durchmesser; wir verlängern noch AB, bis es den Kreis in Z trifft, und ziehen ZG und DG. Dann ist Winkel ADG = Winkel ABG, weil sie auf demselben Bogen stehen, und Winkel ADG ist das Doppelte des Winkels AZG, weil sie auf demselben Bogen stehen, der eine aber (den Scheitel) im Mittelpunkt, der andere auf dem Umfange hat, also ist Winkel ABG auch das Doppelte des Winkels AZG; aber Winkel ABG ist gleich Winkel AZG + Winkel ZGB, also ist Winkel ZGB = Winkel BZG, mithin auch $BZ = BG$; damit steht also fest, daß, wenn irgendeine Gerade aus A gezogen wird, die den Kreis $ADB(G)$ schneidet und der Schnittpunkt mit G verbunden wird, dann diese Verbindungslinie gleich ist dem Stück dieser Geraden, das zwischen die beiden Kreise fällt; wird nun das gemeinsame Stück BE zu beiden gleichen Strecken addiert, so hat man: $EZ = BG + BE$; weil aber der Punkt D der Mittelpunkt des Kreises AGZ und AZ eine Sehne desselben, und DE eine Senkrechte auf sie ist, so ist $AE = EZ$, aber eben wurde bewiesen, daß $EZ = BG + BE$, also ist $AE = BG + BE$, q. e. d.

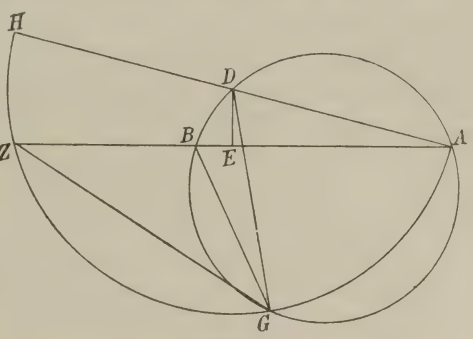


Fig. 3.

1) Im Text steht natürlich „gleich", wie auch stets bei Euklides. Der Verfasser dieses Beweises muß hier zuerst die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke DBZ und DBG nachweisen (nach Euklides VI, 7), weil kein Kongruenzsatz besteht für zwei Seiten und den der kleineren gegenüberliegenden Winkel.

g) Beweis von ABŪ SA'ĪD AHMED B. MUḤ. B. 'ABDELDJALĪL EL-SIDJZĪ.[1])

Er sagt: Wir verlängern [Fig. 4] AB und machen $BZ = BG$ und ziehen DZ, ZG, DG. Weil nun $BG = BZ$, ist auch Winkel BGZ = Winkel BZG, aber Winkel ABG ist gleich der Summe dieser beiden, also ist er das Doppelte von einem derselben, also ist auch Winkel ADG, der gleich Winkel ABG ist, das Doppelte des Winkels BZG, also geht der Kreis, der um den Mittelpunkt D mit dem Radius AD beschrieben wird, durch die Punkte G und Z, weil die beiden Winkel ADG und AZG auf demselben Bogen dieses Kreises stehen, und der Winkel ADG seinen Scheitel im Zentrum und der Winkel AZG auf dem Umfange hat; mithin ist $AD = DZ$, also Winkel DAE = Winkel DZE; aber DE ist senkrecht auf AZ, also $AE = EZ$; es ist nun $BZ + BE = BG + BE$ aber $EZ = AE$, also auch $AE = BG + BE$, q. e. d.

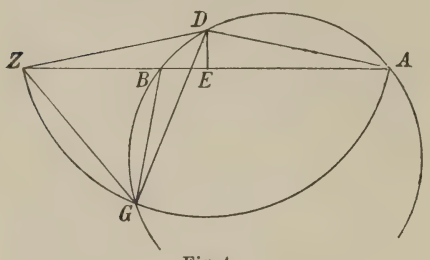


Fig. 4.

h) Zweiter Beweis von AHMED B. 'ABDELDJALĪL EL-SIDJZĪ.

Er sagt: Man beschreibe [Fig. 5] über AD den Halbkreis DEA und verlängere AD, und mache $DH = AD$, und beschreibe über dem Durchmesser AH den Halbkreis HGA, man verlängere AB bis Z und ziehe ZH und ZG.[2]) Weil nun die beiden Kreise AGH und AED sich im Punkte A berühren, hat man die Prop. $AD : DH = AE : EZ$, weil die beiden Winkel AED und AZH rechte sind, und daher die beiden Dreiecke AED und AZH ähnlich sind; also ist $AE = EZ$; und weil die beiden Winkel ADG und ABG gleich sind, und der Scheitel des Winkels ADG im Mittelpunkt des Kreises AHG, und der Scheitel des Winkels AZG auf seinem Umfange liegt, ist Winkel ABG das Doppelte des Winkels AZG, und auch gleich Winkel BZG + Winkel BGZ, also ist Winkel BZG = Winkel BGZ, also $BZ = BG$; es ist aber $BZ + BE = AE$, wie soeben bewiesen wurde, also ist $BG + BE = AE$, q. e. d.

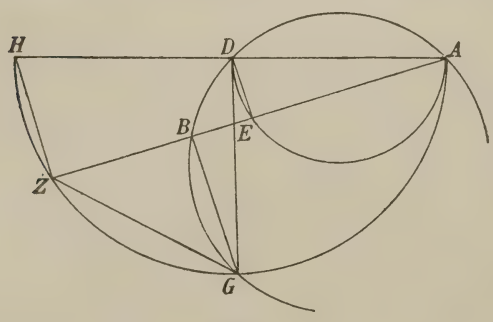


Fig. 5.

1) Das Manuskript hat „el-Shkrī". Vgl. H. SUTER, l. c. p. 80, Nr. 185.

2) Dieses fehlt im Manuskript.

i) Dritter Beweis von Abū Saʿīd Ahmed b. Muḥ. b. ʿAbdeldjalīl el-Sidjzī.[1])

Er sagt: Man ziehe [Fig. 6] DZ parallel AB und ZH parallel DE, dann ist Bogen DB = Bogen AZ, also bleibt (nach Subtraktion von $AD = DG$) Bogen DZ = Bogen BG, also ist auch Sehne DZ oder EH = Sehne BG; es ist aber auch $AH = BE$, also $AH + EH = BE + BG$, q. e. d.[2])

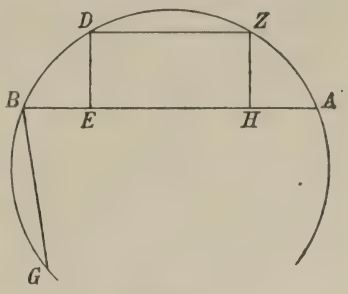


Fig. 6.

k) Beweis von dem Ḳāḍī Abū ʿAlī el-Ḥosein b. el-Ḥārith el-Djanūbī (?)[3])

Er sagt: Es werde der Bogen AZ gleich dem Bogen BD gemacht (vgl. Fig. 6 mit den Linien BD und AZ), und die Senkrechte ZH gezogen, ferner AZ, DB, DZ. Weil nun die Winkel ZHA und DEB rechte sind, und die Winkel ZAB und DBA ebenfalls gleich sind, da sie auf den gleichen Bogen ZDB und DZA stehen, und Sehne $AZ = DB$ ist, so sind die Dreiecke AZH und BDE kongruent, und also auch ihre entsprechenden Seiten gleich, also $ZH = DE$, diese sind aber auch parallel, also ist auch ZD gleich und parallel EH; ferner ist auch $AH = BE$, ebenso $DZ = BG$, weil sie Sehnen der gleichen Bogen DZ und BG sind, also ist auch $EH = BG$, mithin $AH + EH = EB + BG$, q. e. d.

l) Zweiter Beweis von dem Ḳāḍī Abū ʿAlī el-Djanūbī.

Er sagt: Es werde [Fig. 7] $EZ = EB$ gemacht und DB und DZ gezogen. Man vervollständige den Kreis um ABG und verlängere DZ, bis es den Kreis in H trifft, und ziehe AH, HG. Weil nun $EZ = EB$ und DE gemeinschaftlich, und die beiden Winkel bei E rechte sind, so ist $DZ = DB$, und die beiden Winkel DZE und DBE sind gleich, ebenso

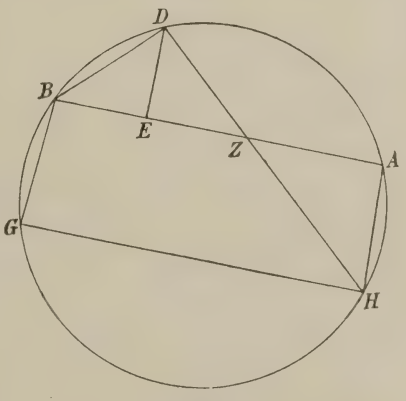


Fig. 7.

1) Hier hat das Manuskript „el-Shkzī".

2) Dies ist unbedingt der kürzeste Beweis dieses Satzes.

3) Da die diakritischen Punkte fehlen, ist dieses Wort ganz unsicher. Vgl. H. Suter, l. c. p. 197, Nr. 491; hier habe ich die Lesart Habūbī gewählt, ferner habe ich ihn nach Ḥaǧǧi Chalfa und nach dem Oxforder Ms. Hasan statt Hosein genannt; dieser Autor ist also älter als el-Bīrūnī oder ein Zeitgenosse desselben.

ist Winkel DZE = Winkel AZH als Scheitelwinkel, und Winkel AHZ = Winkel DBE, weil sie auf demselben Bogen stehen, also ist Winkel AHZ = Winkel AZH, also $AH = AZ$. Ebenso ist Winkel DHG = Winkel AHD, weil sie auf gleichen Bogen stehen, also ist Winkel DHG = Winkel AZH, dies sind aber Wechselwinkel, also ist AB parallel GH[1]), also Bogen AH = Bogen BG, also auch Sehne $AH = BG$; es wurde aber bewiesen, daß $AH = AZ$ ist, mithin ist auch $AZ = BG$, also $AE = BE + BG$, q. e. d.

m) Beweis von ABŪ NAṢR MANṢŪR B. ʿALĪ B. ʿIRĀḳ.[2])

Er sagt: Man schneide [Fig. 8] von AE das Stück $EZ = EB$ ab und ziehe DZ, ebenso die Sehnen AD und DG, die gleich sind, da sie zu gleichen Bogen gehören; ferner ist Winkel A = Winkel G, weil sie auf dem gleichen Bogen BD stehen, dann ist es nicht möglich, daß die Linie AZ größer oder kleiner als BG sei. Wenn es möglich wäre, so sei sie zuerst größer als BG; wir machen $AH = BG$, dann ist jede der Linien AH, AD gleich jeder der Linien BG, GD, und die beiden Winkel A und G sind gleich, also müssen auch die beiden Seiten BD und DH gleich sein; nun ist aber $EZ = EB$ und die Höhe DE gemeinschaftlich, also $DZ = DB$, also wären nun die zwei Seiten DZ und DH des Dreiecks DZH gleich, also auch die Winkel bei H und Z gleich, und die beiden Seiten BD und DH sind auch gleich, also die Winkel bei B und H im Dreieck BDH gleich, mithin wäre Winkel DZH = Winkel DBZ, d. h. der Außenwinkel des Dreiecks BZD wäre gleich einem der Innenwinkel, die ihm gegenüberliegen, dies ist ein Widerspruch (also kann AZ nicht größer als BG sein). Auf dieselbe Weise wird bewiesen, daß es nicht möglich ist, daß sie kleiner (als BG) sei, also muß $AZ = BG$ sein; nun ist $EZ = EB$, also $AE = EB + BG$, q. e d.

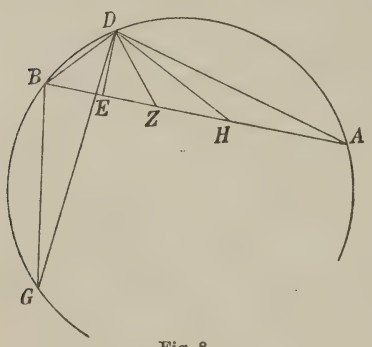


Fig. 8.

n) Beweis von ABŪ ʿABDALLĀH MUḤ B. AḤMED EL-SHANNĪ.[3])

Er sagt: Man vervollständige [Fig. 9] den Kreis um ABG und verlängere die Senkrechte DE bis zum Punkte Z des Umfanges, und ziehe

1) Das Manuskript hat HD. 2) Vgl. H. SUTER, l. c. S. 81, Nr. 186.
3) Vgl. H. SUTER, l. c. S. 97, Nr. 216.

AG, ebenso den Durchmesser $DHTK$ des Kreises, so ist derselbe senkrecht auf AG; man ziehe ferner KM parallel EZ und noch KZ, so ist Winkel TAH = Winkel HDE wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke AHT und DEH, also ist Sehne BG = Sehne ZK; und weil Winkel DZK ein rechter ist, da er in den Halbkreis fällt, ebenso die Winkel M und E rechte sind, so ist die Fläche MZ ein Rechteck, und deshalb $KZ = EM$, also auch $EM = BG$. Und weil die Senkrechte $KM = ZE$, ist auch $AM = BE$; soeben wurde bewiesen, daß $EM = BG$, also ist $AM + EM = BE + BG$, q. e. d.

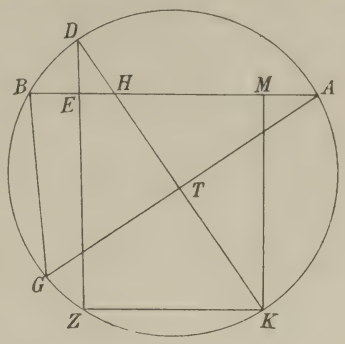


Fig. 9.

o) Zweiter Beweis von Abū ʿAbdallāh el-Shannī.

Er sagt: Wir machen [Fig. 10] Bogen AZ = Bogen BG und ziehen GZ, und verlängern GB über B hinaus, und machen $GH = GZ$ und ziehen DH, DG, AZ, DZ, DB. Weil nun $GH = GZ$ ist, und DG gemeinschaftlich, und Winkel $HGD = DGZ$, weil sie auf den gleichen Bogen BD und DZ stehen, so ist $DH = DZ$, aber $DZ = DB$, also auch $DH = DB$; wir ziehen nun die Senkrechte DT auf BH, so ist bekannt, daß sie HB im Punkte T halbiert. Addiert man nun zu der Linie HB, die im Punkte T halbiert ist, die Linie BG, so ist $HG \cdot BG + BT^2 = GT^2$;[1]) addieren wir beiderseits das gemeinsame TD^2, so haben wir: $HG \cdot BG + BT^2 + TD^2$, d. h. $HG \cdot BG + BD^2 = GT^2 + TD^2 = GD^2$; aber $HG = AB$ und $AD = GD$, also ist: $AB \cdot BG + BD^2 = AD^2$, oder $AB \cdot BG + BE^2 + DE^2 = AD^2 = DE^2 + AE^2$; wird das gemeinsame DE^2 beiderseits subtrahiert, so bleibt $AB \cdot BG + BE^2 = AE^2$, also wird die Summe der Linien AB und BG im Punkte E halbiert,[2]) q. e. d.

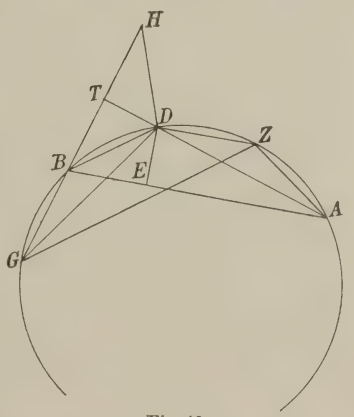


Fig. 10.

---

1) Nach Euklides II, 6.

2) Nach Euklides II, 5 (Umkehrung), die Umkehrung ist freilich bei Euklides nicht bewiesen.

p) Zweiter Beweis von ADARKHŪDĀ[1]) B. USTĀD DJASHNAS (sic).

Er sagt: Wir verlängern [Fig. 11] GB über B hinaus und ziehen von D aus die Senkrechte DZ auf die Verlängerung und ziehen AD, DG, so sind in den beiden Dreiecken DZG und DAE die Winkel DEA und DZG gleich als rechte, ferner Winkel ZGD = Winkel EAD, weil sie auf demselben Bogen stehen, also sind die Dreiecke ähnlich, aber $AD = DG$, also ist auch $DZ = DE$ und $GZ = AE$, es ist ferner klar, daß $DZ^2 + BZ^2 = DE^2 + BE^2$, aber $DZ^2 = DE^2$, also ist auch $BZ^2 = BE^2$, also $BZ = BE$; aber $GZ = AE$, also ist $GB + BE = AE$, q. e. d. Und Gott weiß es besser und ist weiser!

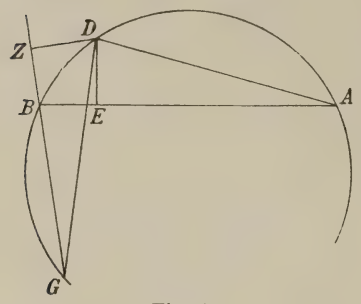


Fig. 11.

q) Dritter Beweis von ABŪ ʿABDALLĀH EL-SHANNĪ.

Er sagt: Wir ziehen [Fig. 12] AG und beweisen zuerst, daß $DE \cdot EB$ gleich dem Unterschied der beiden Dreiecke ADG und ABG ist. Zu diesem Zwecke verlängern wir die Senkrechte DE bis zu ihrem Schnittpunkte Z mit AG und fällen die Senkrechte DH auf AG, und BT senkrecht auf DH und bezeichnen den Durchschnitt von AB und DH mit K[2]). Weil nun die beiden Dreiecke AEZ und AKH ähnlich sind, so sind auch die Winkel Z und K gleich, und Winkel DAZ = Winkel DBK, weil sie über gleichen Bogen, nämlich den Hälften des Bogens ABG stehen, also ist Dreieck DAZ ähnlich Dreieck DBK, also besteht die Prop. $AZ : ZD = BK : DK$, aber $AZ : ZD = AK : DK$[3]) $= AH : DE$, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke; aus dem gleichen Grunde ist $BK : DK = BE : DT$, also ist auch $AH : DE = BE : DT$, also $AH \cdot DT = DE \cdot BE$; aber $AH \cdot DT$ ist der Unterschied der Produkte $DH \cdot AH$ und $TH \cdot AH$, und dies ist gleich dem Unterschied der Dreiecke ADG und ABG, also ist das Produkt $DE \cdot BE$ gleich dem Unterschied der Dreiecke ADG und ABG[4]). Wir machen nun $ES = EB$ und ziehen DS; dann subtrahieren wir das gemeinsame Dreieck AMG

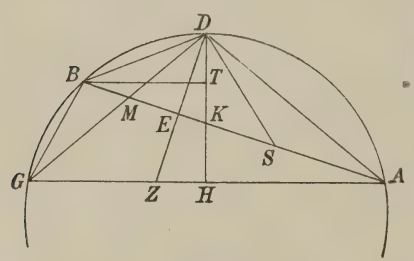


Fig. 12.

1) Das Manuskript hat ADKHŪDĀ.
2) Im Text steht T, in der Figur aber K.
3) Dies ist nicht richtig.
4) Der Beweis ist, wie man sieht, verdorben; s. Kommentar.

(von beiden Dreiecken), so bleibt: Unterschied der beiden Dreiecke ADM und BMG gleich dem Produkt $DE \cdot BE$ gleich Dreieck DBS; deshalb ist der Unterschied der beiden Dreiecke ADM und DBG = Dreieck DMS, mithin ist Dreieck ADS = Dreieck DBG, und die beiden Seiten AD, DS sind gleich den Seiten GD, DB, also ist auch Seite AS = Seite BG[1]); nun haben wir $ES = EB$ gemacht, also ist auch $AE = BE + BG$, q. e. d.

Es ist auch erlaubt, die Sache umzukehren und die Gleichheit der Differenz der beiden Dreiecke ADG und ABG mit dem Produkte $DE \cdot BE$ aus der Halbierung der gebrochenen Linie durch die Senkrechte (DE) nachzuweisen. Zu diesem Zwecke setzen wir $SE = BE$, ziehen DS, DB, so sind diese beiden gleich, und weil $AE = BE + BG$, ist $AS = BG$, also sind jetzt die beiden Seiten AD, AS des Dreiecks ADS gleich den beiden Seiten DG, BG des Dreiecks DBG, und Winkel A = Winkel G, also sind die beiden Dreiecke ADS und DBG kongruent, also ist der Unterschied der beiden Dreiecke ADS und BMG = Dreieck DMB, mithin der Unterschied der Dreiecke ADM und BMG = Dreieck BDS; aber Dreieck $BDS = DE \cdot BE$; ferner ist der Unterschied der Dreiecke ADM und BMG gleich dem Unterschied der Dreiecke ADG und ABG, also ist der Unterschied der Dreiecke ADG und ABG gleich dem Produkt $DE \cdot BE$, q. e. d.

r) Vierter Beweis von Abū ʿAbdallāh el-Shannī.

Er sagt: Man mache [Fig. 13] $EH = EB$ und ziehe DH, DB, DA, DG, GA, so ist klar, daß $DH = DB$ ist, also sind die Dreiecke ADG und DBH gleichschenklig; in diesen beiden Dreiecken sind die Winkel B und G gleich, da sie auf demselben Bogen stehen, also sind die Dreiecke auch ähnlich, mithin ist Winkel ADG = Winkel BDH; wird von beiden der gemeinsame Winkel HDM abgezogen, so bleibt Winkel ADH = Winkel GDB; aber die Seiten AD, DH des Dreiecks ADH sind gleich den Seiten DG, DB des Dreiecks GDB, also ist auch $AH = BG$, mithin $AH + HE$ d. h. $AE = BE + BG$[2]), q. e. d.

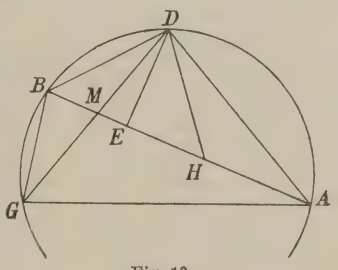


Fig. 13.

s) Zweiter Beweis von Abū Naṣr Manṣūr b. ʿAlī b. ʿIrāḳ.

Er sagt: Wir machen [Fig. 14] $AZ = BG$ und ziehen AD, BD, DZ, dann sind die Seiten AD, AZ[3]) gleich den Seiten DG, BG und Winkel

1) Hier dürfte hinzugefügt sein: weil Winkel BGD = Winkel DAS.
2) Der Text hat AG.
3) Der Text hat DZ.

DAB = Winkel DGB, weil sie auf demselben Bogen stehen, also ist auch $DZ = BD$, also Dreieck DBZ gleichschenklig, mithin teilt die Senkrechte DE die Basis BZ in zwei Hälften im Punkte E, also $BE = EZ$, daher ist, da auch $AZ = BG$, $AZ + EZ$ d. h. $AE = BE + BG$, q. e. d.

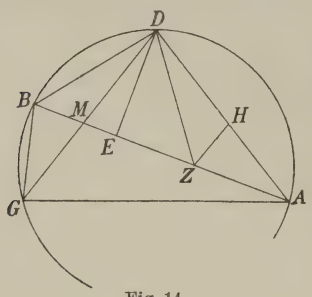


Fig. 14.

Wenn wir aber den anderen Gedankengang einschlagen[1]), wenn wir nämlich beweisen wollen, daß das Produkt $DE \cdot BE$, d. h. das Dreieck DBZ gleich sei dem Unterschied der Dreiecke ADG und ABG, so machen wir $AH = MG$ und ziehen HZ[2]), dann sind die beiden Dreiecke AHZ und GMB kongruent, also auch DHZ und DMB kongruent, mithin die Dreiecke $BMG + BMD + DMZ$ = Dreieck ADM; fügen wir beiderseits Dreieck AMG hinzu, so haben wir: Dreiecke $ADM + AMG$ = Dreiecke $AMG + BMG + BMD + DMZ$, also der Unterschied der beiden Dreiecke ADG und ABG = Dreiecke $BMD + DMZ$ = Dreieck $BDZ = DE \cdot BE$, q. e. d.

t) Beweis von ABŪ ʿALĪ EL-ḤASAN B. EL-ḤOSEIN EL-BAṢRĪ.[3])

Er sagt: Man mache [Fig. 15] Bogen DZ = Bogen DB und ziehe DB, DZ, AZ, AD; ferner mache man $EH = EB$ und ziehe DH; weil nun Bogen $DZ = DB$ ist, ist Winkel ZAD = Winkel DAB, und weil $DB = DH$, ist Winkel DBA = Winkel DHE, und weil Figur $BDZA$ ein Kreisviereck ist, ist Winkel AZD + Winkel ABD = zwei Rechten; soeben wurde aber gesagt, daß Winkel ABD = Winkel DHE, also ist auch Winkel AZD + Winkel DHE = zwei Rechten, aber auch Winkel DHE + Winkel DHA = zwei Rechten, also ist Winkel AZD = Winkel DHA; ferner wurde gezeigt, daß Winkel ZAD = Winkel DAH ist, und AD ist gemeinschaftlich, also sind die beiden Dreiecke AZD und AHD kongruent, und ihre entsprechenden Seiten also gleich, also $AZ = AH$, aber $AZ = BG$,[4]) weil ihre Bogen

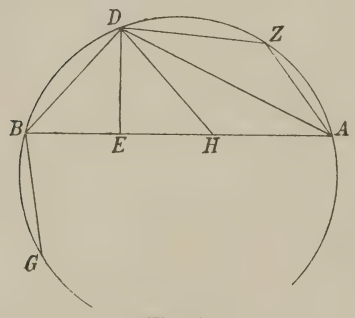


Fig. 15.

1) Wörtlich „wollen"; er kommt hier jedenfalls auf den dritten Beweis EL-SHANNĪS zu sprechen, den er etwas kürzer und auch richtig geben will; vgl. Kommentar zu q.

2) Der Text hat BZ.

3) Vgl. H. SUTER, l. c. S. 91, Nr. 204; es ist dies der bekannte IBN EL-HAITAM.

4) Im Manuskript steht AB.

gleich sind, also ist auch $AH = BG$, HE ist aber $= BE$, mithin ist $AE = BE + BG$[1]), q. e. d.

u) Beweis von mir zu diesem (Satze).

Ich sage: Man vervollständige [Fig. 16] den Kreis und ziehe DB, DG, DA, mache $EZ = EB$, ziehe DZ und verlängere es bis zu seinem Durchschnitt H mit dem Kreis. Nun ist $AD = DG$, da sie die Sehnen gleicher Bogen sind, und $DB = DZ$ wegen der Kongruenz der Dreiecke BDE und DEZ, und Winkel BGD = Winkel BAD, weil sie auf demselben Bogen stehen, und Winkel BDG = Winkel ZDA, denn Winkel DZB = Winkel ZDA + Winkel ZAD, also auch Winkel DBZ = Winkel ZDA[2]) + Winkel ZAD; nun steht Winkel DBZ auf der Hälfte (AD) der Summe der beiden Bogen (d. h. des Bogens ABG), und Winkel ZAD auf dem Bogen DB von der anderen Hälfte (DG), also bleibt für Winkel ZDA der Bogen, der DB zur Hälfte ergänzt, d. h. der Bogen BG, aber Winkel ZDA steht auf dem Bogen AH, also ist Bogen AH = Bogen BG, also auch Winkel BDG = Winkel ZDA, mithin sind die Dreiecke BDG und ADZ ähnlich und gleich[3]), also $AZ = BG$, aber $EZ = EB$, also ist $AZ + EZ = EB + BG$, q. e. d.

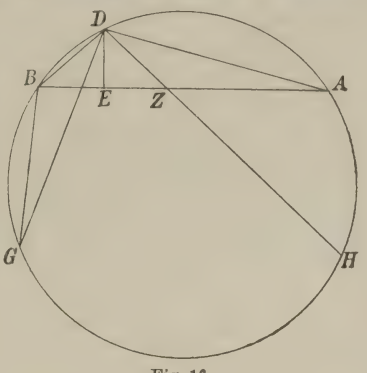


Fig. 16.

v) Zweiter Beweis von mir.

Ich sage: Man vervollständige [Fig. 17] den Kreis und verlängere die Senkrechte DE bis zu ihrem Durchschnitt Z mit dem Kreise, ziehe den Durchmesser DHT und TKL parallel zu DEZ, so ist, weil DZ parallel TL und beide von den Enden des Durchmessers ausgehen, Bogen DGZ = Bogen TAL; wir ziehen LD, dann ist Winkel DLT ein rechter, weil er im Halbkreis liegt, und die Winkel LKE und DEK sind auch rechte, also ist Fläche LE ein Rechteck, also $LD = KE$; man ziehe vom Mittelpunkt H die Linie HMS parallel zu DEZ, so schneidet sie die Sehnen AB und LD

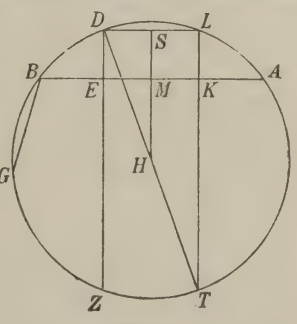


Fig. 17.

1) BG fehlt im Manuskript. 2) Im Manuskript steht DZA.

3) Bīrūnī ist der einzige der hier auftretenden Autoren, der für „kongruent" „ähnlich und gleich" sagt.

unter rechten Winkeln und halbiert sie daher auch, also ist $LS = SD$, und $KM = ME$, mithin ist auch $AK = EB$, und $LD = KE = BG$ (weil Bogen LD = Bogen BG), also ist $AK + KE = EB + BG$, q. e. d.[1])

w) Dritter Beweis von mir aus meinem Buche „Über die nützlichen Fragen und die richtigen Antworten".[2])

Ich sage: Man verlängere [Fig. 18] AB über B hinaus und mache $BK = BG$, und ziehe GK, DK, DA; man ziehe ferner BT senkrecht auf GK, so wird GK halbiert, weil die Schenkel BG und BK gleich sind, und die Winkel des Dreiecks TGB werden gleich den entsprechenden Winkeln des Dreiecks TBK. Weil nun Winkel ABT, der Außenwinkel des Dreiecks TBK, = Winkel BTK + Winkel BKT ist, und ebenso Winkel DBG, der Außenwinkel des Dreiecks BTG, = Winkel BGT + Winkel BTG ist, und Winkel BGT = Winkel BKT ist, und die Winkel BTG und BTK rechte sind, so ist Winkel ABT = Winkel DBG; ferner ist Winkel ABT + Winkel TBK = Winkel DBG + Winkel GBT, nun ist aber Winkel ABT + Winkel TBK = zwei Rechte, also ist auch Winkel DBG + Winkel GBT = zwei Rechte, mithin ist die Linie DBT eine Gerade, und sie steht senkrecht auf KG und teilt sie in zwei gleiche Teile, also ist auch $DG = DK$, es ist aber auch $DA = DG$, also ist $DA = DK$, die Senkrechte DE halbiert also die Gerade AK, folglich ist $AE = EB + BK$, aber BK wurde $= BG$ gemacht, also ist $AE = EB + BG$, q. e. d.[3])

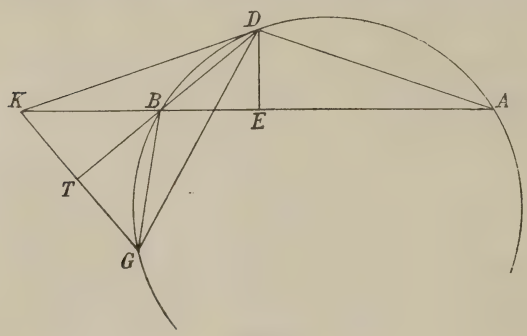


Fig. 18.

1) Hier folgt noch: Beendigt ist der zweite Beweis von mir.

2) Der Haupttitel dieses Buches ist eigentlich „Über die Gründe der Tafeln des KHWARIZMĪ", was vielleicht durch wiederholtes Abschreiben weggefallen ist. Vgl. meine *Nachträge und Berichtigungen* zu dem oben zitierten Buche, in Abhandlungen z. Gesch. d. math. Wissensch. **14**, 1902, S. 171, wo statt „Fehler" zu setzen ist „Gründe" (oder Begründungen).

3) In diesem Beweise kommt ein Fehler vor, s. Kommentar.

x) Vierter Beweis von mir, den ich in den „Gründen der Tafeln des Ḥabash“ angewandt habe.[1])

Ich sage: Man mache [Fig. 19] $EH = EB$ und ziehe DH, DB, so sind die Dreiecke DEB und DEH, die bei E rechtwinklig sind, kongruent, also $DB = DH$. Dann ziehe man AD, DG[2]) und verlängere GB bis Z.[3]) Dann wird, weil Winkel DBG auf dem Bogen DAG steht, seine Ergänzung zu zwei Rechten, d. h. Winkel DBZ, durch den Bogen DBG gemessen, der gleich Bogen AD ist und auf dem der Winkel DBA steht, also ist Winkel DBA = Winkel DBZ = Winkel DHE, also ist auch Winkel DBG = Winkel DHA; ferner stehen die Winkel DAB und DGB auf demselben Bogen (sind also gleich), also ist auch Winkel ADH = Winkel BDG, und $DH = DB$, also Dreieck ADH kongruent Dreieck DBG, mithin $AH = BG$; wir haben aber $EH = EB$ gemacht, also ist $AH + EH = EB + BG$, d. h. der Punkt E halbiert wirklich die gebrochene Linie ABG, q. e. d.

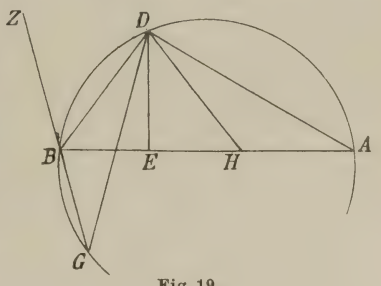


Fig. 19.

Aus diesem ergibt sich auch, daß, wenn über derselben Kreissehne als Basis zwei Dreiecke gezeichnet sind, von denen das eine gleichschenklig, das andere nicht gleichschenklig ist, der Umfang des ersten größer ist als der des zweiten; denn wenn wir AG ziehen, so ist sie die gemeinsame Basis der Dreiecke ADG, des gleichschenkligen, und ABG, des ungleichschenkligen, und es ist nun AD[4]) $> AE$, ebenso DG[5]) $(= AD) > BE + BG$, wird noch beiderseits das gemeinsame AG addiert, so ist: $AD + DG + AG > AE + BE + BG + AG$, also sind die Seiten des Dreiecks ADG zusammen größer als die Seiten des Dreiecks ABG, q. e. d.

Das ist, was mir bekannt geworden ist von den Wegen (oder Methoden) der Gelehrten für den Beweis jener Behauptung; die Griechen haben aber noch eine andere Behauptung aufgestellt, zu der ebenfalls die Gelehrten dieser Kunst[6]) Beweise gaben. Unter diesen gibt es solche, welche das

---

1) Vgl. meine oben zitierten *Nachträge*, S. 171; der vollständige Titel dieses Werkes lautet: Vervollständigung der Tafeln des Ḥabash durch Gründe und Reinigung ihrer Sätze von Irrtümern.

2) Die Linie DG fehlt im Manuskript.

3) Unbestimmt.

4) Das Manuskript hat AB.

5) Das Manuskript hat hier: DA und BG; vielleicht wollte Bīrūnī schon die beiden ersten Ungleichheiten addieren und sagen: also $AD + DG > AE + EB + BG$.

6) El-Bīrūnī nennt die Geometrie eine Kunst (*ṣanā'a*) statt eine Wissenschaft (*'ilm*).

Vorangehen des (eben bewiesenen) Satzes über die Eigenschaft der gebrochenen Linie erfordern, und sie müssen deshalb nach diesem kommen; es gibt aber auch solche, welche jenen (ersten) Satz entbehren können. Da nun eine Umstellung stattgefunden hat (d. h. da diese Beweise, die des ersten Satzes nicht bedürfen, doch nach jenem kommen), so ist durch sie (d. h. diese Beweise) eine Verifizierung jener ersten Behauptung ermöglicht, d. h. die zweite Behauptung wird dadurch unter die Prämissen der ersteren gerückt.[1]) Nachdem wir nun die vielen Beweise (für die erste Behauptung) alle nacheinander gegeben haben, stellen wir diejenigen für die zweite Behauptung auch zusammen und setzen sie also zwischen den ersten und den Schlußteil.[2])

Die zweite Behauptung.

Wenn in einen Kreisbogen eine gebrochene Linie gelegt wird, die den Bogen halbiert, hierauf in denselben Bogen eine zweite gebrochene Linie, die den Bogen in zwei ungleiche Teile teilt, so ist das Produkt des einen Teils der den Bogen halbierenden Linie in den anderen gleich dem Produkt des einen Teils der den Bogen in zwei verschiedene Teile teilenden Linie in den andern mehr dem Quadrat der Sehne, die zwischen den beiden Teilpunkten liegt. Z. B., der Bogen ABG [Fig. 20] enthalte die gebrochene Linie ABG, er werde halbiert im Punkte D, und in ihn die gleich gebrochene Linie ADG gelegt[3]), so sage ich, daß $AD \cdot DG$ $(= AD^2) = AB \cdot BG + BD^2$.[4])

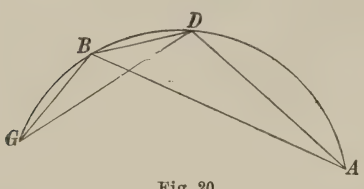


Fig. 20.

Jeder einzelne von jenen (Gelehrten) hatte versucht, die Schwierigkeit dieser Sache (dieses Beweises) möglichst zu erleichtern und sie (ihn) zu kürzen, und es kamen dabei die verschiedensten Arten zum Vorschein, wie wir aus ihren Berichten selbst sehen werden, so Gott will.

α) Beweis dazu; ich habe ihn gefunden in den Fragen[5]), die YŪḤANNĀ B. YŪSUF aus dem Griechischen ins Arabische übersetzt hat.

Er ist ganz ähnlich einem Beweise, den ABŪ SAʿĪD EL-SIDJZĪ und ABŪ ʿALĪ EL-BAṢRĪ gegeben haben. Zieht man in einem gleichschenkligen

1) Diese Stelle ist etwas schwierig, ich habe ihr keinen anderen Sinn zu geben gewußt.

2) Auch dies ist ziemlich frei übersetzt, ich glaube aber doch den richtigen Sinn getroffen zu haben.

3) Hier ist der Text etwas verdorben, die ungleich gebrochene Linie wird zweimal genannt.

4) Über diesen Satz s. Kommentar.

5) Masā'il = Fragen, Untersuchungen, Probleme.

Dreieck eine Gerade von der Spitze zur Basis, die diese in zwei ungleiche Teile teilt, so ist das Produkt dieser beiden ungleichen Teile mehr dem Quadrat dieser Geraden gleich dem Quadrat eines Schenkels. Das Dreieck sei ADH [Fig. 21] und $AD = DH$, wir ziehen in demselben zur Basis die Linie DB beliebig, nur nicht senkrecht auf sie, so sage ich, daß $AB \cdot BH + BD^2 = AD^2$.[1]) Beweis: Wir beschreiben um das Dreieck ADB einen Kreis und ziehen DE senkrecht auf AB, so ist, weil AH im Punkte E halbiert wird und in zwei ungleiche Teile geteilt ist im Punkte B,

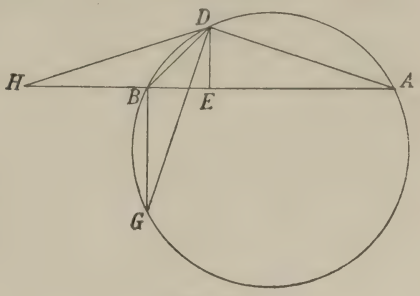


Fig. 21.

$AE^2 = AB \cdot BH + EB^2$,[2]) fügen wir beiderseits DE^2 hinzu, so haben wir: $AE^2 + DE^2$ (d. i. AD^2) $= AB \cdot BH + EB^2 + DE^2 = AB \cdot BH + BD^2$. Es wurde nun in den Beweisen zur ersten Behauptung gezeigt, daß $BH = BG$ ist, wenn Bogen DBG = Bogen AD gemacht wird; man ziehe BG, DG, so ist nun also $AB \cdot BH = AB \cdot BG$ und man hat nun: $AD^2 = AB \cdot BG + BD^2$.[3]) Dies (d. h. dieser Beweis) gehört also zu den Anhängen (d. h. zu denen, welche den Beweis der ersten Behauptung voraussetzen). — Was Abū Sa'īd el-Sidjzī und Abū 'Alī el-Baṣrī anbetrifft, so setzen sie die gebrochene Linie ABG in den Bogen $ADBG$ und behaupten dann, daß $AB \cdot BG + BD^2 = AD^2$ sei; hierauf machen sie zum Beweise $BH = BG$ und führen dann den Beweis weiter wie oben.

β) Beweis dazu von Abū Naṣr Manṣūr b. 'Alī b. 'Irāḳ.

Ich sage[4]) (behaupte) [Fig. 22], daß $AB \cdot BG + BD^2 = AD^2$. Beweis: Ich verlängere BG über B hinaus und ziehe DZ senkrecht auf die Verlängerung, DE senkrecht auf AB, ferner noch DB, AD, DG. Weil nun Winkel ABG gemessen wird durch die Ergänzung des Bogens $ADBG$ zum ganzen Kreis, wird Winkel ABZ gemessen durch den Bogen $ADBG$, deshalb ist Winkel EBD = Winkel DBZ, weil Bogen AD = Bogen DG[5]), ferner ist DB den beiden Dreiecken BDZ und BDE gemeinsam, und Winkel E = Winkel Z als rechte, also ist $BE = BZ$;

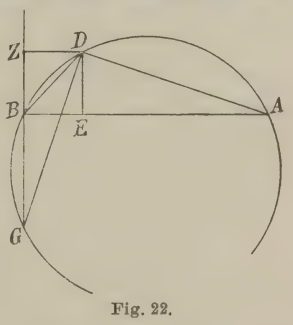


Fig. 22.

1) Im Text steht AB^2. 2) Nach Euklides II, 5.

3) Im Text ist der Schluß durch Auslassungen und unrichtige Buchstaben etwas verdorben.

4) Vor diesem „Ich sage" sollte eigentlich den andern Beweisen entsprechend stehen: „Er sagt". 5) Der Text hat BG.

ferner ist $DG^2 = GZ^2 + DZ^2$ und $BD^2 = DZ^2 + BZ^2$, also ist $DG^2 = BD^2 + GZ^2 - BZ^2$, es ist aber $GZ^2 - BZ^2 = GB^2 + 2GB \cdot BZ$, und $AE = BE + BG$; es wurde schon bewiesen, daß $EB = BZ$, also ist $AB = BG + 2BZ$, mithin $DG^2 = BD^2 + AB \cdot BG$[1]), q. e. d. — Dieser Beweis gehört zu den Anhängen, wegen der ohne Beweis aufgestellten Gleichheit von AE und $BE + BG$.

γ) Zweiter Beweis von ABŪ NAṢR B. ʿIRĀḳ.

Er sagt: Man verlängere [Fig. 23] GB über B hinaus und ziehe DH senkrecht auf GH, mache $HZ = BH$, und ziehe DZ, so ist, weil $DG^2 = DH^2 + GH^2$ und $DB^2 = DH^2 + BH^2$, auch $DG^2 = DB^2 + BG^2 + 2BH \cdot BG$[2]); aber $HZ = BH$, also $DG^2 = DB^2 + BG \cdot GZ$; weil nun Winkel G = Winkel A, und DB den Winkel ABZ halbiert, und Winkel Z = Winkel DBH ist, ist auch Winkel ABD = Winkel GZD, und da $DG = AD$ ist, so ist auch $AB = GZ$; es wurde aber eben bewiesen, daß $DG^2 = DB^2 + BG \cdot GZ$, also ist auch DG^2 (oder AD^2) $= DB^2 + AB \cdot BG$, q. e. d.[3]) — Dieser Beweis gehört zu den Vorausgehenden (Voranzustellenden), weil er der (ersten) Eigenschaft der gebrochenen Linie nicht bedarf, ja er gehört sogar zu ihrem Fundament, weil mit ihm jene erste Eigenschaft bewiesen werden kann.

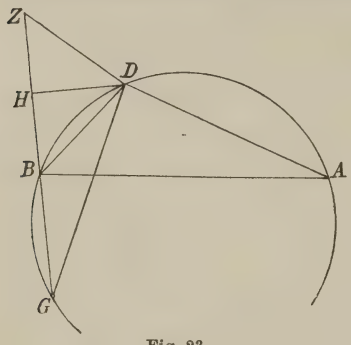


Fig. 23.

δ) Beweis von ABŪ SAʿĪD EL-SIDJZĪ.

Er sagt: Wir verlängern [Fig. 24] AB über B hinaus, so daß Dreieck ADZ gleichschenklig wird in bezug auf die Schenkel AD und DZ, wie vorher[4]); dann beschreiben wir um das Dreieck ADZ einen Kreis, verlängern BD bis zum Durchschnitt mit diesem Kreise in H und ziehen ZH; dann ist $AB \cdot BZ = BD \cdot BH$, aber $BD \cdot BH + BD^2 = BD \cdot DH$[5]); weil nun Winkel DZA = Winkel DHZ, da sie auf den

1) Dies ist etwas kurz, deutlicher wäre: es ist also $BG^2 + 2BG \cdot BZ = BG \cdot AB$, also $DG^2 = BD^2 + AB \cdot BG$.

2) Dies ist wieder kurz ausgedrückt, deutlicher wäre: auch $DG^2 = DB^2 - BH^2 + GH^2 = DB^2 - BH^2 + (BG + BH)^2 = DB^2 + BG^2 + 2BH \cdot BG$.

3) Die Linie DG fehlt im Manuskript.

4) d. h. wie in seinem ersten Beweis zur ersten Behauptung.

5) Im Text steht $BH \cdot DH$; dann fehlt wahrscheinlich noch: also $BD \cdot DH = AB \cdot BZ + BD^2$.

gleichen Bogen AD und DZ stehen, und Winkel D gemeinschaftlich ist so ist Dreieck DBZ ähnlich Dreieck DHZ, also besteht die Proportion: $DH : DZ = DZ : BD$, also $BD \cdot DH = DZ^2$, aber $BD \cdot DH = AB \cdot BZ + BD^2$, also $AB \cdot BZ$ oder $AB \cdot BG + BD^2 = DZ^2 = AD^2$, q. e. d — Dieser Beweis gehört zu den Anhängen, weil darin die Gleichheit von BZ und BG vorausgesetzt ist; wenn aber der Beweis auf die gleiche Weise geführt würde wie vorher[1]), so käme man damit auf die (erste) Eigenschaft der gebrochenen Linie, und der Beweis wäre dann einer von den vorausgehenden.

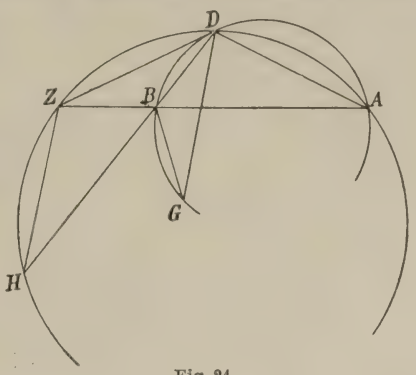


Fig. 24.

ε) Beweis von Abū ʿAbdallāh el-Shannī.

Er sagt: Man mache [Fig. 25] Bogen $AZ = BG$ und ziehe GZ, verlängere BG über B hinaus, und mache $GH = GZ$, und ziehe DH, DZ, ferner DT senkrecht auf BH; weil nun $GH = GZ$, und GD gemeinschaftlich,[2]) und Winkel HGD = Winkel DGZ, weil sie auf den gleichen Bogen BD und DZ, so ist $DH = DZ$, aber $DZ = BD$, also ist auch $DH = BD$, und DT senkrecht auf BH, also ist auch $TH = BT$, mithin HB eine Gerade, die im Punkte T halbiert und um BG verlängert ist, folglich ist $GH \cdot BG + BT^2 = GT^2$;[3]) fügen wir auf beiden Seiten DT^2 hinzu, so haben wir: $GH \cdot BG + BT^2 + DT^2 = GT^2 + DT^2$, oder: $GH \cdot BG + BD^2 = GD^2$; aber $AB = GZ = GH$, also ist $AB \cdot BG + BD^2 = GD^2$, q. e. d. — Dieser Beweis gehört zu den Vorausgehenden, weil er jener Eigenschaft (der gebrochenen Linie) nicht bedarf.

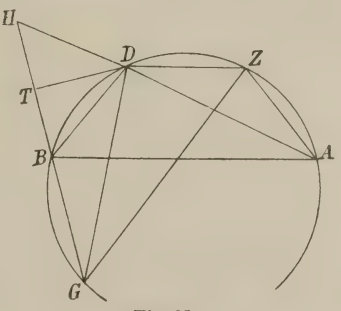


Fig. 25.

ζ) Beweis dazu von mir.

Ich sage: Wir ziehen [Fig. 26] DH parallel AB, ferner noch AH, AD, HB, BD. Weil nun Bogen AD = Bogen DG, und Bogen AH = Bogen BD, so

---

1) d. h. wie in seinem ersten Beweis zur ersten Behauptung.

2) Hier ist im Text wiederholt, daß nun GH und DG einzeln gleich seien GZ und DG.

3) Nach Euklides II, 6.

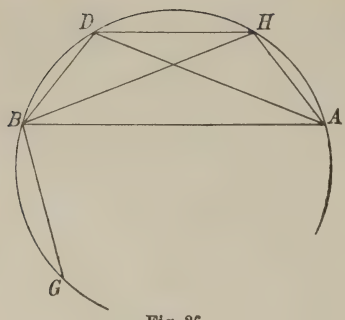


Fig. 26.

ist auch Bogen $DH = BG$, also sind auch ihre Sehnen gleich; weil nun $AHDB$ ein Kreisviereck ist, so hat man: $AD \cdot BH = DH \cdot AB + AH \cdot BD$; aber $DH = BG$, und $AD = BH$ und $AH = BD$, also ist auch $AD^2 = AB \cdot BG + BD^2$, q. e. d. — Dieser Beweis gehört auch zu den vorausgehenden, aus demselben Grunde wie der vorige.[1])

η) Zweiter Beweis von mir.

Ich sage: Wir ziehen [Fig. 27] die Senkrechte DE auf AB und errichten über AE das Quadrat AZ, und über BE das Quadrat ET, verlängern TK bis L, machen $EM = EB$, ziehen MSO parallel EZ und vervollständigen die Fläche AEH^2), so ist klar, daß $AM = BG$, es ist aber AM der Unterschied zwischen den beiden Teilen der Basis des Dreiecks ABD, nämlich zwischen AE und EB; ebenso ist klar, daß $AM = KZ$, und deshalb Fläche $KF = ML$ ist, da auch $TK = MS$; nun ist die Fläche TH, d. h. das Quadrat AZ vermindert um das Quadrat $BK\ (= ES) = LT \cdot TF = AB \cdot AM = AB \cdot BG$; addieren wir hierzu BD^2, und zwar so, daß wir zuerst das Quadrat BK oder ES addieren, dann haben wir das vollständige Quadrat $EH\ (= AE^2)$; hierauf addieren wir noch (zu diesem) DE^2; nun ist $DE^2 + AE^2 = AD^2$, also haben wir: $AB \cdot BG + BD^2 = AD^2$, q. e. d. — Dieser Beweis gehört zu den Anhängen, weil er jener (ersten) Eigenschaft der gebrochenen Linie bedarf.

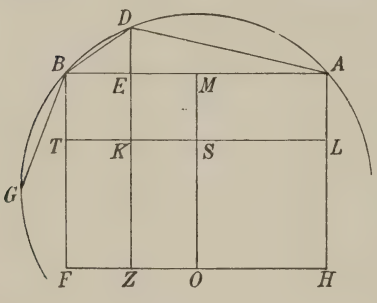


Fig. 27.

ϑ) Dritter Beweis von mir, ohne Beziehung (?)[3]) zum Almagest.

Man zieht [Fig. 28] die Senkrechte DE, ferner AD, macht $AH = BD$ und zieht DT parallel AH, so ist es gleich AH und also auch gleich

---

1) Dieser Beweis von EL-BĪRŪNĪ ist der einfachste derjenigen für die zweite Behauptung.

2) Besser wäre wohl $ABFH$, oder einfach BH.

3) Siehe Kommentar.

BD, und Winkel DTA ist ein stumpfer, also ist $AD^2 = AT^2 + DT^2 + AT \cdot BT$ (denn $BT = 2ET$); aber $AT \cdot BT + AT^2 = AB \cdot AT$, also ist $AD^2 = DT^2 + AB \cdot AT = BD^2 + AB \cdot AT$[1]), aber $AT = DH = BG$, also ist $AD^2 = BD^2 + AB \cdot BG$, q. e. d. — Dieser Beweis gehört zu den vorausgehenden.

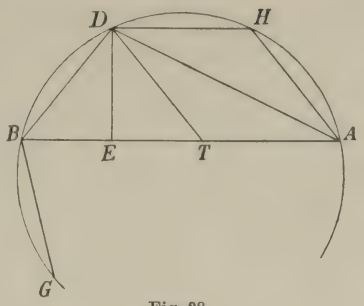


Fig. 28.

ι) Vierter Beweis von mir.

Ich sage: Man ziehe [Fig. 29] die Senkrechte DE auf AB und mache $EM = EB$, so ist BM eine Gerade halbiert in Punkte E, und verlängert um die Gerade AM, dann ist $AB \cdot AM + EM^2 = AE^2$; man addiert auf beiden Seiten DE^2, so ist $AB \cdot AM + EM^2 + DE^2 = AE^2 + DE^2$, aber $DE^2 + EM^2 (= EB^2) = BD^2$, und $AE^2 + DE^2 = AD^2$, also ist $AB \cdot AM + BD^2 = AD^2$, q. e. d.[2]) Dieser Beweis gehört zu den Anhängen aus den schon erwähnten Gründen.

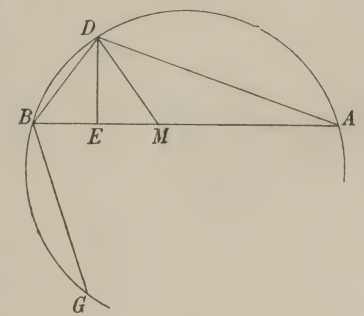


Fig. 29.

Das ist, was von ihnen (den Gelehrten) an Beweisen zu dieser zweiten Behauptung aufgestellt worden ist. Und fürwahr, diese beiden Sätze leuchten hell hervor aus den Elementen der Geometrie, und es werden auf sie wichtige Dinge[3]) zurückgeführt; ... ich habe mich auf sie gestützt in einer Anzahl von Fragen (Problemen), über die ich befragt wurde, und von denen ich, was ich noch in Erinnerung habe, erwähnen werde, mit der Hilfe Gottes, seiner Gnade und seiner Leitung.

Die Aufgaben.

1. Es sollen aus zwei gegebenen Punkten zwei Gerade gezogen werden, die einen gegebenen Winkel miteinander bilden, und deren Summe gleich einer gegebenen Geraden ist, von mir.

Menelaus wollte im zweiten Satze des dritten Buches seines Werkes über die Elemente der Geometrie beweisen, wie in einem gegebenen Halb-

1) Hier ist der Text etwas unklar, es kommen Wiederholungen vor.

2) Dieser Beweis ist unvollständig, da noch bewiesen werden sollte, daß $AM = BG$ ist; el-Bīrūnī hat vielleicht auf einen der Beweise der ersten Behauptung verwiesen und diese Verweisung ist weggefallen.

3) asbāb, eigentlich „Motive"; am besten wäre vielleicht „Sätze, Probleme"

kreis eine gebrochene Linie gezeichnet werde gleich einer gegebenen Linie; er schlug aber hierzu einen sehr langen Weg ein.[1]) Nachher behandelte sie (diese Aufgabe) THĀBIT B. ḲURRA in seinem Kommentar dieses Buches (des MENELAUS) auf einem ungefähr so langen Wege wie MENELAUS selbst. Nachdem nun aber die Eigenschaften der gebrochenen Linie bekannt geworden sind[2]), so ist die Behandlung dieser Aufgabe des MENELAUS eine leichtere geworden, und sie erstreckt sich nun sogar allgemeiner auf alle Bögen eines gegebenen Kreises (nicht nur auf den Halbkreis). Hierauf verfaßte ABŪ'L-DJŪD MUḤ B. EL-LEITH[3]), Gott erbarme sich seiner, über diese Aufgabe eine Abhandlung und löste sie auf einem Wege, der über alle Maßen lang und schwierig war. Als nun aber ABŪ SA'ĪD AḤMED B. MUḤ B. 'ABDELDJALĪL sich mit ihr beschäftigte, fand er einen Weg der Auflösung, der den höchsten Grad der Leichtigkeit erreichte. Wir weichen nicht weit von ihm ab in dem (Beweise), den wir gefunden haben mit Hilfe der Eigenschaften der gebrochenen Linie in einem Kreisbogen und ihre Teilung durch die Senkrechte, die von der Mitte des Bogens auf sie gefällt wird; folgendes ist das Verlangte:

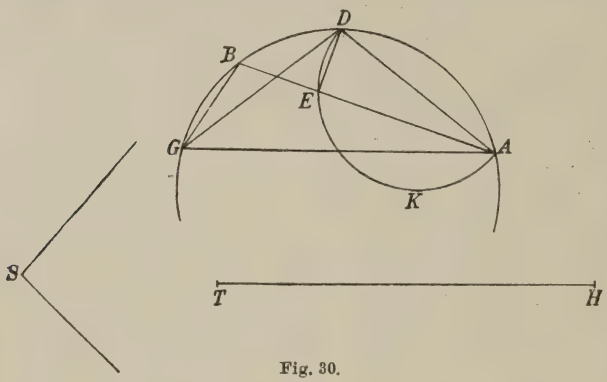


Fig. 30.

Wir wollen von den gegebenen Punkten A und G aus [Fig. 30] zwei gerade Linien ziehen, die sich in einem Punkte schneiden und einen Winkel miteinander bilden gleich dem Winkel S, und deren Summe gleich der Linie TH ist. Wir ziehen AG und beschreiben darüber ein Bogensegment, das den Winkel S (als Peripheriewinkel) faßt, es sei das Bogensegment ADG, und D sei die Mitte desselben, wir ziehen AD; es ist nun notwendig, daß die gegebene Linie TH größer sei als AG, aber nicht größer als das Doppelte von AD[4]), damit das Erreichen des Gesuchten möglich sei. Hierauf beschreiben wir über AD einen Halbkreis,

1) Siehe Kommentar. 2) Wörtlich „vorausgegangen sind".

3) Vgl. H. SUTER, l. c. p. 97, nr. 215; aus den Worten „Gott erbarme sich seiner" ist zu schließen, daß ABŪ'L-DJŪD schon gestorben war, als EL-BĪRŪNĪ diese Abhandlung verfaßte und dies war vor 1036, denn es existiert ein Verzeichnis seiner Schriften (von ihm selbst verfaßt) bis zu diesem Jahre, und in diesem wird auch unsere Abhandlung genannt (vgl. *Chronologie orientalischer Völker,* herausgegeben von E. SACHAU, Leipzig 1878, p. XXXXIV).

4) Im Text steht unrichtig „des Quadrates von AD".

er sei AKD[1]), und legen in denselben die Sehne $AE = \frac{1}{2}TH$, und verlängern sie bis zum Durchschnitt B mit dem Bogensegment, und ziehen BG[2]), so sage ich, daß $AB + BG = TH$ sei und Winkel ABG = Winkel S. Beweis: Wir ziehen DE, so steht es senkrecht auf AB und weil diese Senkrechte vom Mittelpunkt des Bogens ADG ausgeht, ist $AE = EB + BG$, aber AE wurde gleich $\frac{1}{2}TH$ gemacht, also ist $EB + BG$ gleich der andern Hälfte von TH, also $AB + BG = TH$; ferner ist Winkel ABG = Winkel S, weil er in einem Kreissegment steht, das einen ihm gleichen Winkel faßt; q. e. d.

2. Von zwei gegebenen Punkten aus zwei Gerade zu ziehen, die einen gegebenen Winkel miteinander bilden, und deren Differenz gleich einer gegebenen Geraden ist, von mir.

Wir wollen sie (die beiden Geraden) von den Punkten A und G aus [Fig. 31] ziehen, sie sollen einen Winkel einschließen gleich dem Winkel S und ihr Unterschied soll gleich der Linie TH sein. Wir ziehen AG und beschreiben darüber ein Bogensegment, das den Winkel S (als Peripheriewinkel) faßt, halbieren es im Punkte D. Dann vervollständigen wir Bogen AD zu einem Halbkreis, ziehen AD, DZ, AZ, machen $ZK = \frac{1}{2}TH$, ziehen KL[3]) senkrecht auf AZ; dann machen wir $DB = ZL$ und ziehen AB, BG, so behaupten wir, daß $AB - BG = TH$. Beweis: Man ziehe DE senkrecht auf AB, dann ist Winkel DBE = Winkel DZA, denn sie stehen auf dem gleichen Bogen AD, ferner Winkel DEB = Winkel ZKL als rechte, also ist Dreieck DEB ähnlich Dreieck KLZ; aber wir haben $DB = ZL$ gemacht, also sind sie auch kongruent[4]), folglich ist $KZ = EB$, aber KZ wurde gleich $\frac{1}{2}TH$ gemacht; aus dem was vorangegangen ist, ist aber bekannt, daß EB gleich der Hälfte des Unterschiedes von AB und BG ist, also ist $2EB = AB - BG$, und da die Hälfte des Unterschiedes gleich der Hälfte von TH ist, so ist der ganze Unterschied gleich TH. Die Möglichkeit dieser Aufgabe

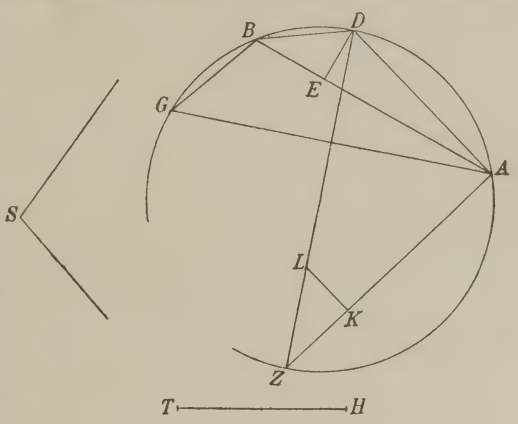


Fig. 31.

1) K fehlt in der Figur. 2) Im Text steht BD. 3) Im Text steht GL.
4) In der Figur des Manuskripts ist das Dreieck KLZ viel kleiner als das Dreieck DEB gezeichnet, ferner sind die Buchstaben K und L vertauscht, und DE steht ganz schief auf AB.

unterliegt der Bedingung, daß KZ nicht größer sei als AG[1]), sonst wird das Gesuchte nicht gefunden. Das ist, was zu beweisen war, Gott weiß es besser.

Anderes Verfahren hierfür, von mir.

Wir ziehen [Fig. 32] AG und beschreiben darüber einen Kreisbogen, der einen Winkel fasse gleich dem Winkel S, halbieren den Bogen im Punkte D und ziehen DG, errichten DK senkrecht auf AG, machen $KL = \frac{1}{2}TH$ und ziehen LM parallel DK und MO parallel KL[2]), machen Sehne $DB = DM$ und ziehen AB, BG, so haben wir, was wir wollten. Beweis: Wir ziehen DE senkrecht auf AB, so ist klar, daß Dreieck DBE ähnlich Dreieck DGK, weil Winkel DBE = Winkel DGK, da sie auf gleichem Bogen AD stehen, und die Winkel bei E und K rechte sind; und weil MO parallel KG, ist auch Dreieck DMO ähnlich Dreieck DBE, es ist aber $DM = DB$, also sind die Dreiecke auch kongruent[3]), mithin ist $MO = BE$, aber $MO = KL$, also $BE = KL = \frac{1}{2}TH$; es ist aber schon gezeigt worden, daß es (d. h. BE) gleich der Hälfte von $AB - BG$ ist, also ist $2BE = AB - BG$, und demnach diese Differenz gleich TH, q. e. d.

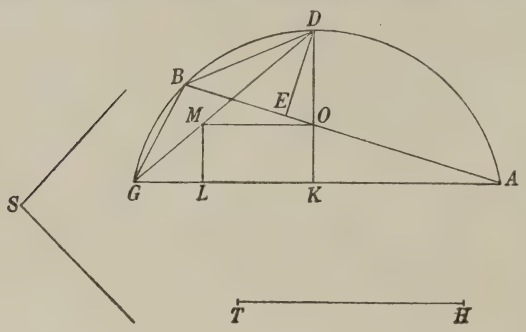


Fig. 32.

3. Von zwei gegebenen Punkten aus zwei Gerade zu ziehen, die einen gegebenen Winkel einschließen, und deren Produkt gleich einer gegebenen Fläche ist, von mir.

Die beiden Geraden sollen von den Punkten A und G [Fig. 33] ausgehen und den Winkel S einschließen und ihr Produkt soll gleich der

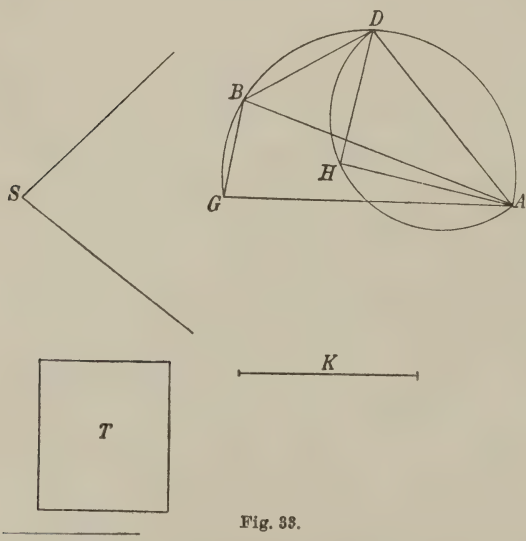


Fig. 33.

1) Im Text steht AD; besser wäre übrigens: $2KZ < AG$, oder $TH < AG$.
2) Im Text steht KM. 3) Dieser Satz fehlt im Manuskript.

Fläche T sein. Die Linie, die die Fläche T potenziert, sei K; wir ziehen AG und beschreiben über ihr einen Kreisbogen, der einen Winkel fasse gleich dem Winkel S, halbieren ihn im Punkte D, ziehen AD, beschreiben darüber einen Halbkreis AHD, tragen in demselben die Sehne $AH = K$ ab, und ziehen DH; hierauf machen wir $DB = DH$, ziehen AB und BG, so behaupten wir, daß $AB \cdot BG =$ Fläche T sei. Beweis: Es ist, nach dem, was wir früher bewiesen haben, $AD^2 = BD^2 + AB \cdot BG$, also $AD^2 - BD^2 = AB \cdot BG$, aber $AD^2 - BD^2 = AH^2$, da wir $BD = DH$ gemacht haben, also ist $AH^2 = AB \cdot BG$, aber $AH^2 = K^2 = T$, also ist $AB \cdot BG = T$, q. e. d.

Anderes Verfahren ähnlich dem vorhergehenden von Abū ʿAbdallāh el-Shannī.

Man ziehe [Fig. 34] AG und beschreibe darüber einen Kreisbogen, der einen Winkel faßt gleich dem gegebenen Winkel S, und nehme die Gerade K als die Fläche T potenzierend an, und ziehe die Sehne AD nach dem Mittelpunkt des Bogens ADG[1]); es ist nun notwendig, daß K kleiner sei als AD, sonst ist die Auffindung des Gesuchten unmöglich.[2]) Es sei nun also K kleiner als AD; dann ziehe man die Sehne BD, die die Differenz $AD^2 - K^2$ potenzieren soll, und ziehe AB, BG, so behaupte ich, daß $AB \cdot BG$ gleich der Fläche T sei. Beweis: Wir beschreiben aus dem Mittelpunkt D mit dem Radius AD den Kreisbogen $ALHG$, verlängern AD und AB bis zum Umfang dieses Bogens und ziehen DH, so ist klar, daß es gleich AD ist; wir machen $DZ = BD$, so ist klar, daß auch $AZ = BH$ ist, und Winkel AZD ist ein stumpfer, also $AD^2 = AZ^2 + DZ^2 + AZ \cdot BZ$, aber $DZ = BD$, und $AZ^2 + AZ \cdot BZ = AB \cdot AZ = AB \cdot BH$, also ist auch $AD^2 = BD^2 + AB \cdot BH$; wir haben aber $AD^2 - K^2$

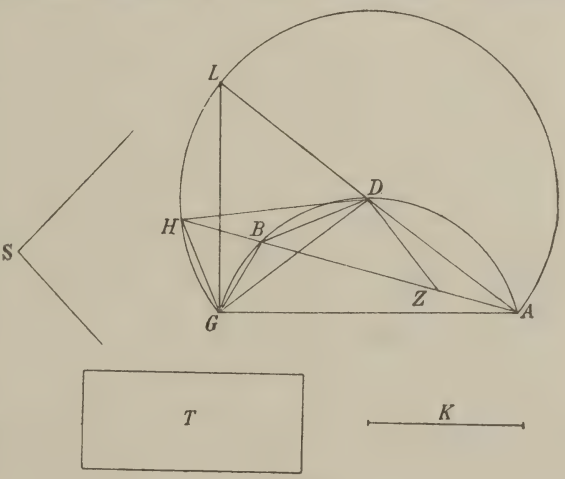


Fig. 34.

1) Das Manuskript hat ADB.

2) Diese Determination ist bei der vorigen Auflösung von el-Bīrūnī jedenfalls durch das Abschreiben weggefallen.

$= BD^2$ gesetzt, also ist $AB \cdot BH = K^2 = T$. Hierauf ziehen wir noch GH, GL, GD[1]), dann ist Winkel ADG = Winkel ABG, weil sie über demselben Bogen stehen, also auch Winkel LDG = Winkel HBG, und weil die Winkel ALG und AHG auf gleichem Bogen stehen, sind sie ebenfalls gleich, also ist Dreieck LDG ähnlich Dreieck HBG[2]), aber Dreieck LDG ist gleichschenklig, also auch Dreieck HBG, mithin $BH = BG$, also ist auch $AB \cdot BG$ gleich der Fläche T, q. e. d.[3])

4. Von zwei gegebenen Punkten aus zwei Gerade zu ziehen, die einen gegebenen Winkel einschließen, und deren Verhältnis gleich einem gegebenen Verhältnis sei.

Wir ziehen [Fig. 35] die Geraden von den Punkten A und G aus, sie sollen einen Winkel einschließen gleich dem Winkel S, und das Verhältnis der einen zur anderen sei gleich dem Verhältnis $L : K$. Wir nehmen an, die beiden Schenkel TZ und ZH schließen den Winkel S ein und TZ sei gleich K und $ZH = L$; wir ziehen TH; hierauf beschreiben wir über AG einen Kreisbogen, der einen Winkel gleich dem Winkel S faßt, und machen Winkel GAB = Winkel ZHT und ziehen BG, so behaupten wir, daß wir gemacht haben, was verlangt wurde. Beweis: Da Winkel TZH = Winkel ABG und Winkel THZ = Winkel GAB, so ist Dreieck ABG ähnlich Dreieck HZT und es besteht die Proportion: $AB : BG = HZ : TZ$, aber $HZ : TZ = L : K$, also ist auch $AB : BG = L : K$, q. e. d.

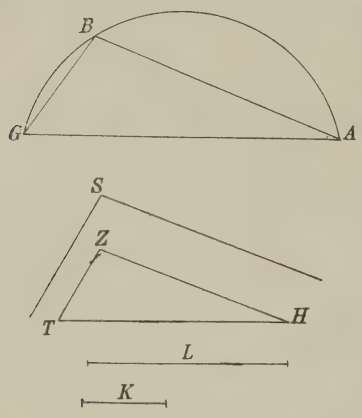


Fig. 35.

Dies ist die letzte (wahrscheinlich: Aufgabe dieser Art); wenn sie auch nicht mit den Eigenschaften der gebrochenen Linie gelöst wurde, so habe ich sie doch gebracht, weil durch die übrigen Aufgaben man naturgemäß auf sie geführt wird.[4]) Es lag keineswegs in meiner Absicht, das Thema vollständig zu erschöpfen, aber ich habe davon das gebracht, auf dessen Lösung ich kam, als ich die Eigenschaften der beiden Behauptungen, die vorausgegangen sind, studierte, wie ich im folgenden noch

1) Im Texte steht GZ; von diesen drei Linien ist nur GH gezogen in der Figur des Manuskripts.

2) HBG fehlt im Text.

3) Es ist wohl etwas zu viel gesagt, wenn EL-BĪRŪNĪ diese Lösung der seinigen ähnlich nennt; wir halten daher dafür, dieser Zusatz im Titel sei nicht von EL-BĪRŪNĪ.

4) Dies ist sehr frei übersetzt, ich wußte aber der Stelle keinen anderen Sinn zu geben.

verschiedenes bringen werde, was mir und anderen hierüber in den Sinn gekommen ist.

5. Konstruktion eines Dreiecks in einen gegebenen Kreis, wenn die Summe seiner Seiten gleich einer gegebenen Geraden ist, von mir.

Wie zeichnet man in einen gegebenen Kreis ein Dreieck, dessen Seitensumme gleich einer gegebenen Geraden ist? Es sei diese Gerade [Fig. 36] HT; es ist notwendig, daß HT nicht größer sei als die Summe der Seiten des gleichseitigen Dreiecks, das in den Kreis gezeichnet werden kann. Man nehme auf HT einen Punkt K beliebig an[1]), und lege in den Kreis eine Sehne $AG = HK$, halbiere den Bogen AG im Punkte D, ziehe AD, beschreibe über demselben einen Halbkreis AED, lege in denselben die Sehne AE gleich der Hälfte von KT, verlängere AE bis B und ziehe BG, so ist das Dreieck ABG dasjenige, dessen Seitensumme gleich HT ist. Beweis: AG ist gleich HK, und AE, das gleich der Hälfte der gebrochenen Linie ABG ist, gleich $\frac{1}{2}KT$, also ist die gebrochene Linie $ABG = KT$, mithin ist der Umfang des Dreiecks $ABG = HT$, und das ist, was von uns verlangt wurde.

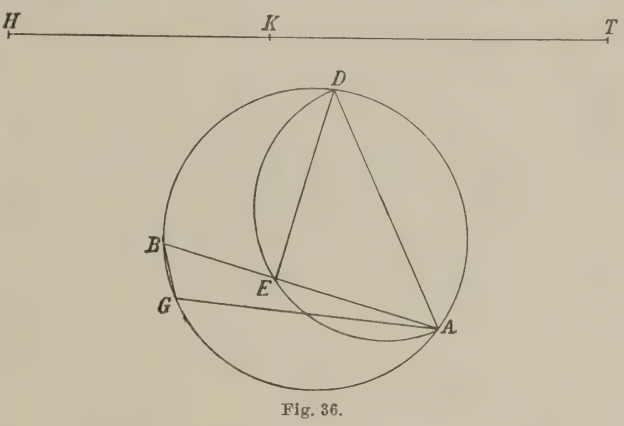


Fig. 36.

6. Beweis des Verfahrens des Archimedes zur Auffindung der Höhen der Dreiecke, deren Seiten gegeben sind, und der durch die Höhen gebildeten Seitenabschnitte, von mir.

Archimedes sagt: Man subtrahiert das Quadrat eines der beiden Schenkel vom Quadrat des anderen und dividiert den Rest durch die Basis, addiert das Ergebnis zur Basis und nimmt die Hälfte der Summe, so hat man den größeren Abschnitt (der Basis), subtrahiert man aber das Ergebnis der Division von der Basis und nimmt die Hälfte der Differenz, so hat man den kleineren Abschnitt.[2]) — Der Beweis, um den ich gefragt (gebeten) wurde, ist folgender: Das Dreieck ADB [Fig. 37] sei gegeben, seine Höhe sei DE; man beschreibe um dasselbe einen Kreis

1) Es fehlt die Determination, daß HK kleiner als die Hälfte von HT angenommen werden müsse. 2) Siehe Kommentar.

und mache Bogen $DG = AD$ und ziehe BG, zeichne über AE das Quadrat AZ und über BE[1]) das Quadrat TE, und mache $EM = EB$, ziehe MO parallel EZ und TKL parallel AB, und vervollständige die Fläche AF, so ist, weil $BD^2 = DE^2 + BE^2$ und $AD^2 = AE^2 + DE^2$, DE^2 beiden gemeinsam; wenn wir also BD^2 von AD^2 subtrahieren, so erhalten wir $AE^2 - BE^2$, es ist aber klar, daß diese Differenz gleich dem Gnomon QCN ist; weil ferner $TK = KS = SM$, und $TF = KZ = AM$, sind die Flächen TZ, KO, ML einander gleich, also ist Fläche TH = Gnomon QCN; aber $TF = AM = BG$, weil AM und ME bzw. gleich BG und BE sind, also ist Fläche $TH = AB \cdot BG$; teilen wir sie durch die Basis (AB), so erhalten wir BG, addieren wir dieses zur Basis, so haben wir die gebrochene Linie ABG, ihre Hälfte ist AE[2]), der größere Abschnitt; subtrahieren wir BG von der Basis, so bleibt BM, und seine Hälfte ist BE, der kleinere Abschnitt, q. e. d.

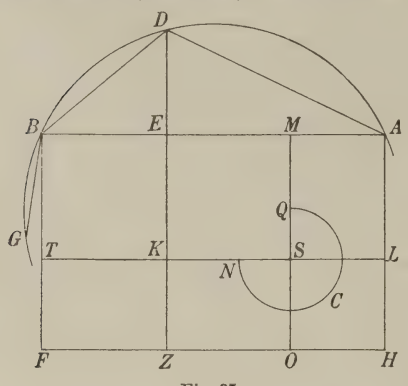


Fig. 37.

An Stelle der Differenz $AD^2 - BD^2$ kann man auch das Produkt aus der Summe und Differenz von AD und BD setzen, weil dieses gleich jener ist, also ist auch $AE^2 - BE^2 = (AE + BE)(AE - BE) = AB(AE - BE) = AB \cdot AM = AB \cdot BG$.[3])

Zweiter Beweis von mir, leichter (kürzer) als der erste.

Wir nehmen [Fig. 38] dasselbe Dreieck ADB an und beschreiben um es einen Kreis und machen Bogen $DG = AD$, ziehen BG, machen $EM = EB$, so ist, weil $AD^2 = BD^2 + AB \cdot BG$ (wie früher schon bewiesen wurde), $AD^2 - BD^2 = AB \cdot BG$; dies teilen wir durch AB, die Basis, so erhalten wir BG, addieren wir dieses zur Basis, so erhalten wir die gebrochene Linie ABG, ihre Hälfte ist AE, subtrahieren wir BG von der Basis AB, so erhalten wir MB, seine Hälfte ist EB, q. e. d.

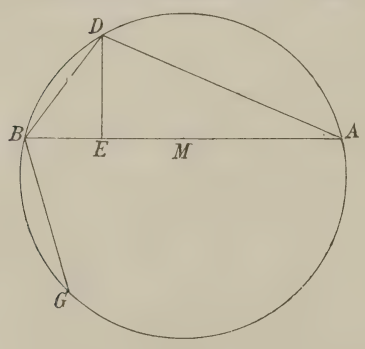


Fig. 38.

1) Der Text hat ME.

2) Der Text hat AD.

3) Hier fehlt wahrscheinlich noch: „also ist auch $AD^2 - BD^2 = AB \cdot BG$, was wir schon früher auf anderem Wege bewiesen haben."

7. Beweis zum Verfahren des Archimedes zur Berechnung der Dreiecke aus dem Überschuß ihrer Seiten (sic), von Abū ʿAbdallāh el Shannī.

Archimedes sagt: Wenn wir die Fläche jedes Dreiecks aus seinen Seiten kennen wollen, so nehmen wir den Überschuß der Hälfte der Seitensumme über jede der drei Seiten, bilden das Produkt dieser drei Überschüsse, und multiplizieren es noch mit der halben Seitensumme, und ziehen die Wurzel aus diesem Produkte, so haben wir die Fläche des Dreiecks. — Abū ʿAbdallāh sagt: Der Beweis hierzu ist folgender: Wir nehmen [Fig. 39] das Dreieck ABG und beschreiben um dasselbe den Kreis $ADBG$, und es sei D der Mittelpunkt des Bogens ABG, wir ziehen von demselben die Senkrechte DE auf AB, und ebenso die Senkrechte DZ auf AG[1]), und ziehen AD, DG, DB; dann beschreiben wir aus dem Punkte A mit dem Radius AZ den Bogen ZHT, der die Linie AE im Punkte H und die Linie AD im Punkte T schneidet; dann ist $AD^2 = AZ^2 + DZ^2$[2]), ferner ist $AT = AZ$, also $DT^2 + 2\,DT \cdot AT = DZ^2$ $(= AD^2 - AT^2)$; weil wir $AT = AZ$ gemacht haben, ist auch DZ^2 $= DE^2 + EH^2 + 2\,AH \cdot EH$[3]); nun ist Dreieck DEB jedem der Dreiecke DGZ und DAZ ähnlich, weil die Winkel AGD, ABD und GAD unter sich gleich sind, da jeder von ihnen auf der Hälfte des Bogens $ADBG$ steht, also besteht die Proportion: $DE : EB = DZ : AZ$, aber $DZ : AZ = DZ^2 : DZ \cdot AZ = DZ \cdot AZ : AZ^2$, ebenso hat man auch: $DE^2 : DE \cdot EB = DE \cdot EB : EB^2$. Wenn man Glieder einer Proportion von den entsprechenden Gliedern einer anderen Proportion, deren Verhältnisse mit denen der ersteren gleiche Werte haben, subtrahiert, so bilden die Reste wieder eine Proportion. Subtrahiert man nun DE^2 von DZ^2, so erhält man, wie wir oben gezeigt haben: $EH^2 + 2\,AH \cdot EH$ oder $EH\,(AE + AZ)$, und subtrahiert man $DE \cdot EB$ von $DZ \cdot AZ$, oder 2. Dreieck BDE von Dreieck ADG, so erhält man Dreieck ABG, wie wir bei den Eigenschaften der gebrochenen Linie gezeigt haben;

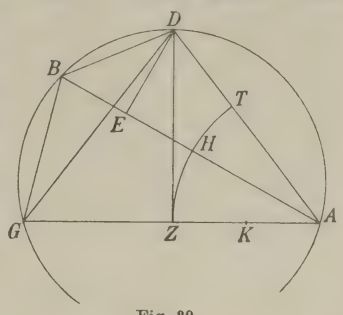


Fig. 39.

1) Der Text hat AD.

2) Im Manuskript steht $AE^2 + DE^2$, was ja auch richtig ist, aber hier nicht in Betracht kommt.

3) Hier fehlt eine nähere Begründung dieser Gleichung, statt einer solchen ist dieselbe wiederholt; die Begründung wäre etwa folgende: Es ist $AE^2 = AH^2 + EH^2 + 2\,AH \cdot EH$, beiderseits DE^2 addiert und berücksichtigt, daß $AE^2 + DE^2 = AD^2 = AZ^2 + DZ^2 = AH^2 + DZ^2$, gibt: $DZ^2 = DE^2 + EH^2 + 2\,AH \cdot EH$.

subtrahiert man ferner EB^2 oder KZ^2 (nachdem man $KZ = EB$ gemacht hat) von AZ^2, so erhält man $GK \cdot AK$[1]); es ist also Dreieck ABG mittlere Proportionale zwischen EH $(AE + AZ)$ und $GK \cdot AK$[2]). Nun ist EH der Überschuß von $AE + AZ$, d. h. des halben Umfangs des Dreiecks ABG über die Seite AG, weil wir $AH = AZ = GZ$ gemacht haben, und weil DE die Summe der beiden Seiten AB und BG halbiert im Punkte E; ferner ist AK der Überschuß von $AE + AZ$ über die Seite AB, weil wir $KZ = EB$ gemacht haben[3]); ferner ist GK gleich dem Überschuß von $AE + AZ$ über die Seite BG[4]), also sind EH, AK und GK die Überschüsse des halben Umfangs des Dreiecks ABG über jede einzelne der drei Seiten; multiplizieren wir nun die Fläche $AK \cdot GK$ mit der Fläche EH $(AE + AZ)$, so haben wir den ersten Überschuß mit dem zweiten, und das Produkt mit dem dritten Überschuß und das neue Produkt mit $AE + AZ$, d. h. mit der halben Summe der Seiten multipliziert, und das Resultat ist gleich der Fläche des Dreiecks ABG multipliziert mit sich selbst, q. e. d.

Ist das Dreieck gleichschenklig, wie z. B. das Dreieck ADG, so hat man die Proportion: $DZ^2 : DZ \cdot AZ = DZ \cdot AZ : AZ^2$ Wir haben nun aber bewiesen, daß $DZ^2 = DT^2$[5]) $+ 2DT \cdot AT = DT\ (AD + AZ)$; ferner ist $DZ \cdot AZ =$ Fläche des Dreiecks ADG, und $AZ^2 =$ Fläche $AZ \cdot ZG$; bildet man also das Produkt $AZ \cdot ZG = AT \cdot AZ$[6]), so hat man das Produkt des einen Überschusses mit dem andern, hierauf dieses Produkt mit DT, d. h. mit dem dritten Überschuß, und dieses neue Produkt mit $(AD + AZ)$, d. h. mit der halben Summe der Seiten multipliziert, so hat man das Quadrat der Fläche $DZ \cdot AZ$, d. h. des Dreieckes ADG, q. e. d.

8. Beweis des den Indiern zugeschriebenen Verfahrens für die Berechnung eines einem Kreise einbeschriebenen Trapezes[7]), von ABŪ ʿABDALLĀH EL-SHANNĪ.

Wenn wir die Fläche des Trapezes haben wollen, das in einen Kreis einbeschrieben ist, so nehmen wir die Überschüsse des halben Umfangs

1) Ausführlicher: $AK^2 + 2\,AK \cdot ZK = AK\ (AK + 2\,ZK) = AK \cdot GK$.

2) Der Text hat $GK \cdot KB$.

3) Es ist nämlich: $AE + AZ - AB = 2AH + EH - AB = AH - BE = AZ - KZ = AK$.

4) Dieser Satz fehlt im Manuskript, dafür ist der vorhergehende Satz wiederholt; die Begründung für GK ist folgende: Es ist $AE + AZ - BG = BG + BE + AZ - BG = BE + AZ = ZK + GZ = GK$.

5) Das Manuskript hat DK^2. 6) Das Manuskript hat $AT \cdot KZ$.

7) Es sollte heißen „Trapezoid" (arab. *el-shabīh bi 'l-munḥarif* = das dem Trapez ähnliche); vielleicht ist *el-shabīh* weggefallen, oder EL-BĪRŪNĪ bezeichnet nach EUKLIDES alle Nicht-Parallelogramme mit dem Namen „Trapeze"; vgl. übrigens CANTOR, *Vorlesungen* I², S. 608—612.

desselben über jede einzelne Seite, bilden das Produkt dieser vier Überschüsse und ziehen die Wurzel aus demselben, so ist diese der Inhalt jenes Trapezes. Zum Beweise zeichnen wir [Fig. 40] das Viereck[1]) $ABGD$ in den Kreis $ABGD$ und halbieren jeden der Bogen BAD, BGD in den Punkten E und Z, ziehen BE, ED, DZ, BZ, EA, EZ, und die Senkrechten EH und ZT auf AB bzw. BG, der Durchschnitt von BD und EZ heiße K. Nun sind die Dreiecke EHA und EKD ähnlich, und ED länger als EA, folglich ist auch KD länger als AH; ferner ist $BT = \frac{BG+DG}{2}$, wie wir früher bewiesen haben, also ist BT länger als KD[2]), also noch um so mehr länger als AH; auf gleiche Weise zeigt man, daß BH länger als GT ist. Nun schneide man von BH die Linie $HL = GT$ ab, und von BT die Linie TM[3]) $= AH$; weil nun der Überschuß der Fläche $EBZD$ über die Fläche $ABGD = EH \cdot AH + ZT \cdot GT$[4]), und Dreieck EHA ähnlich Dreieck EBZ ist, so besteht die Proportion: $EH : AH = EB : BZ$[5]); ebenso ist Dreieck TZG ähnlich Dreieck EBZ, also besteht die Proportion: GT[6]) $: ZT$[6]) $= EB : BZ$; man hat ferner: $EB : BZ = EB^2 : EB \cdot BZ = EB \cdot BZ : BZ^2$[7]); nun ist $EB^2 = EB \cdot ED$, und $BZ^2 = BZ \cdot DZ$, und $EB \cdot BZ =$ Fläche $EBZD$, also ist diese Fläche geometrisches Mittel zwischen $EB \cdot ED$ und $BZ \cdot DZ$; aber Addition entsprechender Glieder von Proportionen mit gleichen Verhältnissen gibt wieder eine richtige Proportion, also hat man: $EH^2 + GT^2 : EH \cdot AH + ZT \cdot GT = EH \cdot AH + ZT \cdot GT : AH^2 + ZT^2$.[8]) Das gleiche gilt auch für die Subtraktion entsprechender Glieder solcher Proportionen; wenn wir also $EH^2 + GT^2$, d. h. $EH^2 + HL^2$ von EB^2 subtrahieren[9]), so bleibt BL $(AL + AD)$,

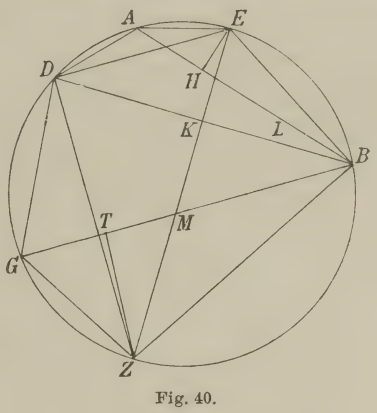


Fig. 40.

1) Hier braucht der Verfasser das allgemeine Wort „Viereck“ statt „Trapez“.

2) Weil KD die Hälfte von BD ist, denn EZ ist ein Durchmesser und steht senkrecht auf BD.

3) Der Punkt M fehlt in der Figur des Textes.

4) Nach dem 3. Beweis von EL-SHANNĪ zur ersten Behauptung, s. oben S. 20 und 21; übrigens gehört dieses nocht nicht hierher.

5) Der Text hat MD.

6) Der Text hat K an Stelle von T.

7) Der Text hat BE^2.

8) Ergibt sich durch Addition der entsprechenden Glieder der beiden Proportionen:

$$EH^2 : EH \cdot AH = EH \cdot AH : AH^2 \text{ und}$$
$$GT^2 : GT \cdot ZT = GT \cdot ZT : ZT^2.$$

9) Es wird nun als Subtrahend die eben genannte Proportion und als Minuend die Proportion $EB^2 : EB \cdot BZ = EB \cdot BZ : BZ^2$ angenommen.

weil, wenn wir EH^2 von EB^2 abziehen, HB^2 bleibt, und wenn wir HL^2 von HB^2 abziehen, $BL^2 + 2BL \cdot HL$ bleibt, das aber $= BL\,(BH + HL)$ ist, aber $BH = AH + AD$, also ist der Rest $= BL\,(AL + AD)$; wenn wir ferner die Summe der Flächen $EH \cdot AH$ und $ZT \cdot GT$ von $EB \cdot BZ$, d. h. der Fläche $EBZD$ subtrahieren, so ist der Rest die Fläche $ABGD$, und wenn wir die beiden Quadrate AH^2 und ZT^2, d. h. die beiden Quadrate TM^2 und ZT^2 von BZ^2 subtrahieren, so ist der Rest die Fläche $BM\,(GM + GD)$, nach dem was wir soeben bewiesen haben.[1]) Also besteht die Proportion:

$$BL\,(AL + AD) : ABGD = ABGD : BM\,(GM + GD)^2),$$

also ist die Fläche $ABGD$ mittlere Proportionale zwischen $BL\,(AL + AD)$ und $BM\,(GM + GD)$. Und weil $BH = \frac{AB + AD}{2}$ und $BT = \frac{BG + GD}{2}$ nach dem was vorausgegangen ist, so ist $BH^3) + BT = \frac{AB + AD + BG + GD}{2}$ d. h. gleich der halben Summe der vier Seiten des Vierecks $ABGD$; ferner ist die Differenz $(BH + BT) - AB = BM$, weil wir $TM = AH$ gemacht haben; weiter ist $(BH + BT) - BG = BL$, weil wir $HL = GT$ gemacht haben. Es ist aber $AH + AD + GD + GT$ auch gleich der halben Summe der Seiten des Vierecks $ABGD$, nach dem was wir früher bewiesen haben, also ist ihr Überschuß über $AD = GM + GD$[4]); ebenso ist ihr Überschuß über $GD = AL + AD$[5]). Also sind die Linien BL, $AL + AD$, $GM + GD$, BM die Überschüsse der halben Seitensumme des Vierecks $ABGD$ über jede einzelne seiner Seiten; es wurde aber eben gezeigt, daß die Fläche $ABGD$ das geometrische Mittel zwischen $BL\,(AL + AD)$ und $BM\,(GM + GD)$ sei, also ist das Produkt $BL\,(AL + AD) \cdot BM\,(GM + GD)$ gleich dem Quadrat der Fläche des Vierecks $ABGD$, mithin ist die Wurzel aus jenem Produkte das Gesuchte, q. e. d.

9. Die Aufgabe von den beiden Palmen, dem Flusse und den beiden Vögeln, die in den Büchern der Algebra verbreitet ist, von mir.

Wir nehmen BZ und AH der Länge nach gegeben an, sie befinden sich an den beiden Ufern des Flusses, dessen Breite AB sei; es erscheint an der Oberfläche des Wassers ein Fisch, da stürzen sich auf denselben von den Gipfeln der Palmen zwei Vögel und treffen zu derselben Zeit bei ihm zusammen, wie findet man hieraus die Entfernung des Fisches von

1) Es ist nämlich: $BZ^2 - (TM^2 + ZT^2) = BT^2 - TM^2 = (BM + TM)^2 - TM^2 = BM^2 + 2BM \cdot TM = BM\,(BT + TM) = BM\,(GT + GD + TM) = BM\,(GM + GD)$.

2) Diese Proportion habe ich der besseren Übersicht halber hinzugefügt, sie steht nicht im Manuskript. 3) Der Text hat AD.

4) Es ist nämlich: $AH + GD + GT = TM + GD + GT = GM + GD$.

5) Es ist nämlich: $AH + AD + GT = AH + AD + HL = AL + AD$.

den Ufern des Flusses und die Länge des Fluges der beiden Vögel in der Luft? Die Antwort lautet: Wir multiplizieren jede einzelne Palmenlänge mit sich selbst und teilen den Unterschied dieser Quadrate durch die Breite des Flusses, und addieren das Resultat zum Divisor und nehmen die Hälfte der Summe, so ist dies die Entfernung des Fisches vom Fußpunkt der kürzeren Palme; subtrahieren wir aber jenen Quotienten von der Breite des Flusses, so erhalten wir die Entfernung desselben von der höheren Palme; wenn wir die Länge einer Palme mit sich selbst multiplizieren, ebenso die Entfernung ihres Fußpunktes von der Stelle des Fisches mit sich selbst, und die Wurzel aus der Summe dieser Quadrate ziehen, so haben wir die Länge des Fluges jedes Vogels. Beweis: Es seien [Fig 41] AH und BZ die Längen der beiden Palmen, AH die kürzere, und es sei E die Stelle des Fisches auf dem Wasser, wir ziehen EH und EZ, so müssen diese gleich sein, weil die beiden Vögel sie in gleicher Zeit durchfliegen, deshalb ist auch die Summe der Quadrate von BZ und BE gleich der Summe der Quadrate von AE und AH, also ist auch $BZ^2 - AH^2 = AE^2 - BE^2$.[1]) Hierauf zeichnen wir das Dreieck ADB, indem wir $AD = BZ$ und $BD = AH$ machen, und ziehen DE, so behaupte ich, daß es senkrecht auf AB stehe. Beweis hierzu: Wir zeigen, daß es nicht anders sein kann. Angenommen, es stehe nicht senkrecht auf AB, so ziehen wir die Senkrechte DT auf AB, dann ist $AD^2 - BD^2 = AT^2 - BT^2$, aber wie wir oben gezeigt haben, ist $AD^2 - BD^2 = BZ^2 - AH^2 = AE^2 - BE^2$, daher wäre $AT^2 - BT^2 = AE^2 - BE^2$[2]), also wäre sowohl DT als DE senkrecht auf AB, mithin hätte das Dreieck DTE zwei rechte Winkel neben dem Winkel EDT, dies ist ein Widerspruch, also ist DE senkrecht auf AB, nicht DT. Hierauf beschreiben wir um das Dreieck ADB einen Kreis und machen Bogen DBG = Bogen AD, dann ist ABG eine gebrochene Linie im Kreise, und die Senkrechte DE auf AB halbiert sie im Punkte E, und es ist $AD^2 - BD^2 = AB \cdot BG$; teilen wir also $AD^2 - BD^2$ oder $BZ^2 - AH^2$ durch AB, so erhalten wir BG, addieren wir dieses zu AB, so haben wir die gebrochene Linie ABG und ihre Hälfte ist AE, und dies ist die

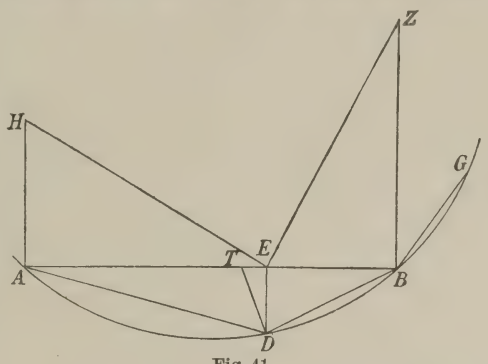


Fig. 41.

1) Hier folgt eine Begründung von diesem, die ich nicht verstanden habe, ich sehe auch nicht ein, wieso eine solche nötig sei.

2) Der letztere Satz fehlt im Manuskript.

Entfernung des Ortes des Fisches von dem Fußpunkt der Palme AH, und wenn wir AE von AB subtrahieren, so bleibt BE, die Entfernung des Fisches vom Fußpunkt der Palme BZ, q. e. d.[1])

10. Die Aufgabe mit dem Holzstab, von mir, sie kommt ebenfalls in den Büchern der Algebra vor.

Die Frage ist folgende: Es ist ein Holzstab von bekannter Länge gegeben, befestigt im Boden und senkrecht auf demselben stehend; er wird gebrochen und neigt sich so, daß die Spitze den Boden erreicht, und man kennt die Entfernung der Spitze auf dem Boden vom Fußpunkt des Holzstabes, wie erhält man die Stelle des Bruches (d. h. ihre Höhe über dem Boden). Ich sage: Man multipliziere die Hälfte der Entfernung der Spitze auf dem Boden von dem Fußpunkt des Holzstabes mit sich selbst und teile das Produkt durch die Hälfte der Länge des Holzstabes, subtrahiere das Ergebnis von der Hälfte der Länge des Holzstabes, so hat man die Länge des Stückes, das noch aufrecht steht; addiert man es aber zur Hälfte der Länge des Holzstabes, so hat man die Länge des abgebrochenen und geneigten Stückes. Es sei [Fig. 42] der Holzstab KG[2]), senkrecht auf dem Boden AG, er sei gebrochen im Punkte B, aber nicht ein Teil vom andern getrennt, so daß die Spitze im Punkte A den Boden erreicht, so sollen wir die Größe von BG bestimmen. Wir beschreiben um das rechtwinklige Dreieck (ABG) einen Kreis, und halbieren den Bogen ABG im Punkte D, ziehen DE senkrecht auf AB und DT senkrecht auf AG. Da nun DT vom Mittelpunkt des Bogens (ABG) ausgeht und senkrecht auf seiner Sehne steht, so halbiert sie die Sehne und ist ein Teil des Durchmessers[3]), deshalb ist der Punkt H, in dem sich zwei Durchmesser schneiden, der Mittelpunkt des Kreises, und Dreieck DEH ist ähnlich Dreieck AHT, und $DH = AH$, also sind sie auch kongruent[4]), mithin ist auch $DE = AT$, ferner hat man die Proportion: $AE : DE = DE : EB$, aber AE ist die Hälfte der Länge des Holzstabes[5]), und $DE = AT$, also ist EB, das Gesuchte, bekannt[6]); addieren wir es

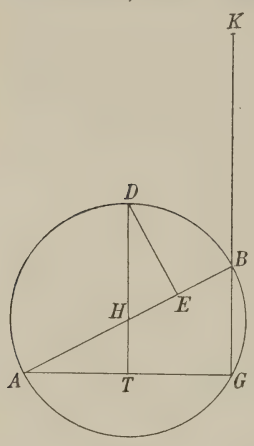


Fig. 42.

1) Siehe Kommentar. 2) Der Text hat KD.

3) Eine Interlinearnote in anderer Schrift verweist auf EUKLIDES III, 1.

4) Dieser Satz fehlt im Text. 5) Denn $AE = \frac{AB + BG}{2}$.

6) $EB = \frac{DE^2}{AE} = \frac{AT^2}{AE} = \frac{AT^2}{\frac{1}{2}KG}$, wie es im Anfang der Aufgabe ausgedrückt ist in Worten.

zu AE, so erhalten wir AB, das was vom Holzstab gebrochen ist; subtrahieren wir es von AE, d. h. von $EB + BG$, so erhalten wir BG, das noch auf dem Boden senkrecht stehende Stück, q. e. d.[1])

11. Die Auflösung (Auffindung) der Gleichung und ihre Zerteilung (oder Verteilung[2]) für die Hälfte des exzentrischen Kreises, von mir aus meinem Buche, das über diesen Gegenstand handelt.

Es sei [Fig. 43] der Kreis TZ der exzentrische Kreis um den Mittelpunkt D, und es sei B der Mittelpunkt des zur Ekliptik konzentrischen Kreises (des Pareklipticus), und der Durchmesser, der durch beide Mittelpunkte geht, sei $TDBZ$; ferner sei T das Apogeum des exzentrischen Kreises, und Z sein Perigeum. Wir nehmen die Sonne im Punkte A an, so ist AT der Teil[3]) (das Argument); wir ziehen AH senkrecht auf den Durchmesser, so ist es der Sinus des Arguments, und HD der Sinus seiner Ergänzung (sein Cosinus), wir ziehen noch AD und AB. Nun ist bekannt, daß Winkel TDA die mittlere Anomalie mißt, und daß Winkel TBA die wahre (eigentl. korrigierte) Anomalie mißt. Weil nun Winkel TDA der Außenwinkel des Dreiecks ADB ist, ist er gleich Winkel DBA + Winkel DAB, also ist Winkel DAB der Unterschied zwischen Winkel TDA und Winkel DBA; aber der Unterschied zwischen der mittlern und der wahren Anomalie ist die Gleichung, also mißt Winkel DAB die Gleichung der Anomalie TBA und wir wollen ihn bestimmen. Wir fällen DE senkrecht auf AB und beschreiben um das Dreieck ADB einen Kreis und ziehen BG, und beschränken uns auf diesen Fall von den verschiedenen Fällen der Gleichung[4]), denn die übrigen werden auf analoge Weise behandelt[5]). Wir sagen: Es ist bewiesen, daß $AB^2 = AD^2 + DB^2 + 2\,DB \cdot DH$, weil Winkel ADB ein stumpfer ist; wenn wir also den doppelten Cosinus des Argumentes, also $2\,DH$, mit DB[6]), das

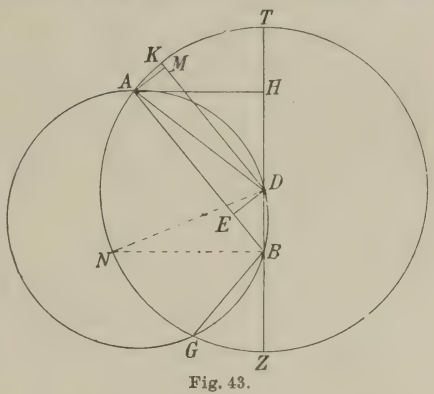


Fig. 43.

1) Siehe Kommentar. 2) Siehe Kommentar.

3) Der Teil der Sonnenbahn vom Apogeum an, auch die Anomalie (mittlere) genannt.

4) d. h. auf diesen Wert der Gleichung in den verschiedenen Stellungen der Sonne.

5) Wörtlich: „werden an ihm (oder durch ihn) gemessen."

6) Der Text hat fehlerhaft „mit dem doppelten DB".

gleich dem Sinus der größten Gleichung ist[1]), multiplizieren, und das Produkt zu der Summe von AD^2, dem Quadrat des Sinus totus (Radius) und DB^2, dem Quadrat des Sinus der größten Gleichung, addieren, so erhalten wir AB^2, und ziehen wir die Wurzel hieraus, so haben wir AB. Und weil nun die Linie ABG eine gebrochene ist im Bogen ABG, und von der Senkrechten DE halbiert wird, ist $AD^2 = DB^2 + AB \cdot BG$; subtrahieren wir also DB^2, das Quadrat des Sinus der größten Gleichung von AD^2, dem Quadrat des Sinus totus, so bleibt $AB \cdot BG$, und teilen wir dieses durch AB, so erhalten wir BG, addieren wir dieses zu AB und nehmen die Hälfte der Summe, so haben wir AE, subtrahieren wir aber BG von AB, so erhalten wir $2BE$; teilen wir dieses durch zwei und subtrahieren sein Quadrat (das Quadrat der Hälfte) von DB^2, so bleibt DE^2, und DE ist die Sehne des Winkels der Gleichung im Kreise mit dem Durchmesser AD; wenn wir aber DK parallel AB ziehen und AM senkrecht DK, so ist Fläche $AEDM$ ein Rechteck, und AM, das gleich sin ADK ist, ist gleich DE, aber Winkel ADK = Winkel DAB als Wechselwinkel, also ist DE auch der Sinus der Gleichung im exzentrischen Kreis für das Argument AT, und AE ihr Cosinus, q. e. d.[2])

12. Berechnung[3]) des verfinsterten Segmentes des einen der beiden leuchtenden Körper (Sonne und Mond) von mir, aus meinem Buche „über die nützlichen Fragen und die richtigen Antworten zu den Begründungen der Tafeln des KHWĀRIZMĪ".

Es sei [Fig. 44] der Kreis $DTZL$ der verfinsternde (Körper) um den Mittelpunkt A, und der Kreis $DKZH$ der verfinsterte um den Mittelpunkt B; aus den Tafeln kennt man die Durchmesser der beiden Kreise in dem Maße der größten Kreise, d. h. in demjenigen, in welchem der größte Kreis auf der Kugel 360 Teile hat[4]), und wir wollen nun die Fläche des Stückes (Doppelsegmentes) $DKZL$ kennen, welches vom Kreise

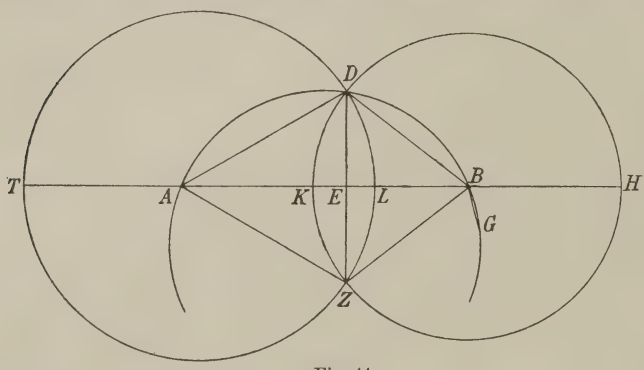


Fig. 44.

1) Dies ergibt sich aus dem punktierten Dreieck DNB, das in der Figur des Textes nicht gezeichnet ist.

2) Siehe Kommentar. 3) Wörtlich „Kenntnis".

4) d. h. einfach: Man kennt die Durchmesser der beiden Kreise in Graden, Minuten usw.

$DKZH$ durch den Kreis $DTZL$ verfinstert wird, in dem Maße, in welchem der ganze Kreis $DKZH$[1]) 12 (Teile) zählt. Wir ziehen DZ, BD, BZ, AD, AZ und die Linie $TABH$, die durch beide Mittelpunkte geht; diese (Linien) alle sind Bogen, wir können sie aber als gerade Linien annehmen wegen der Kleinheit ihres Maßes im Verhältnis zum Umfang des Kreises, von dem $TABH$ ein Bogen ist. Wir beschreiben nun um das Dreieck ADB einen Kreis und machen in demselben Bogen DBG = Bogen AD und ziehen BG; weil nun ABG eine gebrochene Linie im Bogen $ADBG$ ist, so ist, wenn wir von der Mitte D des Bogens die Senkrechte DE auf sie fällen: $AD^2 - BD^2 = AB \cdot BG$, teilen wir dieses durch AB, das gleich der Breite des Mondes bei der Mondfinsternis, und gleich dem *Muḥkam*[2]) bei der Sonnenfinsternis ist, so erhalten wir BG, addieren wir dieses zu AB und teilen die Summe durch zwei, so haben wir AE, also sind nun AE und EB bekannt[3]); wir wissen ferner, daß EL[4]) $\cdot ET = DE^2$; aber DE ergibt sich in dem Maße, in dem die Durchmesser der beiden Kreise gegeben sind, wir haben aber keine Sinus nach diesem Maße berechnet, so daß wir aus DE (direkt) den Bogen DL finden könnten, deshalb müssen wir dieses DE umwandeln in das Maß, in dem BD[5]) der Sinus totus ist; wir multiplizieren es also mit dem Sinus totus (also mit 60^p) und teilen das Produkt durch AL[6]), so ergibt sich DE in dem verlangten Maße; wir suchen zu ihm den Bogen in den Sinustafeln, so haben wir den Bogen DL in dem Maße, in welchem der Umfang des verfinsternden Kreises ($DTZL$) 360 Teile hat; da wir nun das Verhältnis des Bogens DL zum Umfang des verfinsternden Kreises kennen, so müssen wir auch seine Größe kennen in dem ersten Maße, in dem wir zuerst den Durchmesser des verfinsternden Kreises angegeben haben; weil nun aber das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang gleich ist dem Verhältnis $1 : 3\frac{1}{7}$, so multiplizieren wir TL mit $3\frac{1}{7}$, und erhalten so den Umfang des Kreises $TZLD$, und das Verhältnis von DL in diesem Maße (dem gesuchten) zum Umfang des Kreises $TZLD$ in diesem Maße ist gleich dem Verhältnis von DL in dem Maße, in dem der Umfang des ganzen Kreises = 360 ist, zum ganzen Umfang (also zu 360). Und wenn wir nun das Gesuchte, d. h. DL, gefunden haben, so multiplizieren wir es mit AL, so haben wir die Fläche des Sektors $ADLZ$,

1) d. h. sein Durchmesser.

2) Dieser Ausdruck bedeutet wörtlich: festgesetzt, genau bestimmt; wir können ihn durch keinen technischen Ausdruck wiedergeben, es ist natürlich die Entfernung der Mittelpunkte von Sonne und Mond.

3) Hier dürfte bemerkt sein, daß dann auch EL und ET bekannt sind.

4) Im Manuskript steht AE. 5) Soll wohl heißen AD.

6) Im Manuskript ist dieses Verfahren verkehrt angegeben: $\frac{DE \cdot AL}{60}$.

und wenn wir AE mit DE multiplizieren, so erhalten wir die Fläche des Dreiecks ADZ, und der Unterschied dieser beiden Flächen ist die Fläche des Segmentes $DLZE$. Hierauf wenden wir das gleiche Verfahren an auf den Bogen DK und den Sektor $DKZB$ und das Dreieck DBZ, wodurch wir die Fläche des Segmentes $DKZE$ erhalten, die Summe beider Segmente ist die Fläche des verfinsterten Stückes, nur ist sie in dem Maße gefunden, in dem HK, der Durchmesser des verfinsterten Kreises gegeben war, d. h. die erste Zahl, die wir aus den Tafeln erhalten haben; es ist also nötig, daß wir sie umwandeln in das Maß, in welchem der ganze verfinsterte Kreis (d. h. sein Durchmesser) = 12 ist. Weil nun das Verhältnis eines Teiles des einen Kreises zu dem ihm ähnlichen Teil des andern Kreises gleich ist dem Verhältnis der ganzen Kreise zueinander, und zwei Kreise sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, so ist das Verhältnis des verfinsterten Stückes in dem Maße, in dem wir es erhalten haben, zu seiner Fläche in dem Maße, in dem der Durchmesser des verfinsterten Kreises = 12 ist[1]), gleich dem Verhältnis des Quadrates des Durchmessers des verfinsterten Kreises, wie wir ihn aus den Tafeln erhalten haben, zu 144; hieraus wird die Fläche des verfinsterten Stückes gefunden in dem Maße, in dem wir sie verlangt haben, q. e. d. Gott weiß besser das Richtige![2])

13. Beweis zum Verfahren des MUḤ. B. EL-ṢABBĀḤ[3]) bei der Beobachtung der Sonne.

Es sei [Fig. 45] der Kreis ABG der Kreis der Morgenweite[4]), in ihm seien parallele Sehnen LD, KT, AB gezogen, die bekannt sind, denn sie sind die doppelten Sinus der Morgenweiten der Sonne am Ende gleicher Bogenlängen gezogen, gesucht ist der Durchmesser des Kreises. Man ziehe AD, so ist dieses gleich der Sehne KT, weil Bogen LD mit den beiden gleichen LK und DT zusammen gleich ist Bogen LD mit den beiden gleichen LK und KA zusammen; wir machen noch Bogen DG = AD und ziehen BG[5]), so ist es gleich LD; weil nun AD^2 gleich ist

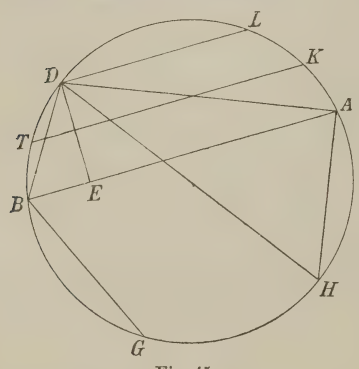


Fig. 45.

1) Im Text fehlt das Wort „Durchmesser“ wieder.
2) Siehe Kommentar.
3) Vgl. H. SUTER, l. c. p. 19, nr. 40.
4) *Sa'at el-mashrik* = *Amplitudo ortiva*; dieser Kreis ist doch wohl der Horizont.
5) Im Text steht nur G.

$DB^2 + AB \cdot BG$, so ist Sehne DB bekannt; wir ziehen DE senkrecht auf AB, so ist DE bekannt, denn DB ist bekannt und $EB = \frac{AB - LD}{2}$[1]); wir ziehen den Durchmesser DH und AH; nun ist Dreieck DBE ähnlich Dreieck DAH, also besteht die Proportion $DB : DE = DH : AD$, also ist der Durchmesser DH auch bekannt, er ist der doppelte Sinus[2]) der ganzen Morgenweite gemäß seiner Stellung (Lage), q. e. d.

14. Aufgabe, die notwendig ist für die Kenntnis der Entfernungen, von mir aus meinem Buche „über die Hinweisung der himmlischen Erscheinungen auf die irdischen."[3])

Die Dreiecke ZAB und ZDB [Fig. 46] sind rechtwinklig in bezug auf die beiden Winkel A und D, und sie stehen beide über derselben Basis BZ[4]), man ziehe TH senkrecht auf BZ, T sei der Schnittpunkt der Sehnen DZ und AB. Wie kann man TH bestimmen, aus den bekannten Seiten der beiden Dreiecke? Wir ziehen AD, so ist es bekannt aus dem Kreisviereck $ADBZ$, weil BZ die Basis der beiden rechtwinkligen Dreiecke und also der Durchmesser des Kreises ist, denn es ist: $AB \cdot DZ = AZ \cdot DB + AD \cdot BZ$.

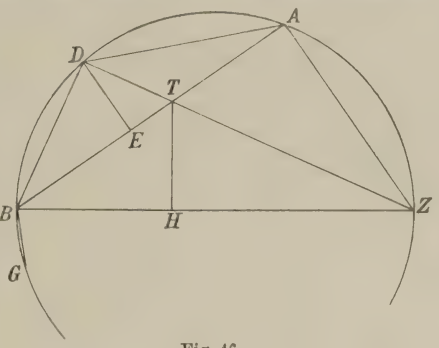


Fig. 46.

Hierauf beschreiben wir um das Dreieck ADB einen Kreis[5]) und machen Bogen DBG = Bogen AD und ziehen DE senkrecht auf AB; nun ist die Linie ABG eine gebrochene im Bogen ABG und die Höhe DE teilt sie in zwei Hälften, deshalb ist $AD^2 = AB \cdot BG + BD^2$; AD, AB und BD sind bekannt, also auch BG, mithin auch AE und BE[6]), und weil Winkel BDT ein rechter und DE senkrecht auf BT, ist $BE \cdot ET = DE^2$; teilen wir also DE^2 durch BE, so haben wir ET, also kennen wir auch BT; nun ist $BT : TH = BZ : AZ$ (weil Dreieck ABZ ähnlich Dreieck BTH ist), hieraus findet man TH, q. e. d.

---

1) Im Text heißt es: Hälfte AB, LD, d. i. nach arab. Ausdrucksweise $\frac{AB + LD}{2}$.

2) Im Text steht nur „Sinus".

3) Dieses Buch findet sich im Verzeichnis seiner Schriften, das er selbst verfaßt hat (*Chronologie orientalischer Völker,* herausgegeben von E. Sachau, Leipzig, 1878, p. XXXXIII).

4) Was dieses BZ bedeute, wird nicht gesagt.

5) Es hätte natürlich vorher gesagt werden sollen, daß man über BZ als Durchmesser einen Kreis beschreiben müsse.

6) Hier fehlt: also auch DE (bekannt).

15. Kenntnis des Bogens der Rückkehr der Planeten, aus meinem Buche „über die Entkräftigung der Verläumdung durch Beibringung von Beweisen zu den Operationen EL-KHWARIZMIS.“[1])

Es sei [Fig. 47] der Kreis SOD der Epizykel des Planeten um den Mittelpunkt B, und A sei der Mittelpunkt des Weltalls, und das Verhältnis der Hälfte von OD, also DT, zu AD sei gleich dem Verhältnis der Bewegung in der Länge zur Bewegung der Anomalie (vom Apogeum des Epizykels aus)[2]), dann ist der Punkt D der Ort des Stillstandes (des Planeten)[3]) und KD die Hälfte des Bogens der Rückkehr. Nachdem nun PTOLEMÄUS[4]) sowohl AD als DT gefunden hatte in Teilen, von denen AB 60 zählt, beschritt er für die Kenntnis des Winkels DBK[5]) den Weg, den er bei allen (ähnlichen) Operationen des *Almagestes* eingeschlagen hatte. Wir (dagegen) zeichnen nun um das Dreieck ADB einen Kreis und schneiden von ihm den Bogen $DG = AD$ ab, und ziehen BG[6]) und DE senkrecht auf AB. Weil nun ABG eine gebrochene Linie im Bogen ADG ist, so ist $AD^2 = BD^2 + AB \cdot BG$; AD ist nun bekannt, BD ebenfalls als Radius des Epizykels, AB ist gleich 60^p, also kann BG gefunden werden, indem wir BD^2 von AD^2 abziehen und den Rest durch AB teilen; wenn wir nun BG zu AB addieren und die Summe durch zwei teilen, haben wir AE, also ist auch EB bekannt, also auch DE in Teilen von AB. Man hat nun die Proportion: DE in Teilen von $AB : BD$ in Teilen von $AB = DE$ in solchen Teilen, in denen BD der Sinus totus ist : BD dem Sinus totus; haben wir nun DE so verwandelt und suchen dazu den Bogen, so ist dies der Bogen DK, der gesuchte, q. e. d.

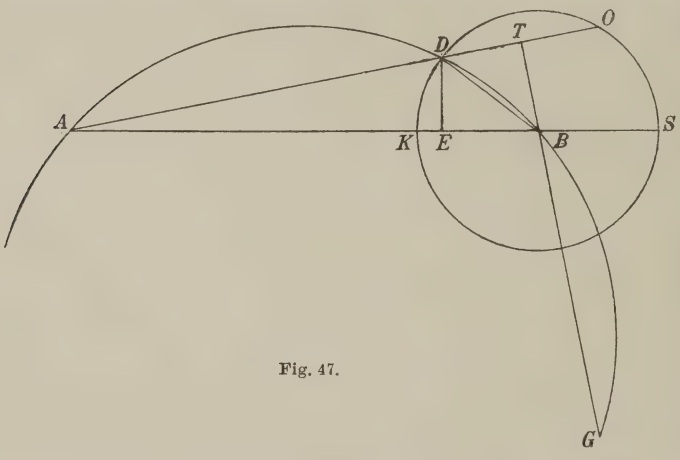


Fig. 47.

1) Es ist dies das zweite der im Verzeichnis seiner Schriften angeführten Werke (s. oben S. 49, Note 3).

2) d. h. mit andern Worten: gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeit des Epizykels zu derjenigen des Planeten. 3) d. h. des Rückkehrpunktes.

4) Siehe Kommentar. 5) Der Text hat DBT.

6) In der Figur des Textes fällt G in den Kreis SOK, was natürlich nicht richtig ist.

Zur Auffindung des gesuchten ist ein leichterer Weg möglich, aber der Grund, daß wir diesen nicht gewählt haben, ist der, daß wir uns dann von den beiden erwähnten Eigenschaften (der gebrochenen Linie) und von der Hervorhebung ihrer mannigfaltigen Anwendungsfähigkeit getrennt hätten.[1])

Anwendung der Eigenschaften der gebrochenen Linie auf die Auffindung der Sehnen in einem Kreise von bekanntem Durchmesser.

Nachdem nun im vorhergehenden das behandelt worden ist, was im Anfang der Abhandlung versprochen wurde, so gehe ich nun an die Vollendung des Begonnenen und sage:

16. Auffindung (wörtlich: Kenntnis) der Sehne der Ergänzung jedes Bogens zum Halbkreis, wenn die Sehne dieses Bogens gegeben ist, von mir.

Wenn die Sehne eines Bogens bekannt ist, so ist auch die Sehne seiner Ergänzung zum Halbkreis bekannt. Z. B. Es sei [Fig. 48] die Sehne BG bekannt, der Durchmesser des Kreises sei AB und auch bekannt, so sage ich, daß auch AG bekannt ist. Zum Beweise dessen halbieren wir den Bogen ABG im Punkte D und ziehen DE senkrecht auf AB, und HT senkrecht auf AG; nach dem was wir in der Aufgabe über den Holzstab bewiesen haben, halbiert die Senkrechte DHT die Sehne AG, da sie vom Mittelpunkt D des Bogens ausgeht, und H der Mittelpunkt des Kreises ist; ferner sind nun die ähnlichen Dreiecke HDE und TAH auch kongruent, also ist $DE = AT$, und weil DE senkrecht auf AB, besteht die Proportion: AE, d. h. $\frac{AB+BG}{2} : DE = DE : EB$ d. h. $\frac{AB-BG}{2}$[2]), also ist DE oder AT, das gleich der Hälfte der gesuchten Sehne ist, bekannt, q. e. d.

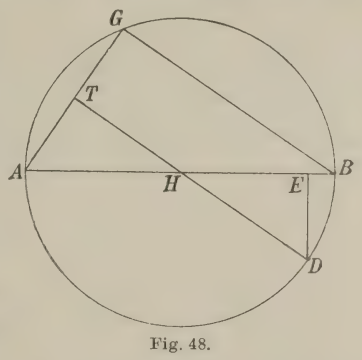


Fig. 48.

Die Berechnung auf diesem Wege ist, trotzdem sie länger ist, leichter, als wenn man das Quadrat der Sehne BG vom Quadrat von AB abzieht, und aus der Differenz die Wurzel zieht, denn hier addieren wir den Durchmesser und die gegebene Sehne und multiplizieren die Hälfte dieser Summe mit dem Unterschied zwischen dem Durchmesser und dieser

1) Wir glauben mit diesen Worten den richtigen Sinn des etwas eigentümlich abgefaßten Zusatzes wiedergegeben zu haben.

2) Im Text heißt es: $AB - \frac{AB+BG}{2}$, ich habe den kürzeren Ausdruck gesetzt

Hälfte, und ziehen die Wurzel aus dem Produkte und verdoppeln sie, so haben wir die Sehne des Ergänzungsbogens des gegebenen.[1])

17. Kenntnis der Sehne des doppelten Bogens aus der des einfachen, von mir.

Wenn die Sehne eines Bogens in einem Kreise von bekanntem Durchmesser gegeben ist, so ist auch die Sehne des doppelten Bogens bekannt. Z. B. Sehne AB [Fig. 49] sei gegeben, und Bogen BG sei gleich AB, so ist AG die gesuchte (Sehne). Wir ziehen die Radien BZE und AE; weil nun $AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2 \cdot BE \cdot BZ$, und weil $AE = BE$, so ist $AB^2 = 2BE \cdot BZ$, also ist BZ bekannt, dies ist aber der Rest von BE und ZE, ZE aber ist die Hälfte der Sehne des Supplementes von AG.[2]) Berechnung: Man multipliziere die bekannte Sehne mit sich selbst, und teile die Hälfte des Resultates durch den Radius des Kreises, subtrahiere das Ergebnis vom Radius, verdoppele den Rest und multipliziere dies mit sich selbst, subtrahiere das Produkt vom Quadrat des Durchmessers und ziehe die Wurzel aus dem Reste, so hat man die Sehne des doppelten Bogens der gegebenen Sehne.[3])

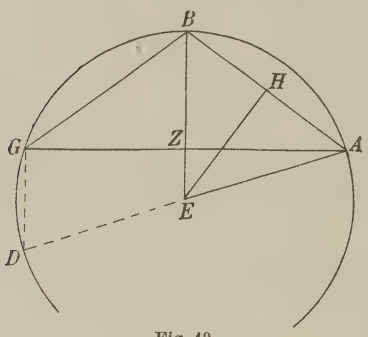


Fig. 49.

Anderer Weg hierfür von mir.

Man ziehe die Höhe EH auf AB, dann ist Winkel BAZ = Winkel BEH, und die Winkel bei H und Z sind rechte, also sind die Dreiecke ABZ und BEH ähnlich, mithin besteht die Proportion: $AB : AZ = BE : EH$, also ist AZ bekannt, mithin auch AG. Berechnung: Wir multiplizieren die gegebene Sehne mit sich selbst und subtrahieren das Quadrat vom Quadrat des Durchmessers, ziehen die Wurzel aus dem Viertel des Restes, multiplizieren diese Wurzel mit der gegebenen Sehne und teilen das Produkt durch den Radius, verdoppeln das Ergebnis, so haben wir die Sehne des doppelten Bogens der gegebenen Sehne.[4])

18. Kenntnis der Sehne des halben Bogens aus der des ganzen, von mir.

Wenn die Sehne eines Bogens in einem Kreise von bekanntem Durchmesser gegeben ist, so ist auch die Sehne des halben Bogens bekannt.

1) Siehe Kommentar.
2) Wie sich aus dem von mir ergänzten Dreieck AGD ergibt.
3) Siehe Kommentar. 4) Siehe Kommentar.

Z. B. AG ist gegeben[1]), und Bogen $AB = BG$, so sage ich, daß auch AB bekannt ist. Wir ziehen die Radien BZE und AE; weil nun $AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2BE \cdot ZE$, und AE und BE bekannt sind, und ebenso ZE als die Hälfte der Sehne der Ergänzung von AG, ist auch AB bekannt. Berechnung: Man multipliziere die gegebene Sehne mit sich selbst, subtrahiere das Quadrat vom Quadrate des Durchmessers, ziehe die Wurzel aus dem Viertel des Restes, multipliziere diese Wurzel mit dem Durchmesser[2]), subtrahiere dieses Produkt von der Hälfte des Quadrates des Durchmessers[3]), und ziehe die Wurzel aus dem Reste, so hat man die Sehne des halben Bogens der gegebenen Sehne.[4])

Anderer Weg hierfür, von mir.

Er besteht darin, das ZE, die Hälfte der Sehne der Ergänzung von AG (zum Halbkreis)[5]), vom Radius BE abgezogen, den Rest BZ ergibt, und daß dann AB bekannt ist, weil $AB^2 = AZ^2 + BZ^2$. Berechnung: Man multipliziere die gegebene Sehne mit sich selbst und subtrahiere das Quadrat vom Quadrat des Durchmessers, ziehe die Wurzel aus dem Reste und subtrahiere sie vom Durchmesser, teile den neuen Rest durch zwei[6]), multipliziere das Ergebnis mit sich selbst und addiere das Produkt zum Quadrat der Hälfte der gegebenen Sehne und ziehe die Wurzel aus der Summe, so hat man die gesuchte Sehne des halben Bogens.

19. Kenntnis der Sehne der halben Summe zweier Bogen, deren Sehnen bekannt sind, von mir.

Sind die Sehnen zweier Bogen bekannt, so ist auch die Sehne der halben Summe der Bogen bekannt. Z. B. Die beiden gegebenen Sehnen seien AB und BG [Fig. 50], Bogen AD sei gleich DG, ich sage, daß die Sehne AD bekannt sei. Beweis: Man ziehe die Höhe DE auf AB (und verlängere sie), und ziehe vom Mittelpunkt H des Kreises die Senkrechten

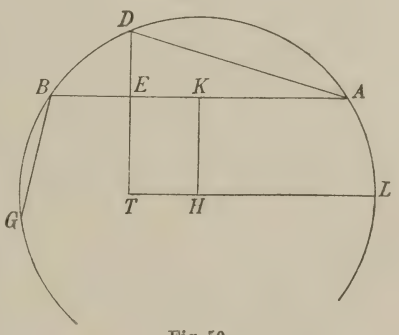


Fig. 50.

1) Siehe die vorhergehende Figur ohne die Höhe EH.

2) Der Text hat „Radius".

3) d. h. von $AE^2 + BE^2$; hier ist übrigens der Text verdorben: statt „subtrahiere" steht „addiere", und statt der „Hälfte des Quadrates des Durchmessers" steht „Quadrat des Durchmessers". 4) Siehe Kommentar.

5) Siehe die vorhergehende Figur ohne die Höhe EH.

6) Der letztere Satz fehlt im Text.

HT und HK, so ist klar, daß HK die Hälfte der Sehne der Ergänzung von AB zum Halbkreis und gleich ET ist, und AE ist $= \frac{AB+BG}{2}$ und $KE = \frac{BG}{2}$[1]), KE ist aber auch gleich der Hälfte der Sehne, die vom Punkte D aus parallel der Sehne AB geht ($= TH$); wir ziehen THL so ist klar, daß das Produkt von LT in den Rest vom Durchmesser $= DT^2$ ist, subtrahiert man TE von DT, so bleibt DE, dies ist also bekannt, ebenso ist AE bekannt, also auch AD. Berechnung: Wir addieren die Hälfte der kleineren Sehne zum Radius und subtrahieren sie auch von ihm und multiplizieren[2]) die beiden Resultate und ziehen aus dem Produkt die Wurzel; hierauf subtrahieren wir das Quadrat der größeren Sehne vom Quadrat des Durchmessers und ziehen aus dem Viertel dieser Differenz die Wurzel, und subtrahieren diese Wurzel von dem Behaltenen (d. h. der ersten Wurzel), hierauf multiplizieren wir den Rest mit sich selbst und addieren hierzu das Quadrat der halben Summe der beiden (gegebenen) Sehnen, ziehen die Wurzel aus der Summe, so ist dies die Sehne der halben Summe der beiden Bogen, deren Sehnen gegeben sind.[3])

20. Kenntnis der Sehne der Ergänzung eines Bogens zum Halbkreis, wenn die Sehne des Bogens bekannt, wenn gegeben ist die Summe des Durchmessers und der Ergänzungssehne, jedes von diesen aber einzeln unbekannt ist, von mir.

Diese Aufgabe führt auf die vorangegangene über den Holzstab zurück. Es sei [Fig. 51] AG die bekannte Sehne, und die Summe der Ergänzungssehne BG und des Durchmessers AB sei bekannt, aber jede einzelne dieser Größen unbekannt. Wir halbieren den Bogen ABG im Punkte D und fällen von hier aus die Senkrechten DE auf AB und DHT auf AG; in dem was vorangegangen wurde bewiesen, daß H der Mittelpunkt des Kreises ist, und daß $AT = DE$ (wegen der Kongruenz der Dreiecke DEH und ATH); nun besteht die Proportion: AE d. i. $\frac{AB+BG}{2} : DE = DE : BE$, (da nun $DE = AT$, also bekannt, so ist auch BE bekannt), addieren wir dieses zu AE, so erhalten wir den Durch-

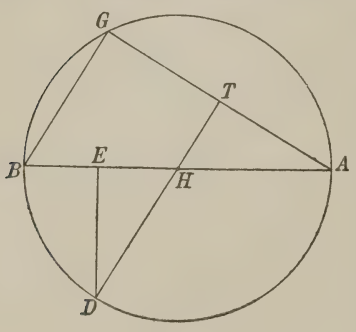


Fig. 51.

1) $KE = AE - AK = AE - \frac{AB}{2} = \frac{BG}{2}$.

2) Der Text hat „subtrahieren“. 3) Siehe Kommentar.

messer, und subtrahieren wir es von AE, so erhalten wir BG, die gesuchte Sehne. Berechnung: Multipliziere die Hälfte der bekannten Sehne mit sich selbst und teile das Produkt durch die bekannte halbe Summe aus Durchmesser und Ergänzungssehne, was sich ergibt, addiere zu dem vorigen Divisor, so hast du den Durchmesser, subtrahierst du es von dem Divisor, so hast du die Sehne des Ergänzungsbogens.[1])

21. Kenntnis der Sehne eines Bogens und der Sehne seiner Ergänzung, wenn bekannt ist der Durchmesser des Kreises und die Summe der beiden Sehnen, dagegen ihre Differenz unbekannt, von mir.

Es sei [Fig. 52] der Durchmesser AG gegeben und die Summe der beiden Sehnen AB und BG ebenfalls, wir sollen jede einzelne dieser Sehnen suchen. Wir halbieren den Bogen ABG im Punkte D und ziehen DE senkrecht auf AB. Weil nun ABG in zwei gleiche Teile geteilt ist im Punkte E und in zwei ungleiche im Punkte B, so ist $AB^2 + BG^2 = 2AE^2 + 2EB^2$[2]); aber $AG^2 = AB^2 + BG^2$; wenn wir also von AG^2 seine Hälfte wegnehmen, so ist der Rest $= AE^2 + EB^2$; nun ist AE^2 bekannt, weil $AE = \frac{AB+BG}{2}$; wenn wir es also von jenem Rest subtrahieren, so bleibt EB^2, also ist dann auch EB bekannt, wenn wir dieses zu AE addieren, haben wir AB, subtrahieren wir es von AE, so haben wir BG, was wir wollten. Berechnung: Wir multiplizieren die Hälfte der Summe der beiden Sehnen mit sich selbst, und subtrahieren das Produkt von der Hälfte des Quadrates des Durchmessers und ziehen die Wurzel aus dem Reste; wenn wir diese Wurzel zur halben Summe der beiden Sehnen addieren, so haben wir die längere Sehne, subtrahieren wir sie von dieser halben Summe, so haben wir die kürzere Sehne.[3])

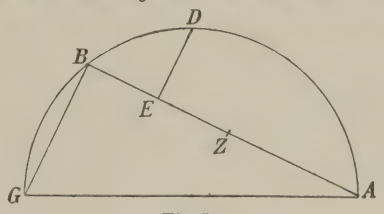


Fig. 52.

Anderer Weg hierfür, von mir.

Man schneide (siehe Fig. 52) von AE das Stück $EZ = EB$ ab, so bleibt $AZ = BG$, also ist BZ im Punkte E halbiert; wenn AZ dazu addiert wird, so ist die Summe der Quadrate von AB und AZ, also $AG^2 = 2EB^2 + 2AE^2$; wenn wir also von AG^2 $2AE^2$ subtrahieren,

---

1) Daß diese Aufgabe einen praktischen Wert habe für die Berechnung der Sehnen im Kreise, kann man wohl nicht behaupten; EL-BĪRŪNĪ wollte wohl nur zeigen, wie leicht sie mit Hilfe der Eigenschaften der gebrochenen Linie zu lösen sei.

2) Nach EUKLIDES II, 9. 3) Siehe Kommentar.

welches bekannt ist, so bleibt $2EB^2$, also ist auch EB bekannt; addieren wir es zu AE, so erhalten wir AB, subtrahieren wir es von AE, so bleibt $AZ = BG$. Die Berechnung ist im übrigen dieselbe wie vorher.

22. Kenntnis der Sehne der Differenz zweier Bogen, deren Sehnen gegeben sind, aus der Sehne ihrer Summe, und Kenntnis der Sehne ihrer Summe aus der Sehne der Differenz, von ABŪ NAṢR B. ʿIRĀḳ.

Er sagt: Es seien [Fig. 53] die Sehnen AD und BD gegeben und man mache Sehne $DG = AD$ und ziehe BG, AB, so ist Sehne BG die Sehne der Differenz der beiden Bogen AD und DB, und AB die Sehne ihrer Summe. Wenn nun BG, die Sehne der Differenz bekannt ist, so wollen wir AB berechnen, die Sehne der Summe. Es ist bekannt, daß $AD^2 = AB \cdot BG + BD^2$; wenn wir also BD^2 von AD^2 abziehen, so bleibt $AB \cdot BG$, es ist aber BG gegeben, also ist auch AB bekannt, was wir wollten. Berechnung: Jede der beiden gegebenen Sehnen wird quadriert, der Unterschied dieser Quadrate genommen und durch die Sehne des Unterschiedes der beiden Bogen dividiert, so hat man die Sehne der Summe derselben. — Wenn aber AB bekannt ist und man soll BG finden, so wird analog wie vorhin verfahren, weil wieder $AD^2 = AB \cdot BG + BD^2$, nur ist jetzt AB bekannt und BG gesucht. Berechnung: Jede der beiden gegebenen Sehnen wird quadriert, die Differenz der Quadrate durch die Sehne der Summe der Bogen geteilt, so hat man die Sehne der Differenz derselben.[1])

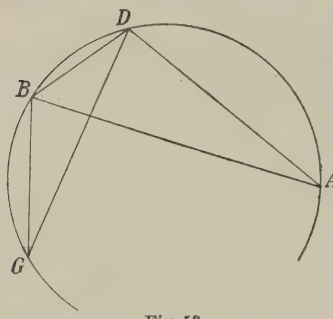


Fig. 53.

23. Kenntnis der Sehne der Summe und der Sehne der Differenz (zweier Bogen), die eine aus der andern, von mir.

Es seien [Fig. 54] die beiden Sehnen AD und BD gegeben und die Sehne AB der Summe ihrer Bogen; wir wollen die Sehne BG der Differenz ihrer Bogen kennen.[2]) Man ziehe DE senkrecht auf AB; weil nun $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BE$, so ist $\frac{AB^2 - (AD^2 - BD^2)}{2AB}$ [3]) $= BE$, d. h. gleich der Hälfte des Unterschiedes der Sehne der Summe und der

1) Siehe Kommentar.

2) Es ist dies also dieselbe Aufgabe wie die vorige, der Titel hätte also etwas kürzer gefaßt werden können.

3) Der Text hat unrichtig: $\frac{AD^2 - BD^2}{2AB}$.

Sehne der Differenz. Berechnung: Multipliziere jede der gegebenen Sehnen mit sich selbst, subtrahiere das kleinere Quadrat vom größeren und den Rest vom Quadrate der Sehne der Summe der beiden Bogen[1]) und dividiere die Hälfte des Resultats durch die Sehne der Summe, das Doppelte des Quotienten subtrahiere von der Sehne der Summe, so bleibt die Sehne der Differenz. — Und wenn die Sehne der Differenz gegeben ist und wir wollen die Sehne der Summe finden, so machen wir $EZ = BE$ und ziehen DZ. Dann ist $DZ = DB$ und

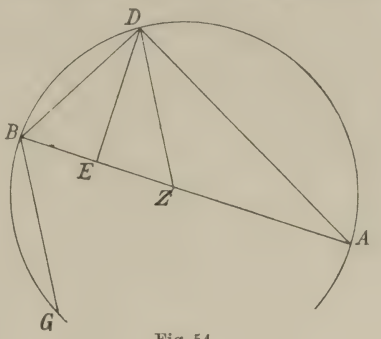


Fig. 54.

$$AD^2 = DZ^2 + AZ^2 + AZ \cdot BZ\,(= 2AZ \cdot EZ);$$

aber $AZ = BG$, also ist BZ bekannt. Berechnung: Multipliziere die kleinere Sehne und die Sehne der Differenz jede mit sich selbst, addiere die beiden Quadrate und subtrahiere die Summe vom Quadrate der größeren Sehne, und teile den Rest durch die Sehne der Differenz, und das Resultat addiere zu der Sehne der Differenz, so hast du die Sehne der Summe.[2])

24. Kenntnis der Sehne der Summe und der Differenz (zweier Bogen), jede der beiden für sich, ohne daß die eine der andern bedarf, von mir.

Es seien [Fig. 55] die Sehnen AB und BG bekannt, wir ziehen DZ parallel AB, so ist es gleich BG[3]), wir ziehen DE senkrecht auf AB. Wenn wir nun die Sehne der Differenz kennen wollen, so ziehen wir vom Mittelpunkt H des Kreises die Senkrechte HTK auf DZ; es ist nun bekannt, daß der Unterschied der beiden Bogen AB und BG $(= DZ)$ gleich der Summe der beiden Bogen AZ und BD ist, und weil HK die Hälfte der Sehne der Ergänzung von DZ oder BG, also bekannt ist, und HT die Hälfte der Sehne der Ergänzung von AB, also auch bekannt ist, so ist der Unterschied beider, d. h. KT, auch bekannt, also auch DE,

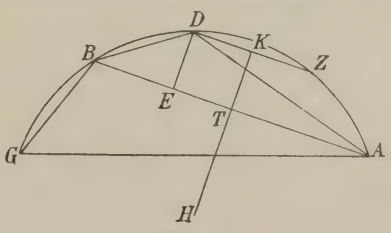


Fig. 55.

1) Dieser letztere Satz fehlt entsprechend dem eben genannten Fehler im Text.

2) Siehe Kommentar.

3) D ist natürlich die Mitte des Bogens ABG, was zu erwähnen vergessen wurde.

das gleich KT ist; ferner ist EB der Unterschied der größeren Sehne (AB) und der halben Summe der beiden Sehnen $\left(\frac{AB+BG}{2}=AE\right)$[1]), also ist auch DB bekannt, das beide potenziert, mithin auch die Sehne des doppelten Bogens von BD (d. h. des Bogens $AB-BG$). Berechnung: Wir ziehen vom Quadrat des Durchmessers die Quadrate der beiden gegebenen Sehnen einzeln ab, ziehen aus dem Viertel jeder Differenz die Wurzel, und multiplizieren den Unterschied beider Wurzeln mit sich selbst und addieren das Ergebnis zum Quadrat des halben Unterschiedes der beiden Sehnen[2]), und teilen die Summe durch den Durchmesser und ziehen das Ergebnis vom Radius[3]) ab, verdoppeln den Rest[4]), erheben ihn ins Quadrat, subtrahieren dieses Quadrat vom Quadrate des Durchmessers und ziehen aus dem Reste die Wurzel, so ist dies die Sehne der Differenz. — Was die Kenntnis der Sehne der Summe anbetrifft, d. h. von AG, so ist, wenn DE bekannt ist, auch AD bekannt, weil sein Quadrat gleich DE^2+AE^2, und $AE=\frac{AB+BG}{2}$, und wenn nun AD bekannt ist, so ist AG die Sehne des doppelten Bogens von AD, also auch bekannt. Berechnung: Sie ist dieselbe wie die vorangegangene für die Sehne der Differenz bis zu dem Punkte, wo wir die Differenz der beiden Wurzeln erhalten und diese ins Quadrat erhoben haben; zu diesem Quadrate addieren wir nun das Quadrat der halben Summe der beiden Sehnen und teilen die Summe durch den Durchmesser, subtrahieren den Quotienten vom Radius, verdoppeln den Rest[5]), multiplizieren dieses mit sich selbst und subtrahieren das Ergebnis vom Quadrat des Durchmessers und ziehen die Wurzel aus dem Reste, so ist diese die Sehne der Summe der beiden Bogen.[6])

25. Kenntnis der Sehne der Differenz und der Sehne der Summe, jede für sich, von ABŪ NAṢR B. ʿIRĀḳ, aus seinem Buche genannt „der königliche Almagest".

Er sagt: Von zwei Bogen seien die Sehnen bekannt, so ist auch die Sehne der Differenz der Bogen bekannt, sowie die Sehne ihrer Summe. Z. B.: die Sehnen [Fig. 56] AD und BD im Kreise $ADBG$ seien gegeben, so sage ich, daß die Sehne der Differenz sowie die Sehne der

---

1) Einfacher wäre gewesen: $EB=\frac{AB-BG}{2}$.

2) Der Text hat wieder: Unterschied der größeren und der halben Summe der beiden Sehnen.

3) Der Text hat „Durchmesser". 4) Dies fehlt im Text.

5) Im Text folgt noch „und verdoppeln den Durchmesser", was unrichtig ist.

6) Siehe Kommentar.

Summe ihrer Bogen bekannt sei. Beweis: Wir machen Bogen $DG = AD$ und verlängern BG über B hinaus und ziehen DZ senkrecht darauf; weil nun BD bekannt ist und die Proportion besteht: $BD : BZ = 2r$: der Ergänzungssehne von AD (denn Dreieck DBZ ist, wie leicht einzusehen, ähnlich dem Dreieck gebildet aus dem Durchmesser, der Sehne AD und ihrer Ergänzungssehne)[1]), ist BZ bekannt, also auch das Verhältnis des Durchmessers zu BZ; aber auch das Verhältnis $GD^2 : BD^2$ ist bekannt, also auch $GD^2 : GD^2 - BD^2$; aber $GD^2 - BD^2 = GZ^2 - BZ^2$, also ist das Verhältnis von GD^2 zu jeder der Größen GZ^2 und BZ^2 bekannt. Aber das Verhältnis des Durchmessers zu BZ wurde schon als bekannt erklärt, also ist auch das Verhältnis des Durchmessers zu jeder einzelnen der Linien GZ und BZ bekannt[2]), also auch BG bekannt. Man ziehe auch AB und senkrecht darauf DE; weil nun $AD : AE = 2r$: der Ergänzungssehne von BD, so ist das Verhältnis $AD : AE$ bekannt, aber man hat auch $BD : BZ = 2r$: der Ergänzungssehne von AD, also ist auch das Verhältnis $BD : BE$ ($BZ = BE$) bekannt, (also ist sowohl AE als BE bekannt), also auch das Verhältnis des Durchmessers zu jeder der Linien AE und BE, also auch sein Verhältnis zu ihrer Summe. Ferner, weil $AD = GD$, und Winkel A = Winkel G, und Winkel Z = Winkel E, ist $AE = GZ$, und weil BD gemeinschaftlich den beiden Dreiecken DBZ und DBE und Winkel DBZ = Winkel DBE, ist $BE = BZ$; nun haben wir (früher) bewiesen, daß $AE - BE = BG$, also ist BG bekannt, q. e. d. — Berechnung für die Sehne der Differenz: Man multipliziere die kleinere Sehne mit der Ergänzungssehne der größeren und teile das Produkt durch den Durchmesser, dies ist das erste zu Behaltende; hierauf multipliziere man jede einzelne der gegebenen Sehnen mit sich selbst, subtrahiere diese Quadrate voneinander, und addiere den Rest zum Quadrat des ersten zu Behaltenden, ziehe die Wurzel aus der Summe und subtrahiere von derselben das erste zu Behaltende, so hat

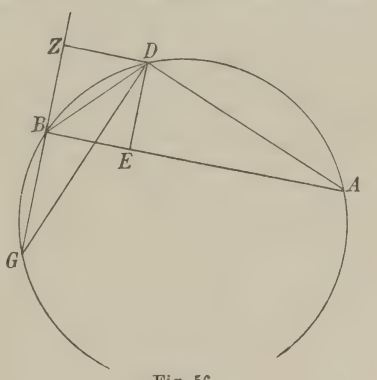


Fig. 56.

---

1) Was in Klammern steht, ist im Text mit etwas vielen Worten dargestellt, ich habe es deshalb etwas gekürzt gegeben.

2) Statt dieser etwas komplizierten und besonders durch Herbeiziehung des Durchmessers etwas sonderbar gewordenen Darstellung hätte man viel einfacher gesagt: $\frac{GD^2}{GZ^2 - BZ^2}$ ist bekannt, da GD und BZ (letzteres aus der vorher aufgestellten Proportion) bekannt sind, so ist auch GZ bekannt.

man die Sehne der Differenz. — Berechnung für die Sehne der Summe: Man multipliziere die größere Sehne mit der Ergänzungssehne der kleineren und teile das Produkt durch den Durchmesser, dies ist das zweite zu Behaltende; werden nun die beiden zu Behaltenden addiert, so hat man die Sehne der Summe der beiden Bogen, werden sie aber voneinander subtrahiert, so hat man die Sehne der Differenz der beiden Bogen, und das ist, was wir wollten.[1])

26. Kenntnis der Sehne der Differenz und der Sehne der Summe auf einem dem vorangegangenen des ABŪ NAṢR MANṢŪR B. ʿALĪ ähnlichen Wege, von mir.

Die Sehnen AD und BD [Fig. 57] sind gegeben, Bogen $DG = AD$ gemacht, dann ist AB die Sehne der Summe und BG die Sehne der Differenz. Wir ziehen vom Mittelpunkt H die Senkrechte HZ auf AD und ziehen AH, dann ist Winkel AHZ = Winkel DBA, weil DBA auf dem Bogen AD steht und vom Umfang ausgeht, AHZ aber auf dem halben Bogen steht und vom Mittelpunkt ausgeht; also sind die beiden Dreiecke AHZ und BDE ähnlich, also besteht die Proportion: $AH : HZ$ (= Hälfte der Ergänzungssehne von AD) $= BD : BE$, also ist BE bekannt; aber $BD^2 = BE^2 + DE^2$, also ist auch DE bekannt; ferner ist $AD^2 = DE^2 + AE^2$, mithin ist auch AE bekannt, und wenn wir AE und BE addieren, haben wir die Sehne der Summe, und wenn wir BE von AE subtrahieren, so haben wir die Sehne der Differenz. — Berechnung: Man multipliziere die halbe Ergänzungssehne des größeren Bogens mit der kleineren Sehne und teile das Produkt durch den Radius, so hat man das erste zu Behaltende; dann multipliziere man dieses mit sich selbst und subtrahiere das Quadrat vom Quadrat der kleineren Sehne und ziehe die Wurzel aus der Differenz, so ist dies das zweite zu Behaltende, dieses multipliziere man mit sich selbst und subtrahiere das Quadrat vom Quadrat der größeren Sehne und ziehe die Wurzel aus der Differenz; wenn wir nun diese Wurzel und das erste zu Behaltende addieren, so haben wir die Sehne der Summe, und wenn wir das erste zu Behaltende von dieser Wurzel abziehen, so haben wir die Sehne der Differenz, und das ist was wir wollten.[2])

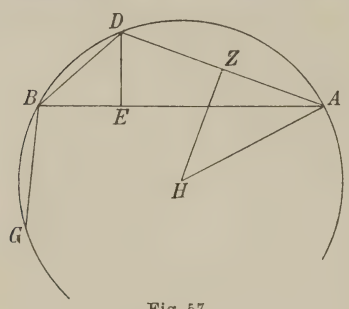


Fig. 57.

1) Siehe Kommentar.
2) Siehe Kommentar.

27. Kenntnis der Sehne der Summe und der Sehne der Differenz, von mir, in den Begründungen der Tafeln des Habash.

Wenn die Sehnen zweier Bogen in einem gegebenen Kreise bekannt sind, so ist auch die Sehne der Summe sowie die Sehne der Differenz der Bogen bekannt. Z. B.[1]) AD und BD sind gegeben in einem Kreise von bekanntem Durchmesser, wir ziehen AB, so ist dies die Sehne der Summe ihrer Bogen; dann machen wir Bogen $DG = AD$ und ziehen BG, so ist dies die Sehne der Differenz der beiden Bogen AD und BD. Nun sage ich, daß AB sowohl als BG bekannt sind. Beweis: Wir ziehen vom Mittelpunkt H die Senkrechte HZ auf AD, und von D aus DE senkrecht auf AB, und ziehen noch AH, dann sind, weil Winkel AHZ auf der Hälfte des Bogens steht, auf welchem der Winkel DBE steht, diese beiden Winkel gleich, also Dreieck AHZ ähnlich Dreieck DBE, also besteht die Proportion $AZ : AH = DE : BD$, also ist DE bekannt; aber $BD^2 = DE^2 + BE^2$, also ist auch BE bekannt; ferner ist $AD^2 = AE^2 + DE^2$, mithin ist auch AE bekannt, also auch AB, das gleich $AE + BE$ ist; aber DE halbiert die gebrochene Linie ABG, mithin ist der Unterschied zwischen AE und $BE = BG$, also ist auch dieses bekannt. Berechnung: Man multipliziere die kleinere Sehne mit der Hälfte der größeren und teile das Produkt durch den Radius, so hat man die Senkrechte (DE), dann subtrahiere man das Quadrat dieser Senkrechten sowohl vom Quadrate der kleineren als auch vom Quadrate der größeren Sehne, ziehe aus beiden Differenzen die Wurzeln, so ist die Summe dieser Wurzeln die Sehne der Summe der beiden Bogen, und die Differenz der beiden Wurzeln die Sehne der Differenz der beiden Bogen.[2])

Man sieht, daß die Ausdrücke für die Sehne der Summe und die Sehne der Differenz gemeinsame Glieder haben; der Grund hierfür ist der, daß die Sehne BD zugleich die Sehne der Differenz der beiden Bogen AD und BG[3]) und die Sehne der Summe der beiden Bogen AD und AGB ist, und deshalb ergibt sich leicht die Kenntnis der einen von ihnen auf dem von uns erleichterten Wege und dann aus dieser die Kenntnis der anderen auf demselben Wege (?)

Nun ist die Auffindung der Fundamentalsehnen[4]) mit Hilfe dieser Eigenschaften (der gebrochenen Linie) auf ähnliche Weise zu erreichen, wie wir es in den Begründungen der Tafeln des Habash getan haben; ich gebe diese Berechnungen im folgenden wieder, weil dies der passende Ort dafür ist.

---

1) Siehe die vorhergehende Figur.

2) Siehe Kommentar. 3) Der Text hat BD.

4) d. h. der Seiten des Acht-, Fünf- und Zehnecks; Drei- und Viereck sind ihrer Einfachheit wegen gar nicht berücksichtigt in den folgenden Berechnungen.

28. Auffindung der Sehne (Seite) des Achtecks in einem Kreise, dessen Durchmesser bekannt ist.

Es sei BD [Fig. 58] ein Achtel des Umfanges des Kreises DBZ, so ist die Linie BD die Sehne (Seite) des Achtecks, ich sage nun, daß sie bekannt sei. Beweis: Wir ziehen den Durchmesser DAZ, der Mittelpunkt des Kreises sei A, wir ziehen ferner AB und DE senkrecht auf AB, beschreiben um das Dreieck ADB einen Kreis und machen Bogen $DBG = AD$; weil nun DE die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens des Achtecks ist, so ist sie die Hälfte der Sehne des Vierecks, und Winkel DAB ist der achte Teil von vier Rechten, also die Hälfte eines Rechten, und Winkel AED ein Rechter, also Winkel ADE auch die Hälfte eines Rechten, mithin $AE = DE$, und jede von diesen Linien ist die Hälfte der Sehne des Viertelkreises; wir verlängern AB, bis $EH = AE$ ist, dann ist klar, daß $BH = BG$ ist, weil DE jede der Linien ABG (die gebrochene) und ABH (die gerade) halbiert; ebenso ist

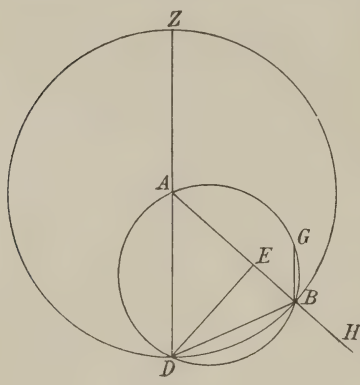


Fig. 58.

$AD^2 = BD^2 + AB \cdot BG = BD^2 + AB \cdot BH$;

BH ist aber gleich AH (Sehne des Viertelkreises) $- AB$ (Radius)[1]), also ist BD bekannt. Berechnung: Man subtrahiere den Radius von der Viereckseite[2]), multipliziere die Differenz mit dem Radius und subtrahiere das Produkt vom Quadrat des Radius, ziehe die Wurzel aus dem Reste, so ist diese die Achteckseite. — Diese Aufgabe kann so gelöst werden, oder auf dem Wege, den wir früher für die Kenntnis der Sehne des halben Bogens aus der des ganzen eingeschlagen haben.[3])

29. Auffindung der Seite des Zehnecks (und Fünfecks).

Es sei BD[4]) [Fig. 59] die Seite des Zehnecks, so sage ich, daß sie bekannt sei. Beweis: Wir ziehen den Durchmesser DAZ, der Mittelpunkt sei A, ziehen AB und beschreiben um das Dreieck ADB einen Kreis, machen darin Bogen $DBG = AD$, und ziehen BG; weil nun Winkel DAB ein Zentrumswinkel auf dem Bogen BD ist, so ist er der zehnte Teil des Umfanges des Kreises BDZ, er liegt aber im Umfang des Kreises ADB, überspannt also von diesem den fünften Teil des Um-

1) Der letztere Satz fehlt im Text
2) Im Text steht „doppelte Viereckseite“.
3) Siehe Kommentar.
4) Im Text steht AB.

fanges; ferner sind AD und AB gleich, also ist jeder der Bogen AD und AGB zwei Fünftel[1]) des Umfanges, aber Bogen DBG ist gleich Bogen AD, also ist auch DBG zwei Fünftel[1]) des Umfanges; nun ist aber, wie bekannt, DB ein Fünftel des Umfanges, also sind die beiden Bogen DB und BG gleich groß; nun ist ABG eine gebrochene Linie in diesem Kreise, also $AD^2 = BD^2 + AB \cdot BG = BD^2 + AD \cdot BD$, also verhält sich die Linie ADB wie eine gerade, die im Punkte D nach dem äußeren und mittleren Verhältnis geteilt ist[2]), der größere Teil ist AD, und bekannt als Radius des gegebenen Kreises, der kleinere Teil ist BD, die Seite des Zehnecks, sie ist also auch bekannt. Berechnung: Du addierst zum Quadrat des Radius seinen vierten Teil, ziehst die Wurzel aus dieser Summe und ziehst von dieser Wurzel den Viertel[3]) des Durchmessers ab, so hast du die Seite des Zehnecks. — Dies ist ganz entsprechend demjenigen, was bewiesen wird im 11. Satz des 2. Buches der Elemente über die Teilung einer Linie nach dem genannten Verhältnis.

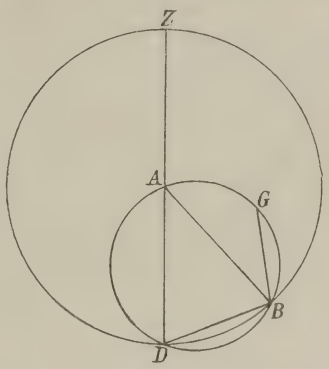


Fig. 59.

Und weil ein Fünftel des Umfanges das Doppelte des Zehntels ist, und die Sehne des doppelten Bogens bekannt ist, wenn die Sehne des einfachen gegeben ist, so ist auch die Seite des Fünfecks bekannt, q. e. d.[4])

Mit diesen Sätzen ist es nun nach der Berechnung der Fundamentalsehnen im Kreise möglich, auch die übrigen aufzufinden nach dem im *Almagest* eingeschlagenen Wege; denn mit der Kenntnis des Satzes über die Sehne der Differenz (zweier Bogen) findet man die Sehne, die zwischen dem Fünftel und Sechstel (des Kreisumfanges) liegt (also von 12^0), und mit der Kenntnis der Sehne des halben Bogens (aus der des ganzen) gelangt man zur Sehne von 3^0, und mit der Kenntnis der Sehne des doppelten Bogens (aus der des einfachen) und dem Satz über die Sehne der Summe (zweier Bogen) ergeben sich die Sehnen aller Bogen von 3^0 zu 3^0. Was dann die Sehne des Bogens von 1^0 anbetrifft, so würde ihre Ableitung ermüdend (oder zu schwierig) sein[5]), und da in dieser Sache nach der Erfindung eines Kunstgriffes getrachtet wird, um dieselbe an-

1) Im Text steht „ein Fünftel".
2) Aus der angeführten Gleichung folgt nämlich: $AD + BD : AD = AD : BD$.
3) Im Text „die Hälfte". 4) Siehe Kommentar.
5) Damit ist wohl die Wiedergabe der Darstellung des *Almagestes* gemeint.

genähert, wenn auch nicht genau, zu finden, so strenge nun deine Gedanken an, Gott stärke dich, über das, was ich für dich gesammelt habe, und fasse es genau ins Auge, damit sich dadurch über dir öffnen die Quellen des Scharfsinns, etc. . . .[1]) und zwischen mir und dir der Gegenstand des Tadels beseitigt werde. Lob sei Gott für seine große Güte und das Gebet über seine guten Geschöpfe. Beendigt (ist die Arbeit) mit der Hilfe Gottes, er ist groß, und seines guten Beistandes, denn er ist der Barmherzige und Gnädige!

Kommentar.

Dieses eigentümliche Buch des großen und vielleicht gründlichsten arabischen oder besser persischen Gelehrten EL-BĪRŪNĪ, dessen Ruhm SACHAU durch die Herausgabe der *Indischen Chronik* und der *Chronologie der orientalischen Völker* zu erneutem Glanze erhoben hat, wurde wohl in erster Linie in der Absicht geschrieben, die Grundlagen der Trigonometrie, insbesondere die Herstellung der trigonometrischen Tafeln zu befestigen. Interessant erscheint dabei zum vornherein, daß EL-BĪRŪNĪ nach der Methode der Alten, insbesondere des PTOLEMÄUS, vorgeht, d. h. die Sehnen der Summe und Differenz zweier Bogen etc., und nicht die Sinus derselben berechnet; es scheint dies für jene Zeit noch leichter gewesen zu sein, indem man sich eben zu diesem Zwecke unmittelbar auf den ptolemäischen Lehrsatz und einige andere im *Almagest* vorkommende Sätze stützen konnte, und ja durch einfache Halbierung sofort aus den Sehnen die Sinus erhielt. Dann mag in zweiter Linie das Interesse an den beiden Hilfssätzen an und für sich und ihre große Anwendungsfähigkeit zur Lösung einer Reihe der verschiedenartigsten Probleme, die mit der Sehnenrechnung direkt nichts zu tun haben, ein Grund dafür gewesen sein, daß sich so viele arabische Mathematiker und insbesondere EL-BĪRŪNĪ so eingehend mit diesem Stoffe beschäftigt haben.

Der erste Satz findet sich, wenn auch in anderer Form ausgesprochen (von einer gebrochenen Linie ist nicht die Rede) schon im *Almagest* des PTOLEMÄUS[2]), und wieder in etwas anderer Form im *Liber assumptorum*[3]), das von den Arabern dem ARCHIMEDES zugeschrieben wurde. PTOLEMÄUS benutzt ihn zur Lösung der Aufgabe, aus der gegebenen Sehne eines Bogens die Sehne des halben Bogens zu berechnen. Hierzu wäre aber

1) Hier folgen einige kurze Sätze, die mit etwas anderen Worten dasselbe sagen wollen, wie der vorhergehende Satz, die aber stark verdorben zu sein scheinen.

2) Vgl. *CL. PTOLEMAEI Opera*, edid. J. L. HEIBERG I, 39.

3) Vgl. *ARCHIMEDIS opera omnia*, edid. J. L. HEIBERG II, 431.

dieser Satz keineswegs nötig gewesen, der pythagoräische Lehrsatz hätte vollkommen genügt, so daß uns der Weg des PTOLEMÄUS geradezu als ein Umweg erscheinen muß. In der Tat löst auch EL-BĪRŪNĪ die genannte Aufgabe ohne Benutzung dieses Satzes, also auf einfachere Weise als PTOLEMÄUS; man ersieht hieraus, daß es wohl in der Absicht EL-BĪRŪNĪS lag, sich soviel als möglich, wenigstens in den Beweisen, von dem Wege des PTOLEMÄUS zu entfernen und selbständig vorzugehen; es zeigt sich dies auch noch am Schlusse der Arbeit, indem EL-BĪRŪNĪ die ptolemäische Berechnung der Sehne von 1^0 aus denjenigen von $1\frac{1}{2}{}^0$ und $\frac{3}{4}{}^0$ übergeht, da sie ihm wohl als ein zu wenig streng mathematisches Verfahren erscheinen mochte und man zu seiner Zeit, wie er sich ausdrückt, an einem Kunstgriff herumstudierte, die Sehne von 1^0 auf anderem, wie er glaubte leichterem Wege und genauer zu finden.[1])

Für uns hat die Arbeit EL-BĪRŪNĪS einen nicht unbedeutenden historischen Wert, ja sie kann vom Standpunkte ihres Verfassers aus geradezu als eine historische bezeichnet werden; EL-BĪRŪNĪ hat alle Beweise der beiden Sätze, die ihm bekannt waren, gesammelt und die Autoren derselben angegeben; er hat auf Arbeiten der Griechen und Indier hingewiesen und auf Aufgaben aufmerksam gemacht, die in arabischen Büchern über Algebra zu seiner Zeit vorkamen; er hat damit seinen historischen Sinn, den er durch seine oben genannten Hauptwerke so glänzend bekundet hat, wieder bewährt.

Wir freuen uns, daß es uns vergönnt war, diese interessante Arbeit des großen Gelehrten zur Veröffentlichung zu bringen; es wurde uns dies ermöglicht einerseits durch die Liberalität des Herrn Dr. TH. W. JUYNBOLL von der kgl. Bibliothek zu Leiden, der den Codex Warneri 513, in dem sich unsere Abhandlung auf fol. 107^b bis 128^a befindet, für längere Zeit Herrn Prof. Dr. E. WIEDEMANN in Erlangen zur Benutzung überlassen hat, und anderseits durch die Liebenswürdigkeit des letzteren Gelehrten, der für mich Photographien in Weiß auf Schwarz von der Arbeit ausführen ließ. Beiden Herren spreche ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank für ihr freundliches Entgegenkommen aus.

Das Ms. 513 Warneri ist undatiert, aber aus einer Besitzernotiz geht hervor, daß es vor dem Jahre 1522 geschrieben worden ist. Es ist ziemlich schön und gleichmäßig geschrieben, doch fehlen oft diakritische Punkte, was glücklicherweise in mathematischen Manuskripten weniger stört als in anderen, da so oft dieselben bekannten technischen Aus-

1) Hieraus kann man wohl den Schluß ziehen, daß die von GHIYĀTH ED-DĪN EL-KĀSHĪ angewandte Methode, die bekanntlich in der angenäherten Berechnung der reellen Wurzel einer kubischen Gleichung besteht, damals noch nicht erfunden war.

drücke wiederkehren. Die Titel zu den einzelnen Beweisen und Aufgaben sind rot geschrieben, die Figuren fein ausgeführt und nur selten fehlerhaft.

Wie E. SACHAU in seiner Ausgabe der *Chronologie orientalischer Völker* (p. LXIX—LXX) ausführt, war EL-BĪRŪNĪS Stil in seinen historischen und philosophischen Werken kein leichter; einer seiner Schüler schreibt hierüber: „Es war nicht die Gewohnheit unseres Meisters, wenn er in seinen Schriften verschiedene Methoden diskutierte, Beispiele zu geben. Und wenn er einmal ein Beispiel gab, was selten genug geschah, so drückte er sich in verschlossenen Wendungen aus, zwar mit beredten Worten, aber doch mit solchen, die sehr schwer zu verstehen sind." Als besonderes Kennzeichen seines Stils nennt überdies SACHAU noch „eine außerordentliche Kürze und Prägnanz des Ausdrucks". Aus diesen Gründen bildet auch die Vorrede EL-BĪRŪNĪS zu seiner Abhandlung die schwierigste Partie derselben, ebenso kommen im Schlußwort einige nicht leicht zu verstehende Stellen vor. Für die gütige Hilfe, die mir bei der Übersetzung derselben Herr Dr. J. HAUSHEER, Professor der Theologie und der orientalischen Sprachen an der Universität Zürich, geleistet hat, spreche ich ihm an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

EL-BĪRŪNĪ wendet sich im Vorwort an einen ungenannten Zeitgenossen, der wohl, wie aus dem Wortlaut zu schließen ist, mehr Philosoph als Mathematiker war, und der mit diesen geometrischen Studien EL-BĪRŪNĪS nicht einverstanden gewesen zu sein scheint. Es wäre möglich, daß dieser Ungenannte der Arzt und Philosoph ʿĪSĀ B. YAḤYĀ EL-MASĪḤĪ (der Christ)[1]) gewesen sein könnte, mit dem EL-BĪRŪNĪ in wissenschaftlichem Verkehr gestanden und der auch in seinem (EL-BĪRŪNĪS) Namen einige Schriften verfaßt hat.

Für die nun folgenden Bemerkungen zu den einzelnen Beweisen und Aufgaben habe ich diese zum Zweck der Rückverweisung mit Buchstaben und Zahlen versehen, die natürlich im Manuskript fehlen, und zwar die Beweise zur ersten Behauptung mit lateinischen, die zur zweiten mit griechischen Buchstaben und die darauf folgenden Aufgaben mit arabischen Ziffern. Was meine Übersetzung des arabischen Textes betrifft, so habe ich denselben ziemlich wörtlich wiedergegeben, dagegen habe ich mich selbstverständlich überall bei Gleichungen, Proportionen usw. unserer mathematischen Operationszeichen bedient, sonst wäre die Darstellung auch gar zu breit geworden. Was in runden Klammern steht, sind von mir hinzugefügte Ergänzungen oder Erläuterungen.

---

1) Vgl. H. SUTER, l. c. p. 79, und *Nachträge* (Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **14**, Leipzig 1902) p. 172.

a) Nach diesem Titel hätten also die Araber ein *Buch über die Kreise* gekannt, das sie dem Archimedes zugeschrieben haben. Es wäre möglich, daß dieses Buch in Verbindung stünde mit dem *Liber assumptorum*, daß dieser vielleicht nur ein Teil oder eine Auswahl aus dem Buche der Kreise gebildet hätte; ich stelle diese Vermutung deshalb auf, weil die Figur des 3. Satzes des *Liber assumptorum* mit der Figur dieses dem Archimedes zugeschriebenen Beweises bis auf die Linie BG, die dort fehlt, übereinstimmt; im *Liber assumptorum* wird freilich nur bewiesen, daß, wenn $BD = DH$ und $BE = EZ$, auch $AH = AZ$ sei.

d) Der Verfasser dieses Beweises ist, nach den Namen zu schließen, ein echter Perser; ich habe sie gegeben, wie sie im Texte stehen, aber die Lesarten sind unsicher, weil die diakritischen Punkte teilweise fehlen. Dieser Autor wird auch in der *Chronologie orientalischer Völker* von el-Bīrūnī (p. 44 und 99 des arabischen Textes, p. 54 und 107 der englischen Übersetzung) zitiert und heißt daselbst Ādharkhūrā b. Yazdānkhasīs, der Geometer. Adharkhūrā oder besser Ādharkhorā bedeutet im Persischen „der Feueresser"; Yazdān ist „der Genius oder Schöpfer des Guten", aber Khasīs oder, wie unser Manuskript hat, Ḥashbas oder Ḥashtas ist sehr wahrscheinlich verdorben; statt Yazdān könnte freilich auch die Lesart unseres Manuskriptes, Ushtād oder besser Ustād = Meister, die richtige sein; wir überlassen weitere Hypothesen hierüber besseren Kennern des Persischen. Über diesen Gelehrten wissen wir weiter nichts, als daß er ein Zeitgenosse el-Bīrūnīs war.

e) Hier wird also wieder eine griechische Schrift über mathematische Fragen genannt, die weder griechisch noch in arabischer Übersetzung auf uns gekommen ist und über deren Verfasser die Araber selbst im Ungewissen waren. — Was den Übersetzer dieser Schrift, Yūḥannā b. Yūsuf, anbetrifft, so ist es nicht unwahrscheinlich, daß er selbst einen Beweis zu dieser Behauptung zu geben versucht hat, denn im Pariser Ms. 2457, 10^0 befindet sich eine Abhandlung des Aḥmed b. Muḥ. el-Sidjzī, worin er über den Irrtum des Yūḥannā in seiner Lösung der Aufgabe der Teilung einer Geraden in zwei gleiche Teile handelt. Wahrscheinlich sollte es hier statt „einer Geraden" heißen „der gebrochenen Geraden".[1])

q) Man wird etwas erstaunt sein über diesen komplizierten Beweis von el-Shannī, der von demselben Satze drei wesentlich einfachere gegeben hat; der Grund hierfür wird sofort klar, wenn man den Beweis zu Aufgabe 7 betrachtet, zu welchem er den hier gegebenen gebraucht. — Übrigens ist der Beweis fehlerhaft; es wird die unrichtige Proportion aufgestellt: $AZ : ZD = AK : DK$, und doch kommt schließlich der Verfasser

1) Vgl. H. Suter, l. c. p. 60, nr. 131.

auf die richtige Gleichung $AH \cdot DT = DE \cdot BE$. Wir können mittels Proportionen keinen kürzeren Beweis finden, als folgenden: Es ist $AE : AZ = BT : BK$, ferner

$$BT : AE = DT : DE \text{ (weil } \triangle BDT \sim \triangle AED);$$

hieraus durch Multiplikation:

$$BT : AZ = BT \cdot DT : BK \cdot DE = \triangle BDT : \triangle BDK = DT : DK;$$

ferner ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ADZ und BDK, sowie ADH und BDE:

$$AZ : BK = AD : BD = AH : BE;$$

durch Multiplikation der beiden Proportionen $BT : AZ = DT : DK$ und $AZ : BK = AH : BE$ ergibt sich:

$$BT : BK = AH \cdot DT : DK \cdot BE,$$

und hieraus: $$AH \cdot DT = \frac{BT \cdot DK \cdot BE}{BK};$$

aber $BK \cdot DE = DK \cdot BT$, also $DE = \frac{DK \cdot BT}{BK}$,

mithin ist $$AH \cdot DT = BE \cdot DE.$$

Einen viel einfacheren Beweis des Satzes, daß $\triangle ADG - \triangle ABG = BE \cdot DE$ sei, gibt ohne Proportionen ABŪ NAṢR B. ʿIRĀḳ am Schlusse des Beweises s).

w) In diesem Beweise EL-BĪRŪNĪS kommt ein Fehler vor, er setzt etwas voraus, was erst bewiesen werden soll, nämlich daß DBT eine gerade Linie sei, wenn er sagt, daß Winkel DBG als Außenwinkel des Dreiecks BTG = Winkel BGT + Winkel BTG sei. Dieser Beweis muß Veränderungen erfahren haben, denn wir können EL-BĪRŪNĪ kaum einen solchen Fehler zumuten. Nach unserer Ansicht kann nach den Voraussetzungen EL-BĪRŪNĪS der Beweis nur so weiter geführt werden: Es ist nun Winkel DBK = Winkel DBG, denn beide machen mit dem Winkel DBA zwei Rechte aus, Winkel DBG nämlich deshalb, weil er auf dem Bogen DAG steht, und Winkel DBA auf dem Bogen AD, beide Bogen zusammen aber den ganzen Kreisumfang ausmachen (da Bogen AD = Bogen DG); also ist $\triangle DBK$ kongruent $\triangle DBG$, mithin ist $DG = DK$, usw.

Zweite Behauptung.

Dieser Satz gilt auch, wenn die Punkte A, D, B, G in einer Geraden liegen (EUKL. ed. HEIBERG II, 5), wie dies ja auch beim ptolemäischen Lehrsatz und selbstverständlich auch bei der ersten Behauptung der Fall ist.

ϑ) Die Worte „ohne Beziehung zum *Almagest*“ sind unklar, aber ich kann das arabische *iḫāla* hier nicht anders als durch „Beziehung“ oder

auch „Rückverweisung“ übersetzen; er will vielleicht damit sagen, seine Figur und damit auch sein Beweis seien nicht dieselben wie bei Ptolemäus (*Almagest*, ed. Heiberg I, 39), aber Ptolemäus beweist ja daselbst einen ganz anderen Satz; diese Bemerkung wäre bei Beweisen zur ersten Behauptung eher am Platze gewesen.

Die Aufgaben.

1. Die Araber haben also ein Werk des Menelaus über die *Elemente der Geometrie* gekannt, das auch der *Fihrist*[1]) nennt, und auf das vielleicht Proklus hindeutet im Kommentar zu Euklids Elementen (ed. Friedlein, p. 345).[2]) Die Aufgabe, die Menelaus im 2. Satze des 3. Buches seiner Elemente gelöst hat, muß aber doch etwas anders gelautet haben, als sie el-Bīrūnī ausdrückt, denn sonst könnte er kaum „einen sehr langen Weg“ für die Lösung gebraucht haben. Es wird dann von el-Bīrūnī auch der Kommentar des Thābit b. Ḳurra zu diesen *Elementen* des Menelaus angeführt, der auch im *Fihrist* genannt wird, und Thābit soll einen beinahe ebenso langen Weg zur Lösung der genannten Aufgabe gebraucht haben.

2. Es ist nicht recht zu verstehen, warum el-Bīrūnī den Bogen DA zu einem Halbkreis ergänzte, um in das Dreieck DZA hinein das Dreieck LZK zu konstruieren, er hätte einfach D mit G verbinden können und in das Dreieck DGA, das bei G den gleichen Winkel hätte wie Dreieck DZA bei Z, das Dreieck LZK zeichnen können, wie er es auch im folgenden Beweis getan hat. Es handelt sich nämlich darum, das Dreieck ADB zu konstruieren aus AD, BE und Winkel B; da nun die Größe und Lage von AD schon gegeben ist, so kann die Konstruktion nur so ausgeführt werden, daß das Dreieck BDE aus BE und Winkel B zuerst irgendwo anders konstruiert wird, um BD zu erhalten, das kann aber in jedem Dreieck mit dem Winkel B geschehen.

6 und 7. Es ist interessant, daß die Araber diese beiden Aufgaben Archimedes zuweisen und nicht Heron, in dessen *Metrica*, die zweite auch in der *Dioptra*, sie vorkommen. Daß die Aufgabe 7 älter ist als Heron, habe ich schon in meiner Rezension zu den *Metrica* (Biblioth. Mathem. 7_3, 1906, p. 100) bemerkt, sie könnte also ganz wohl von Archimedes herstammen; aus dem *Buche der Kreise* ist sie wohl nicht, sonst wäre dies im Titel bemerkt, wie dies in den Beweisen zur ersten Behauptung der Fall war.

---

1) Vgl. H. Suter, *Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **6**, 1892, p. 19.

2) Vgl. auch A. Björnbo, *Studien über Menelaos' Sphärik;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **14**, 1902, p. 5 und 7.

7 und 8. Diese Beweise zu den Formeln für den Inhalt des Dreiecks und des Sehnenvierecks aus den Seiten bilden wohl die interessanteste Partie der Abhandlung. Beide Beweise sind gewiß sehr originell zu nennen; der zweite stützt sich natürlich auf den ersten und ist der einzige uns erhaltene Beweis dieses Satzes aus dem Altertum und Mittelalter; man beachte auch, daß EL-BĪRŪNĪ die Formel den Indiern zuweist; er kannte jedenfalls die Arbeiten BRAHMAGUPTAS, hat er doch, wie wir aus dem Verzeichnis seiner Schriften erfahren, die sich auf die Rechenkunst beziehenden Stellen aus dem *Brahma-Siddhānta* übersetzt und sich sonst noch vielfach mit indischer Mathematik und Astronomie beschäftigt. Die beiden Beweise stammen nach EL-BĪRŪNĪ von ABŪ ʿABDALLĀH EL-SHANNĪ, der sich uns also hier als einer der geschicktesten und originellsten Mathematiker der Araber präsentiert. Der Beweis für den Dreiecksinhalt ist wahrscheinlich auch noch in Kairo vorhanden.[1]) — Da dieser Beweis, wie fast alle der arabischen Mathematiker, etwas weitläufig und unübersichtlich ist, so mag es angezeigt sein, denselben hier kurz zu schematisieren:

Er braucht dazu zwei Hilfssätze, nämlich die erste Behauptung, daß $AE = BE + BG$ ist, und dann das, was er im Beweise q) zur ersten Behauptung bewiesen hat, daß $\triangle ADG - 2\triangle BDE = \triangle ABG$ sei (s. Fig. 39). Aus ähnlichen Dreiecken erhält er dann die Proportion: $DE : BE = DZ : AZ$, hieraus durch Erweiterung der Verhältnisse die beiden Proportionen:

$$DZ^2 : DZ \cdot AZ = DZ \cdot AZ : AZ^2,$$
$$DE^2 : DE \cdot BE = DE \cdot BE : BE^2.$$

Da alle diese Verhältnisse den gleichen Wert haben, erhält er durch Subtraktion der entsprechenden Glieder:

$$DZ^2 - DE^2 : DZ \cdot AZ - DE \cdot BE = DZ \cdot AZ - DE \cdot BE : AZ^2 - BE^2.$$

Nun ist das erste Glied, wie leicht zu verifizieren ist, gleich $(AE + AZ) \cdot EH$, das zweite und dritte nach dem im Beweise q) abgeleiteten Hilfssatz gleich $\triangle ABG$, und das vierte gleich $AK \cdot GK$, also hat man:

$$(\triangle ABG)^2 = (AE + AZ) \cdot EH \cdot AK \cdot GK \quad \text{oder:}$$
$$(\triangle ABG)^2 = s(s - AG)(s - AB)(s - BG).$$

9. Es ist zu diesem Beweise zu bemerken, daß er nur so geführt werden kann, wenn die beiden Palmen zusammen höher sind als die Breite des Flusses.

---

1) Vgl. H. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* etc. p. 97—98.

10. Eine Randnote zu dieser Aufgabe in anderer Schrift sagt: „Aus dieser Aufgabe wird klar, daß, wenn von einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Basis (Hypotenuse) und einer der Seiten (Katheten) gegeben ist, ebenso die andere Seite, dann die Basis und die erste Seite gefunden werden können.

Für die Aufgaben 9 und 10, die algebraisch so leicht lösbar sind, erscheint ein geometrischer Beweis mit Hilfe der beiden Eigenschaften der gebrochenen Linie etwas gesucht; wir erkennen hieraus aber nur, wie sehr es EL-BĪRŪNĪ darum zu tun war, die ausgedehnte Anwendungsfähigkeit jener Eigenschaften zu zeigen. — Die Aufgabe 9 befindet sich algebraisch gelöst bei EL-KARKHĪ.[1])

11. Mit dem Worte *taḳṭī'hu* = „ihre Verteilung" meint wohl EL-BĪRŪNĪ die verschiedenen Werte, die die Gleichung annehmen kann für alle Punkte des Halbkreises TAZ. DB (s. Fig. 43) ist hier wie auch bei EL-BATTĀNĪ aufgefaßt als Sinus der größten Gleichung, also als sin DNB; bei der Bewegung der Sonne ist diese Größe identisch mit der Exzentrizität (gleich dem doppelten Wert der heutigen Exzentrizität der Erdbahn), bei der epizyklischen Theorie der Planetenbewegung ist sie gleich dem Radius des Epizykels. PTOLEMÄUS und EL-BATTĀNĪ berechnen die Größe AB mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes, EL-BĪRŪNĪ dagegen mit Hilfe des Kosinussatzes; denn so dürfen wir wohl seine Gleichung $AB^2 = AD^2 + DB^2 + 2DH \cdot DB$ nennen, wenn er unmittelbar nachher hinzufügt: „wenn wir also den doppelten Kosinus des Argumentes, also $2DH$ mit DB multiplizieren und das Produkt zu $AD^2 + DB^2$ addieren, so erhalten wir AB^2". Daß er sich deshalb der allgemeinen Bedeutung dieses Satzes für die Trigonometrie vollständig bewußt gewesen sei, wollen wir nicht behaupten, aber ohne Übertreibung kann man doch sagen, der Kosinussatz für das ebene (speziell stumpfwinklige) Dreieck finde sich in dieser Aufgabe EL-BĪRŪNĪS angewandt.

12. Auch diese interessante und keineswegs leichte Aufgabe löst EL-BĪRŪNĪ durch Anwendung der beiden Sätze über die gebrochene Linie. Man vergleiche mit dieser Lösung diejenige EL-BATTĀNĪS[2]), bei der wir allerdings über den wichtigsten Punkt der Lösung, nämlich über den Weg, auf dem er die Formeln für die beiden Pfeile EK und EL gefunden hat, im Unklaren gelassen werden.[3])

1) Siehe A. HOCHHEIM, *Al Kāfi fil Hisāb des Alkarkhi* III, Halle a/S. 1880, S. 26.

2) Vgl. EL-BATTĀNĪ, *Opus astronomicum*, ed. C. A. NALLINO, I, p. 99—100 und 275—276.

3) SCHIAPARELLI gibt an dem eben zitierten Orte (p. 276) eine elegante hypothetische Herleitung, die uns nur für einen Araber etwas zu algebraisch vorkommen will; immerhin müssen wir zugeben, daß es sehr wahrscheinlich ist, daß EL-BATTĀNĪ seine Resultate mittels des Satzes EUKL. II, 13 gefunden haben werde.

14. Diese Aufgabe ist allerdings ohne Anwendung der beiden Behauptungen viel einfacher zu lösen: Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke THB und ABZ, ebenso THZ und BDZ hat man:

$$\frac{BH}{TH} = \frac{AB}{AZ} \text{ und } \frac{HZ}{TH} = \frac{DZ}{BD}$$

addiert:
$$\frac{BZ}{TH} = \frac{AB}{AZ} + \frac{DZ}{BD} = \frac{AB \cdot BD + AZ \cdot DZ}{AZ \cdot BD}$$

und hieraus:
$$TH = \frac{BZ \cdot AZ \cdot BD}{AB \cdot BD + AZ \cdot DZ}.$$

Trigonometrisch ergibt sich, wenn die Winkel ABZ und DZB mit α bzw. β bezeichnet werden, die ganz einfache Formel:

$$TH = \frac{BZ}{\cot\alpha + \cot\beta}.$$

Man vergleiche damit die Aufgabe IBN EL-HAITAMS, die wir in der Biblioth. Mathem. (8_3, 1907, S. 27—30) veröffentlicht haben.

15. PTOLEMÄUS bestimmte (*Almagest*, ed. HEIBERG II, 450—494) für jeden der fünf Planeten den Bogen DK (bzw. den Winkel DBK) und schlug, wie EL-BĪRŪNĪ bemerkt, bei allen fünf Berechnungen denselben Weg ein; er meint damit wahrscheinlich den Satz: Kennt man in einem Kreise die Summe oder Differenz zweier Bogen und ebenso das Verhältnis der Sehnen der doppelten Bogen (oder der Sinus der einfachen), so kann man die Bogen einzeln finden. Diesen Satz benutzt PTOLEMÄUS viel und beweist ihn daher schon im ersten Buche des *Almagestes* (ed. HEIBERG, I, 70—74).

16. EL-BĪRŪNĪ sagt am Schlusse der Aufgabe, seine Berechnung der Ergänzungssehne $\left(2\sqrt{\left(\frac{AB+BG}{2}\right)\left(\frac{AB-BG}{2}\right)}\right)$ sei leichter als die nach dem pythagoräischen Lehrsatze $\left(\sqrt{AB^2 - BG^2}\right)$, und dies ist in der Tat auch richtig, denn bei Sexagesimalbrüchen sind Multiplikationen viel komplizierter auszuführen als bei ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen. Aber warum hat EL-BĪRŪNĪ den geometrischen Weg eingeschlagen, da er doch gewiß, wie sich später noch zeigt, die Gleichheit $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ gekannt hat? Wir denken, er habe wiederum bloß die Anwendungsfähigkeit jener Sätze über die gebrochene Linie auch auf diese einfache Aufgabe zeigen und vielleicht auch einen geometrischen Beweis für diese algebraische Formel geben wollen, die bei EUKLIDES in dieser Form nicht vorkommt.

17. Die Regel EL-BĪRŪNĪ's heißt in einer Formel ausgedrückt so: $AG = \sqrt{AD^2 - 4\left(BE - \frac{AB^2}{2BE}\right)^2}$ und verwandelt sich, wenn wir trigono-

metrische Beziehungen einführen und den Winkel AEB mit α bezeichnen, in folgende:

$$2r \sin \alpha = \sqrt{4r^2 - 4\left(r - \frac{4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2r}\right)^2} \text{ oder:}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Die Formel für den zweiten Weg ist einfacher:

$$AG = \frac{2AB\sqrt{\frac{AD^2 - AB^2}{4}}}{BE} \text{ oder trigonometrisch:}$$

$$2r \sin \alpha = \frac{4r \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{r} = \frac{4r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{r} \text{ oder:}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Das Fehlen einer algebraischen Formelsprache ist wohl der Grund dafür, daß $2AB\sqrt{\frac{AD^2 - AB^2}{4}}$ nicht zu $AB\sqrt{AD^2 - AB^2}$ abgekürzt worden ist.

18. Nach der Berechnung EL-BĪRŪNĪ's ergibt sich die Formel:

$$AB = \sqrt{\frac{AD^2}{2} - AD\sqrt{\frac{AD^2 - AG^2}{4}}};$$

trigonometrisch:

$$2r \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos \alpha}$$

oder:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Die Formel nach dem zweiten Weg ist:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{AD - \sqrt{AD^2 - AG^2}}{2}\right)^2 + \frac{AG^2}{4}},$$

die ebenfalls wieder auf die obige trigonometrische Formel führt. — Man beachte, daß bei den beiden Aufgaben 17 und 18 keiner der beiden Sätze über die gebrochene Linie zur Anwendung kommt.

19. Die beiden gegebenen Sehnen seien $AB = s_1$ und $BG = s_2$, so führt die Berechnung EL-BĪRŪNĪS auf die Formeln:

$$DE = \sqrt{\left(r + \frac{s_2}{2}\right)\left(r - \frac{s_2}{2}\right)} - \sqrt{\frac{4r^2 - s_1^2}{4}} \text{ und } AD = \sqrt{DE^2 + \left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2}.$$

Es ist nun, wenn die zu den beiden Sehnen gehörenden Zentriwinkel mit α und β bezeichnet werden:

$$s_1 = 2r \sin\frac{\alpha}{2},\ \sqrt{r^2 - \frac{s_1^2}{4}} = r\cos\frac{\alpha}{2},\quad s_2 = 2r\sin\frac{\beta}{2},\ \sqrt{r^2 - \frac{s_2^2}{4}} = r\cos\frac{\beta}{2},$$

also $$DE = r\cos\frac{\beta}{2} - r\cos\frac{\alpha}{2},\ \text{mithin}$$

$$AD = \sqrt{\left(r\cos\frac{\beta}{2} - r\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(r\sin\frac{\alpha}{2} + r\sin\frac{\beta}{2}\right)^2} \quad \text{oder:}$$

$$2r\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right) = \sqrt{2r^2 - 2r^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)} \quad \text{oder:}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2}}.$$

21. Diese Aufgabe hat wie Nr. 20 keinen praktischen Wert für die Berechnung der Sehnen im Kreise, sie hat aber insofern ein Interesse für uns, als sie auf eine quadratische Gleichung führt, die mit Hilfe der ersten Eigenschaft der gebrochenen Linie sehr leicht geometrisch gelöst wird. Wir geben im folgenden die algebraische Lösung:

Es sei $AB = x$ und $BG = y$, $AG = d$ und $AB + BG = s$, so hat man:

$$x + y = s \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = d^2,$$

hieraus erhält man für x und y die Werte:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{s^2}{4}}, \qquad y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{s^2}{4}},$$

die mit den Resultaten EL-BĪRŪNĪS übereinstimmen.

22. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich sofort aus der zweiten Behauptung: $AD^2 = AB \cdot BG + BD^2$; hieraus folgt nämlich:

$$AB = \frac{AD^2 - BD^2}{BG} \quad \text{und} \quad BG = \frac{AD^2 - BD^2}{AB}.$$

In trigonometrischer Form heißt die zweite Behauptung über die gebrochene Linie, wenn die Zentriwinkel der beiden Sehnen AD und BD mit α bzw. β bezeichnet werden:

$$4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2r\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)2r\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 4r^2\sin^2\frac{\beta}{2}$$

oder: $$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin^2\frac{\beta}{2},$$

hieraus ergeben sich die beiden Formeln:

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}, \qquad \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

23. Dies ist eine andere Lösungsart von EL-BĪRŪNĪ für die vorhergehende Aufgabe. Sowohl die Berechnung für die Sehne der Summe als

die für die Sehne der Differenz sind komplizierter als bei Abū Naṣr b. ʿIrāḳ, führen aber nach einfacher Umformung auf dieselben Formeln; man begreift daher wirklich das Verfahren el-Bīrūnīs nicht recht.

24. Bezeichnen wir die beiden Bogen mit b_1 und b_2, ihre Sehnen mit s_1 und s_2, so führt die erste Berechnung für die Sehne der Differenz auf folgende Formel:

$$\text{Sehne}\,(b_1 - b_2) = \sqrt{4r^2 - \left[2r - \frac{\left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4r^2 - s_2^2}{4}} - \sqrt{\frac{4r^2 - s_1^2}{4}}\right)^2}{r}\right]^2},$$

wie man sieht ein sehr komplizierter Ausdruck! Nun ist $s_1 = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$, $s_2 = 2r \sin \frac{\beta}{2}$, $\sqrt{\frac{4r^2 - s_1^2}{4}} = r \cos \frac{\alpha}{2}$, $\sqrt{\frac{4r^2 - s_2^2}{4}} = r \cos \frac{\beta}{2}$, Sehne $(b_1 - b_2)$ $= 2r \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$; diese Werte in die obige Formel eingesetzt, gibt:

$$2r \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sqrt{4r^2 - \left[\frac{2r^2 - \left(r \sin \frac{\alpha}{2} - r \sin \frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(r \cos \frac{\beta}{2} - r \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{r}\right]^2},$$

was schließlich auf folgende Formel führt:

$$\sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}.$$

Analog führt die zweite Berechnung auf die Formel:

$$\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}.$$

25. Die Berechnung für die Sehne der Differenz führt auf folgende Formel:

$$\text{Sehne}\,(b_1 - b_2) = \sqrt{\left(\frac{s_2 \sqrt{4r^2 - s_1^2}}{2r}\right)^2 + (s_1^2 - s_2^2)} - \frac{s_2 \sqrt{4r^2 - s_1^2}}{2r}.$$

Trigonometrisch:

$$2r \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{4r^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot 4r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4r^2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4r^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} - \frac{4r^2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2r}$$

$$= 2r \sqrt{\sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}} - 2r \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ersetzt man $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ unter der Wurzel durch $1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, so erhält man sofort:

$$\sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

Wie man aus dem Gang der Lösung ersieht, ist dieselbe jedenfalls etwas verdorben; Abū Naṣr will auf zwei Arten nachweisen, daß BG

bekannt ist; die erste Art mit den Verhältnissen ist nicht ganz klar, die zweite ist ebenfalls nicht einwandfrei; der Beweis, daß $BE = BZ$, sollte nicht erst am Ende kommen. Eigentümlicherweise entspricht auch die Berechnung gar nicht der Analysis; aus der Proportion: $AD : AE = 2r :$ der Ergänzungssehne von BD würde sofort folgen: $AE = \frac{AD \cdot \text{Ergz.-Sehne}}{2r}$, die Berechnung aber gibt für AE den Ausdruck $\sqrt{AD^2 - BD^2 + BZ^2}$.

Auch die zweite Berechnung (für die Sehne der Summe) ist jedenfalls verdorben, es sollte dort wohl heißen:

„Berechnung für die Sehne der Summe: Addiert man zu der vorhin (bei der ersten Berechnung) erhaltenen Wurzel das erste zu Behaltende, so erhält man die Sehne der Summe."

Und nun ist wahrscheinlich zu dieser Berechnung folgender Zusatz gemacht worden, von dem die ersten Worte weggefallen sind:

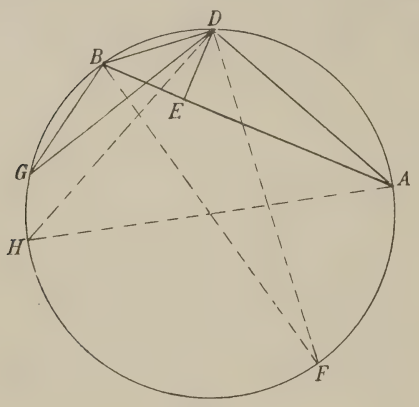


Fig. 60.

„Man kann auch kürzer so verfahren: Man multipliziere die größere Sehne usw." (das Folgende wie in der Übersetzung).

Es ist schade, daß diese Lösung der wichtigen Aufgabe uns nur verstümmelt überliefert worden ist. Wie leicht ergibt sie sich aus der Figur ABŪ NAṢR's, wenn wir noch die beiden rechtwinklichen Dreiecke ADH und BDF [Fig. 60] hineinzeichnen, die den Dreiecken BDE bzw. ADE ähnlich sind, und die konsequenterweise auch ABŪ NAṢR hätte zeichnen sollen. Man hat die beiden Proportionen:

$$BD : BE = 2r : DH \text{ (Ergänzungssehne von } AD)$$
$$AD : AE = 2r : DF \text{ (Ergänzungssehne von } BD),$$

hieraus: $$BE = \frac{BD \cdot DH}{2r}, \qquad AE = \frac{AD \cdot DF}{2r}$$

und hieraus durch Addition:

$$AB = \frac{BD \cdot DH}{2r} + \frac{AD \cdot DF}{2r}$$

und durch Subtraktion:

$$AE - BE = BG = \frac{AD \cdot DF}{2r} - \frac{BD \cdot DH}{2r},$$

d. h. in trigonometrischer Form:

$$AB = 2r \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2r\cos\frac{\beta}{2}}{2r} + \frac{2r\sin\frac{\beta}{2} \cdot 2r\cos\frac{\alpha}{2}}{2r}$$

oder: $$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

und entsprechend die Formel für $BG = 2r\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

26. Da die Auflösung ähnlich der vorigen ist, so lassen wir ihre Wiedergabe in Formeln weg. Wir begreifen aber nicht, warum EL-BĪRŪNĪ das kürzere Verfahren, das ABŪ NAṢR am Schlusse erwähnt, nicht berücksichtigt hat; er hätte bloß noch von H aus die Senkrechte auf BD zu fällen gebraucht, um ein zweites zu Behaltendes in der viel einfacheren Form

$$\frac{s_1\sqrt{\frac{4r^2-s_2^2}{4}}}{r} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\cdot r\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{r}$$

zu bekommen. So hätte er dann ebenfalls unsere heutigen Summen- und Differenzformeln erhalten.

27. Hier kommt EL-BĪRŪNĪ unseren einfachen Formeln schon wieder näher als in der vorhergehenden Aufgabe. Die Formel für die Sehne der Summe heißt nach der Berechnung:

$$\text{Sehne}\,(b_1+b_2) = \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_1 s_2}{2r}\right)^2} + \sqrt{s_2^2 - \left(\frac{s_1 s_2}{2r}\right)^2}$$

in trigonometrischer Form:

$$2r\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 4r^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{4r^2}} + \sqrt{4r^2\sin^2\frac{\beta}{2} - \frac{4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 4r^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{4r^2}}$$

oder: $$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)} + \sqrt{\sin^2\frac{\beta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Es ist dies dieselbe Formel, die ABŪ'L-WEFĀ in seinem *Almagest* gibt.[1])

28. Nach der Berechnung ist:

$$s_8 = \sqrt{r^2 - r(s_4 - r)} = \sqrt{2r^2 - rs_4} = r\sqrt{2 \quad \sqrt{2}}.$$

Wie er am Schlusse sagt, fände man auch dasselbe nach den beiden Lösungen der Aufgabe 18, in denen die Eigenschaften der gebrochenen Linie nicht benutzt sind.

---

1) Vgl. CARRA DE VAUX im Journal asiatique 19_8, p. 416—418.

29. Hier wird die quadratische Gleichung

$$AD^2 = BD^2 + AD \cdot BD$$

mit der Unbekannten $BD = s_{10}$ gelöst nach der Formel:

$$BD = \sqrt{\frac{AD^2}{4} + AD^2} - \frac{AD}{2} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} - \frac{r}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2} - \frac{r}{2}.$$

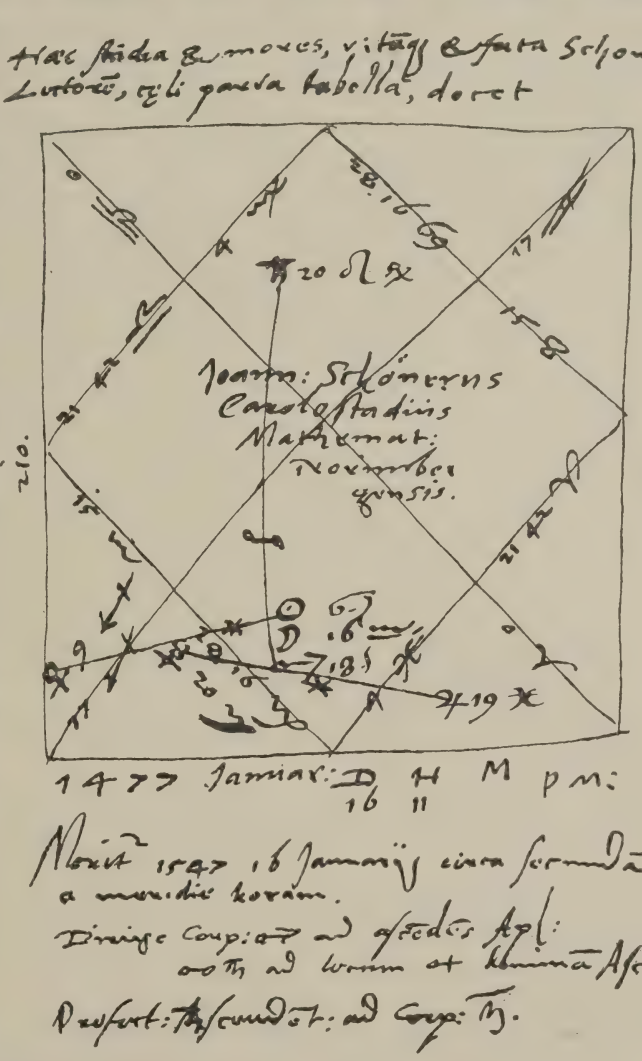
Wir haben gesehen, daß die Abhandlung el-Bīrūnīs verschiedene Beweise und Lösungen von Aufgaben enthält, die nicht ganz einwandfrei sind, es sind dies die Beweise q) und w), und die Aufgaben 9, 25 und 26 und einzelne Stellen in anderen Beweisen und Aufgaben. Einige dieser Darstellungen mögen wohl deshalb fehlerhaft geworden sein, weil vielleicht Randnoten, von denen wir zwei in der ersten Hälfte der Arbeit getroffen haben, durch Abschreiber in den Text aufgenommen worden sind; es scheint dies insbesondere bei der Aufgabe 25 der Fall gewesen zu sein, denn der Beweis dafür, daß, wenn die Sehnen zweier Bogen gegeben sind, auch die Sehne der Differenz dieser Bogen bekannt sei, weicht mit seiner Herbeiziehung von Verhältnissen der Sehnen zum Durchmesser so stark von den übrigen Beweisen Abū Naṣrs ab, daß diese Hypothese sehr viel Wahrscheinlichkeit für sich hat. Aber auch Auslassungen mögen hier und da vorgekommen sein.

Es wäre nicht ausgeschlossen, daß die Abhandlung uns in dem Leidener Manuskript nicht vollständig erhalten wäre. In dem oben zitierten Verzeichnis von el-Bīrūnīs Schriften steht nämlich bei dieser Arbeit bemerkt, sie umfasse 80 Blätter *(waraḳa)*, während die hier übersetzte im Leidener Manuskript bloß deren 20 enthält, allerdings recht klein und eng beschrieben. Solange wir nicht ein zweites Manuskript dieser Abhandlung auffinden, bleibt diese Frage eine unentschiedene; freuen wir uns vorläufig über das viele Schöne und historisch Wertvolle, das die Abhandlung, wie sie uns erhalten ist, darbietet.

A Note on Johannes Schonerus.

By David Eugene Smith in New York.

In examining some manuscripts in the Plimpton Library in New York, I recently came upon a small volume that at one time belonged to Johann Christoph Neustetter. He was the son of Sebastian Neustetter, and a nephew of the celebrated Erasmus Neustetter who was born on November 7, 1523, as this manuscript asserts. Johann was connected with the "Domstift" at Bamberg at the time of his death, and held several offices of prominence. He is addressed by one of his contemporaries as follows: "Nobili et summae spei Adolescenti Joanni Christophoro Neustettero, cognomento Sturmero, Bam-



bergensi, Wirzburgensi et Combergensi Canonico." The volume is made up of horoscopes, partly of fifteenth and sixteenth century rulers and noblemen, partly of other well-known people of the period, and partly of members of the Neustetter family. On looking through these horoscopes to see if any mathematicians were included I came across one of Schonerus, of which I have had a photograph made which is reproduced herewith. Although it gives us little new information concerning the birth and death of this well-known writer, it confirms the dates already known, and adds the hours and minutes after the fashion of the time. It tells us that Johannes Schonerus (Schöner) of Karlstadt, near Würzburg, who afterward lived at Nürnberg, was born on January 16, 1477, at 11 hr. 0 min. P. M., and that he died on January 16, the anniversary of his birth, 1547, about 2 P. M. Those who still take an interest in astrology may care to study this "parva tabella" that was prepared not long after Schonerus died, and estimate the correctness of the prognostications of his ruling stars.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

Über frühere Bemerkungen siehe BM $\mathbf{10}_3$ (1909/10), S. 241—250.

---

2 : 104. Z. 6 wäre es vielleicht angebracht, vor „Jordanus" ein „schon" einzuschalten, um hervorzuheben, daß auch Campanus den Ausdruck „angulus contingentie" benutzte. Vermutlich ist der Ausdruck älter als Jordanus, denn „contingere" und „contingens" waren schon im 12. Jahrhundert gewöhnliche Terme für „berühren" und „Tangent", z. B. bei Platone Tiburtino („circulus ... omnia latera contingens"; *Liber embadorum*, herausgeg. von M. Curtze, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **12**, 1902, S. 118) und bei Gherardo Cremonese („posuit duos circulos sese intrinsecus contingentes", „linea contingens circulum"; *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. Curtze, Leipzig 1899, S. 121, 130). Auch im 13. Jahrhundert findet man dieselbe Terminologie z. B bei Leonardo Pisano („latera omnia contingant circulum"; *Scritti*, pubblic. da B. Boncompagni **2**, Roma 1862, S. 192) und Wilhelm von Moerbek („ducatur enim contingens que *eaz*"; Heron, *Opera* II : 1, ed. L. Nix et W. Schmidt, Leipzig 1901, S. 328) G. Enestrom.

---

2 : 482. Nach den neuesten Forschungen (siehe L. Frati, *Scipione dal Ferro*, Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 1—5) ist Scipione del Ferro am 6. Februar 1465 in Bologna geboren. Nach Frati wurde die Tochter des del Ferro erst nach dem Tode des Vaters am 8. Januar 1527 mit Annibale della Nave verheiratet. Im Jahre 1525 (oder 1526) siedelte del Ferro nach Venedig über, kehrte aber bald nach Bologna zurück. G. Enestrom.

---

2 : 497. Zu den „wesentlichsten Umständen" aus dem Leben Tartaglias könnte vielleicht gerechnet werden, daß er längere Zeit in Verona wohnhaft war, vermutlich als Lehrer der Mathematik. Nach seiner eigenen Aussage am Anfange des 6. Buches der *Quesiti et inventioni* verweilte er dort zehn Jahre, aber aus den Angaben des 9. Buches derselben Arbeit wird man versucht anzunehmen, daß sein Aufenthalt in Verona noch längere Zeit dauerte,

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

nämlich von 1521 (siehe Quesito I) bis 1533 (siehe Quesito XVII). Seine Lehrertätigkeit in Brescia dauerte dagegen nur etwa 18 Monate (siehe *Ragionamenti sopra la sua travagliata inventione;* Ausgabe Venedig 1606, S. 50).

G. Enestrom.

3 : 310. Nach Herrn Cantor (Z. 25—26) behauptete das *Commercium epistolicum,* daß Leibniz die Reihe für $\frac{\pi}{4}$ aus den ihm zugeschickten Briefen[1]) Gregorys an Collins kannte, aber diese Angabe des Herrn Cantor ist ungenau. Aus dem folgenden Absatz geht hervor, daß Herr Cantor die Briefe von Gregory meint, die die „Historiola" von Collins bildeten, und allerdings gibt die zweite Auflage des *Commercium epistolicum* an, daß die „Historiola" 1676 an Leibniz gesandt wurde. Allein die beiden Ausgaben der Streitschrift geben ausdrücklich an (éd. Biot et Lefort S. 93—95), daß Leibniz schon 1675 von der Entdeckung Gregorys Kenntnis bekam, und zwar durch eine von Oldenburg verfertigte lateinische Übersetzung eines englischen Briefes von Collins. Darum sagt auch die „Recensio libri", die bekanntlich von Newton selbst herrührt (a. a. O. S. 18): „In epistola a Collinio scripta dataque 15. Apr. 1675, Oldenburgius ad Leibnitium misit . . . [seriem] pro inventione arcu, cujus tangens data est". Statt „aus den ihm zugeschickten Briefen Gregorys an Collins" sollte also bei Herrn Cantor „aus der ihm 1675 zugeschickten Übersetzung eines Briefes von Collins an Oldenburg" stehen.

Durch diese Verbesserung der Cantorschen Darstellung wird der Absatz S. 310 Z. 27 — S. 311 Z. 15 gegenstandslos und sollte also an dieser Stelle gestrichen werden. Indessen berichtet Herr Cantor darin über die „Historiola" von Collins, und da er sich S. 327 auf diesen Bericht beruft, ist es angebracht, den Absatz zum Gegenstand einer besonderen Bemerkung (siehe unten) zu machen.

G. Enestrom.

3 : 310—311. Was Herr Cantor hier über die „Historiola" von Collins sagt, ist meiner Ansicht nach wesentlich irreleitend, weil es zwei verschiedene Schriften gab, die im *Commercium epistolicum* gelegentlich „Historiola" genannt wurden, und weil Herr Cantor diese zwei Schriften nicht unterscheidet. Die zwei Schriften befinden sich noch im Archiv der „Royal society"; die erste hat den Titel: „Extracts from Mr Gregories letters", die zweite hat die Überschrift: „To Leibnitz the 14th of June 1676 about Mr Gregories remains". Die erste Schrift, die Collins am Anfang eines Briefes an David Gregory vom 11. August 1676 unter dem Namen „Historiola" erwähnte, war eine Sammlung von Briefen und anderen Papieren, die zweite ein Auszug aus dieser Sammlung. Die zweite Schrift ist vermutlich die „Narratio", von der Collins in dem soeben zitierten Brief spricht; in einem undatierten Brief von ihm an Oldenburg wird diese Schrift teils „Account", teils „Extracts from Mr. Gregory's letters, to be lent Monsieur Leibnitz to peruse" genannt, und Newton hat die Schrift wenigstens zweimal ganz einfach „Extracts of Gregory's letters" genannt (siehe *Den Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern,* herausgeg. von C. I. Gerhardt I, Berlin 1899, S. 288, 293). Es lag also sehr nahe, die

1) oder dem ihm zugeschickten Briefe? In den beiden Auflagen der *Vorlesungen* steht „aus den (!) ihm zugeschickten Briefe(!)".

zwei Schriften zu verwechseln, und offenbar haben schon die Herausgeber des *Commercium epistolicum* sich eine solche Verwechselung zu Schulden kommen gelassen, denn sie übersetzten das Wort „Account“ durch „Historiola“ und fügten dem oben zitierten undatierten Brief von Collins eine Bemerkung hinzu, die als eine Bestätigung der Verwechselung betrachtet werden kann. Auch Herr Cantor unterscheidet die zwei Schriften nicht, und eben darum wird seine Darstellung irreleitend. Beachtet man dagegen, daß es zwei von Collins angefertigte Schriften gab, so verschwindet der scheinbare Widerspruch zwischen den Behauptungen des *Commercium epistolicum* und dem Brief von Oldenburg an Leibniz vom 26. Juli 1676. Dieser Brief enthält nämlich eine Abschrift der kleineren „Historiola“, während Leibniz die größere „Historiola“, die für die „Royal society“ zusammengestellt wurde, nie zu Gesicht bekam.

G. Eneström.

3: 327. Herr Cantor behandelt hier die Frage, ob die sogenannte „Historiola“ des J. Collins wirklich 1676 an Leibniz abgegangen sei, und kommt dabei zu dem Ergebnis, daß dies nicht der Fall gewesen ist. Nun wird in der zweiten Auflage des *Commercium epistolicum* ausdrücklich gesagt, die Übersendung habe 1676 stattgefunden, und diesen Ausspruch erklärt Herr Cantor auf folgende Weise:

> Man hatte auf irgend eine Weise Kenntniß davon erhalten, daß am 26. Juli 1676 ein Brief Oldenburgs an Leibniz abgegangen war. Man wünschte nachzuweisen, daß Leibniz damals im Besitze der „Historiola“ war. Man behauptete kurzweg, dieselbe habe jenem Briefe beigelegen, eine kühne Behauptung, wenn Oldenburgs Briefentwurf nicht erhalten war, eine freche Lüge, wenn solches der Fall gewesen sein sollte.

Gegen den ersten Punkt dieses Passus habe ich nichts Wesentliches zu bemerken; ich mache nur darauf aufmerksam, daß das im *Commercium epistolicum* angegebene unrichtige Datum 26. Juni (statt Juli) im 3. Bande (S. 622) der *Opera omnia* von J. Wallis[1]) steht, so daß die Worte: „auf irgend eine Weise“ vielleicht durch eine etwas bestimmtere Angabe ersetzt werden konnten. Dagegen kann ich nicht mit dem zweiten Punkte: „Man wünschte nachzuweisen, daß Leibniz damals im Besitze der Historiola war“ einverstanden sein; vielmehr scheint mir lediglich ein Flüchtigkeitsfehler bei der Herausgabe der 2. Auflage des *Commercium epistolicum* vorzuliegen, und dieser Fehler war eine Folge der Übersetzung des Wortes „Account“ durch „Historiola“ (vgl. oben die Bemerkung zu S. 310—311). In Wirklichkeit bekam ja Leibniz 1676 einen ausführlichen Auszug aus der „Historiola“, und ich verstehe nicht, warum man in England ganz besonders hätte nachweisen wollen, daß Leibniz 1676 im Besitze dieser Schrift selbst war. Allerdings enthielt die größere „Historiola“ den vollständigen Tangentenbrief Newtons, also auch das Beispiel der Tangentenmethode, und auf Grund dieses Umstandes konnte der Verfasser der „Recentio libri“ die boshaften Worte „Methodum ducendi tangentes, quam methodum D. Leibnitius differentialem postea vocavit“ hinzufügen. Aber sicherlich legten Newton und seine Anhänger auf diese Worte keinen besonderen Wert, denn genau dasselbe Verfahren hatte Sluse schon 1673 in den

1) Auf Grund eines Druckfehlers steht BM 10_3, 1909/10, S. 77, Z. 14 v. u. „23 Julii“ statt „26 Julii“.

Philosophical transactions (**7**, S. 5143—5147) veröffentlicht und vielleicht ließ Oldenburg eben darum das Beispiel weg.

Noch weniger kann ich mit dem Schlusse der Cantorschen Erklärung einverstanden sein. Gern gebe ich zu, daß man zuweilen geneigt sein kann, das Wort „Frechheit“ zu benutzen, z. B. wenn man die zuversichtlich ausgesprochenen Behauptungen und Urteile gewisser gelobter mathematisch-historischer Arbeiten liest, aber meiner Ansicht nach ist es besser, das Wort nicht anzuwenden. Noch schlechter ist meines Erachtens das Wort „Lüge“, wenn es sich um mathematisch-historische Fragen handelt, weil man überhaupt nie mit Sicherheit entscheiden kann, wann eine absichtliche Unwahrheit vorliegt (vgl. z. B. BM 8_3, 1907/8, S. 68—69). Besonders unsympathisch wirkt in diesem Falle der Ausdruck „freche Lüge“ des Herrn Cantor und zwar aus zwei verschiedenen Gründen. Einerseits wird nämlich die unrichtige Angabe, die Herr Cantor durch diesen Ausdruck charakterisiert, sofort erklärt, wenn man sich erinnert, daß es zwei Aktenstücke mit wesentlich demselben Inhalt gab (siehe oben). Anderseits hat Herr Cantor selbst eine unrichtige Angabe ganz ähnlicher Art gebracht, als er S. 79 behauptet, daß Leibniz gegen April 1675 seine Reihe für $\frac{\pi}{4}$ an Oldenburg sandte, obgleich es aus dem von Herrn Cantor benutzten Aktenstück deutlich hervorgeht, daß Leibniz darin nur versprach, seine Reihe unter einer gewissen Bedingung zu senden (siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 70—71).

G. Eneström.

---

3 : 406. Die Angabe (Z. 22—24): „Er (Newton) gibt zu verstehen, man könne Formeln für die Summen höherer Wurzelpotenzen, so für die Summe der 6. Potenzen, finden, wenn auch ohne dieselben anzugeben“ ist nicht ganz genau. In Wirklichkeit gibt Newton ausdrücklich an, wie die Rekursionsformel für die Summe der r^{ten} Potenzen einer Gleichung n^{ten} Grades gebildet werden soll, wenn $r \leq n$. Er behauptet sogar ausdrücklich, daß diese Rekursionsformel „in infinitum“ d. h. auch für $r > n$ gilt, eine Behauptung, die freilich formell beanstandet werden kann, da man nicht aus seinen Ausführungen deutlich ersieht, wie das letzte Glied der Formel für $r > n$ gebildet werden soll.

G. Eneström.

---

3 : 500. Herr Cantor gibt hier den vollständigen Titel von Stockhausens *Historischen Anfangsgründen der Mathematik* an und charakterisiert die Schrift auf folgende Weise:

> Das Büchelchen hat dadurch ein gewisses Interesse, daß in ihm von Berühmtheiten des 17. und 18. Jahrhunderts die Rede ist, die heute kein Mensch mehr kennt, während wirklich hervorragende Mathematiker nur ganz obenhin genannt werden. Eine gelungene Verwechslung ist die des John Newton, des Verfassers der 1658 gedruckten *Trigonometria Britannica,* mit Isaac Newton. Da des Letzteren Geburtsjahr 1642 ausdrücklich angegeben ist, so meinte Stockhausen offenbar, Newton habe jene Trigonometrie mit 16 Jahren veröffentlicht.

In betreff dieser Charakteristik ist folgendes zu bemerken.

I. Die Benennung „Büchelchen“ ist kaum angebracht, denn die Schrift enthält (40) + 442 + (46) = 528 Druckseiten, und das Format (etwa das der Heibergschen Euklid-Ausgabe) ist nicht für ihre Zeit ungewöhnlich klein.

II. Es ist richtig, daß einige hervorragende Mathematiker, besonders aus der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts nicht und andere nur im Vorübergehen erwähnt werden, aber dieser Umstand erklärt sich sofort, wenn man bemerkt, daß die spezielle Geschichte der reinen Mathematik eigentlich nur die drei Abschnitte: Rechenkunst, Geometrie, Trigonometrie umfaßt, wozu am Ende des Buches (nach der Baukunst!) ein kurzer Abschnitt über die Geschichte der Algebra hinzugefügt ist. Man könnte also sagen, daß STOCKHAUSEN, abgesehen von den acht Seiten 435—442, die sich auf die analytische Geometrie und die höhere Analysis beziehen, nur die Geschichte der elementaren reinen Mathematik behandelt.

III. Es ist richtig, daß STOCKHAUSEN in den Abschnitten über die Geschichte der reinen Mathematik viele Personen nennt, die man nicht in den CANTORschen *Vorlesungen* wiederfindet, und daß er sehr oft das Wort „berühmt" anwendet. Allein bei ihm hat dies Wort offenbar die Bedeutung „bekannt", und als bekannt betrachtet er vorzugsweise Personen, die Lehrbücher oder zusammenfassende Arbeiten der Mathematik herausgegeben haben. Nebenbei bemerke ich, daß STOCKHAUSEN mit besonderer Vorliebe Lehrer der Mathematik erwähnt. Beispielsweise beginnt STOCKHAUSEN einen langen Absatz (S. 58—64) auf folgende Weise: „Auf Teutschen Universitäten, Academien und Gymnasien sind übrigens noch in den neuesten Zeiten als öffentliche Lehrer der Mathematik bekannt worden, folgende Herren", und was danach folgt, kann gewissermaßen als ein Adreßbuch der damaligen deutschen Mathematiklehrer betrachtet werden.

IV. Da Herr CANTOR die Verwechslung des JOHN NEWTON mit ISAAC NEWTON ironisch „gelungen" nennt, so kann bemerkt werden, daß sogar bei LEIBNIZ wenigstens einmal dieselbe Verwechslung vorkommt (siehe *Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. GERHARDT **7**, Halle 1863, S. 214 Z. 29—31: „sed longius rem provexit JOHANNES (!) NEUTONUS Anglus, praestantissimi ingenii Mathematicus, qui ex quacunque aequatione radicem extrahit ope seriei infinitae").

V. Es ist mir unverständlich, wie Herr CANTOR im Jahre 1901 die letzten Zeilen seines von mir zitierten Passus zum Abdruck bringen konnte. Bekanntlich hatte Herr CANTOR sowohl in der 1. (S. 112) wie in der 2. (S. 123—124) Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen* angegeben, daß JOHANNES DE MURIS etwa 1310 geboren war, und daß die Abhandlung *Speculum musicae* aus dem Jahre 1321 stammt, so daß JOHANNES DE MURIS eine Schrift mit etwa 11 Jahren verfaßt hätte, wenn die beiden Angaben richtig wären; anderseits hatte Herr CANTOR im Vorworte (S. IV) der 2. Auflage hervorgehoben, daß auf Grund des Datums 1321 der Abhandlung *Speculum musicae* das Geburtsjahr 1310 unrichtig sein muß. Herr CANTOR hatte also 1901 einen rein persönlichen Beleg dafür, daß die zwei bei STOCKHAUSEN vorkommenden Jahreszahlen 1642 und 1658 nicht „offenbar" (!) eine einzige Deutung zulassen.

VI. Wenn die soeben zitierten Zeilen der *Vorlesungen* einen Sinn haben, so bemängelt Herr CANTOR STOCKHAUSEN, weil dieser nicht sofort beobachtete, daß eine im Jahre 1642 geborene Person nicht 1658 die *Trigonometria britannica* veröffentlichen konnte. Aber diese Bemängelung kann selbst beanstandet werden Allerdings ist es nicht gewöhnlich, daß Mathematiker schon mit 16 Jahren Schriften veröffentlichen, aber als unmöglich kann es nicht bezeichnet werden. Nach der gewöhnlichsten Angabe war F. W. A. MURHURD am 7. Dezember 1779 geboren, und er veröffentlichte 1796 vier verschiedene

Abhandlungen. Von Bl. Pascal berichtet Herr Cantor selbst (*Vorlesungen* 2^2, S. 679): „Sicher (!!) ist, daß er im Alter von erst 16 (!!) Jahren ein Werk über Kegelschnitte verfaßt hat", und von A. C. Clairaut heißt es (*Vorlesungen* 3^2, S. 779): „Mit kaum 16 (!!) Jahren reichte Clairaut der Pariser Akademie eine große Abhandlung ein."

Aus den oben angeführten Gründen möchte ich empfehlen, den Bericht über die *Historischen Anfangsgründe der Mathematik* auf ganz andere Weise zu redigieren. Anderseits erlaube ich mir, darauf hinzuweisen, daß die Notizen, die Stockhausen über seine Zeitgenossen bringt, und die auf Grund des guten Namenregisters leicht aufzufinden sind, noch heute nützlich sein können. Beispielsweise hat Siegmund Günther kürzlich (*L. Eulers Verdienste um die mathematische und physikalische Geographie;* Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. **1**, 1909, S. 481) den Astronom Winsheim erwähnt, mit der Bemerkung: „Über Winsheims Persönlichkeit und Leistungen sind wir eine Mitteilung zu machen nicht imstande". Allein wenn Günther auf den Gedanken gekommen wäre, das Register von Stockhausens Arbeit einzusehen, so würde er sofort die Angabe bekommen haben: „Christian Nicol. von Windsheim [stand noch neuerlich] als dritter [Professor der Astronomie an der Akademie der Wissenschaften in St Petersburg]", und auf Grund dieser Angabe hätte Günther sehr leicht weitere Aufschlüsse über Winsheim erhalten können. Der wirkliche Fachmann auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete wird darum ganz gewiß nicht versuchen, die Stockhausenschen Notizen über nunmehr wenig bekannte Mathematiker lächerlich zu machen, weder dadurch, daß er diese Persönlichkeiten „Berühmtheiten, die heute kein Mensch mehr kennt", nennt, noch auf andere Weise.

Betrachtet man dagegen Stockhausens Arbeit als ein Lehrbuch der Geschichte der Mathematik, so muß zugegeben werden, daß sie nicht zu empfehlen ist, auch wenn man von der Behandlung der Geschichte der höheren Mathematik absieht. Ich habe schon oben im Vorübergehen betont, daß Stockhausen vorzugsweise Lehrer der Mathematik und Verfasser von mathematischen Lehrbüchern erwähnt. Seine Literaturangaben sind darum recht unvollständig, und über die Geschichte der mathematischen Theorien gibt er nur wenige Aufschlüsse; auch unrichtige Angaben können bei ihm ohne Schwierigkeit nachgewiesen werden. Anderseits hat Stockhausen in der Vorrede ausdrücklich hervorgehoben, daß sein Buch ursprünglich für seinen eigenen Gebrauch bestimmt war, und daß es gedruckt wurde, weil ihm kein bequemes Handbuch der Geschichte der Mathematik bekannt war.

Bevor ich diese kleine Ehrenrettung Stockhausens schließe, erlaube ich mir, aus seiner Arbeit eine Stelle (S. 6—7) zum Abdruck zu bringen, an welcher von dem Nutzen des Studiums der Geschichte der Mathematik gesprochen wird, und welche Stelle meines Erachtens noch heute gelesen zu werden verdient.

> Die Frage, ob die Historie von der Mathematik einem, der diese Wissenschaft zu erlernen bemühet ist, nöthig und nützlich sey? möchte mancher mit Nein beantworten, und das vielleicht nur aus diesen Scheingründen: Weil 1. einer ein guter Mathematicus seyn könnte, ohne die Historie seiner Wissenschaft zu wissen. 2. Weil die Gelehrten sich um keine Art der Historie weniger bekümmert hätten, als um diejenige, welche die Schicksale der Mathematik erzählet, und 3. weil auch in den

mathematischen Vorlesungen wenig oder nichts von dieser Historie gedacht würde, daher dieselbe so nöthig und nützlich nicht seyn müste. Ich gebe alles dieses gerne zu: nur die Folgerung leugne ich. Es ist wahr, es kann einer eine gründliche Erkenntniß in der Mathematik erlernen, ohne viel von der Historie derselben zu wissen: allein würde es nicht besser seyn, wenn sich diese bey jener fände? Würde man nicht viele Lehrsätze deutlicher erklären können, wenn man zugleich ihren Ursprung oder die Umstände ihrer Erfindung wüßte? Würde dieses nicht die schönste Gelegenheit zu vielen neuen Erfindungen geben? Und würde nicht wenigstens mancher viel leichter und geschwinder zu einer gründlichen Erkenntniß dieser schönen Wissenschaft gekommen seyn, wenn er sich besser mit der Geschichte derselben bekannt gemacht, und also die diensamste Bücher derselben zu erwählen gewußt hätte? Es ist ferner auch wahr, daß keine Historie so schlecht ausgearbeitet, als die von der Mathematik ... So fehlet es ja auch gewiß nicht an solchen Mathematicis, welche den Nutzen von der Historie der Mathematik öffentlich in ihren Schriften angepriesen ... Der dritte Einwurf hat fast gar keiner Widerlegung nöthig. Denn wie könnte es wohl möglich seyn, so viele Disciplinen in einem Jahre zu erklären, wie gewöhnlich, und auch zugleich von allen und jeden eine Historie zu geben?

G. Enestrom.

---

3 : 550. Der Passus (Z. 20—22): „Euler mußte froh sein, als Schiffslieutenant in der russischen Flotte Verwendung zu finden", soll gestrichen werden, weil die Angabe nur eine Phantasie des Herrn Cantor ist; freilich ist es in diesem Falle leicht, zu finden, wie die Phantasie entstand. In seinem *Eloge de Léonard Euler* (St Pétersbourg 1783, S. 12) berichtet nämlich N. Fuss, daß sich Euler nach dem Tode der Kaiserin Catharina I. entschloß, Dienste bei der Flotte zu nehmen, und daß ihm der Admiral Sievers eine Leutnantsstelle anbot. Nun bin ich persönlich überzeugt, daß dieser Bericht von N. Fuss ungenau ist, denn weder in den Briefen Eulers aus der Zeit 1728—1730, noch in den Akten der Petersburger Akademie habe ich die leiseste Andeutung von dem fraglichen Beschlusse Eulers auffinden können, und wenn es sich um solche Umstände handelt, die N. Fuss nur vom Hörensagen haben konnte, ist sein *Eloge* gar keine zuverlässige Quelle. Anderseits ist diese Frage von untergeordneter Bedeutung, denn N. Fuss fügt selbst hinzu, daß sich die Umstände glücklicherweise zum Vorteil der Akademie änderten, so daß Euler die Stelle eines Professors der Naturlehre erhielt. Darum sagt z. B. R. Wolf, der gewissenhaft die Angaben von N. Fuss wiedergegeben hat, daß Euler im Begriffe war, das Anerbieten des Admirals Sievers anzunehmen, als sich die Verhältnisse änderten (*Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz* **4**, Zürich 1862, S. 92). Die angebliche Verwendung Eulers als Schiffsleutnant ist, wie gesagt, eine Phantasie des Herrn Cantor, die wohl zum erstenmal 1877 im 6. Bande der *Allgemeinen deutschen Biographie* in die Öffentlichkeit drang und später von anderen Verfassern (siehe z. B. M. Rühlmann, *Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik*, Leipzig 1885, S. 181) als eine Tatsache betrachtet worden ist.

G. Enestrom.

3 : 587. In dem Berichte über den d'Alembertschen Beweis des Fundamentaltheorems der Algebra kommt folgender Passus vor:

> Ein imaginärer Wert für x eingesetzt wird $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx$ mit einem bald reellen, bald complexen, jedenfalls von A verschiedenen Werte hervortreten lassen.

Nun ist freilich die Darstellung d'Alemberts an vielen Stellen nichts weniger als deutlich, aber dennoch sind die Worte: „bald reellen, bald complexen" sehr auffällig. D'Alembert setzt $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx = y$, also ist y die Gleichungskonstante mit verändertem Zeichen, und diese ist nach der Voraussetzung immer eine reelle Größe. Bei d'Alembert steht (S. 189) „à tous les points A, C, D, &c. on élève des lignes, réelles ou imaginaires, qui représentent les quantités réelles ou imaginaires dont la substitution à la place de x fait évanouïr tous les termes du multinomie", und vermutlich beruhen die oben beanstandeten Worte des Herrn Cantor auf einem sonderbaren Mißverständnis dieser Stelle bei d'Alembert. Beiläufig bemerke ich, daß der von Herrn Cantor selbst herrührende Zusatz: „jedenfalls von A verschiedenen" offenbar eine Unrichtigkeit enthält, was schon aus dem einfachen Beispiel $x^3 - x^2 + x = y$, $h = 1$ hervorgeht. Hier ist nämlich $A = 1 - 1 + 1 = 1$, und wenn man für x den imaginären Wert $\sqrt{-1}$ einsetzt, bekommt man für y den Wert $-\sqrt{-1} + 1 + \sqrt{-1} = 1$, also genau denselben Wert wie früher.

Abgesehen von den oben bemerkten Fehlern kann man gegen den Cantorschen Bericht die Ausstellung machen, daß gerade der wichtigste Punkt des d'Alembertschen Beweises stillschweigend übergangen wird. Einen sehr guten Bericht hat bekanntlich Lagrange in seiner Abhandlung *Sur la forme des racines imaginaires des équations* (Nouv. mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 1772, gedruckt 1774, S. 222—258) gebracht. G. Enestrom.

---

3 : 590—591. Der Cantorsche Bericht über das Verfahren Maclaurins, um Wurzeln aus selbst mit Irrationalitäten behafteten Binomien auszuziehen, gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß. Erstens ist es ein wenig auffällig, daß Herr Cantor hier das Verfahren so ausführlich behandelt, während er S. 399 stillschweigend übergeht, daß dasselbe Verfahren für beliebige Wurzelexponenten schon in der *Arithmetica universalis* Newtons vorkommt (vgl. BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 78). In Wirklichkeit stimmt das Verfahren wesentlich mit dem überein, das Descartes schon 1640 durch J. von Waessenaer veröffentlichte (vgl. BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 63—64) und der Bericht kommt also in den *Vorlesungen* eigentlich ein ganzes Jahrhundert zu spät.

Aber noch auffälliger ist, daß Herr Cantor einen so ausführlichen Bericht gebracht hat, ohne zu untersuchen, ob derselbe verständlich sei oder nicht. Daß nicht alles in Ordnung ist, wird ein Mathematiker schon aus dem Passus (S. 590 Z. 36—S. 591 Z. 1); „und $2x = r + \frac{n}{r}$, ein Wert, den man zu berechnen imstande ist und der $2t$ genannt wird, so daß $x = t = \frac{r + \frac{n}{r}}{2}$" in Verdacht haben, denn warum sollte Maclaurin für die Größe x ein neues Zeichen t einführen? Allein sobald man die Schlußformel $\sqrt[c]{A \pm B} = t \pm \sqrt{t^2 - n}$ gesehen hat, weiß man mit Sicherheit, daß der Bericht einen wesentlichen

Fehler enthalten muß, denn teils ist $t = \frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ im allgemeinen keine ganze Zahl, wenn A^2 und B^2 ganze Zahlen sind, teils kann die Schlußformel im allgemeinen kein exaktes Resultat geben, weil sie implizit den angenäherten Wert r enthält. In Wirklichkeit bekommt man ja durch Einsetzen des Wertes von t in die Schlußformel

$$\sqrt[c]{A \pm B} = \frac{r + \frac{n}{r}}{2} \pm \frac{r - \frac{n}{r}}{2},$$

also $\sqrt[c]{A + B} = r$, d. h. eben den angenäherten Wert, von dem man ausging. Der Fehler des Cantorschen Berichtes besteht natürlich darin, daß bei Maclaurin t nicht gleich $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ ist, sondern die ganze Zahl bedeutet, die der Zahl $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ am nächsten ist, und dadurch wird die Cantorsche Herleitung der Schlußformel fehlerhaft. Beiläufig bemerke ich, daß bei Maclaurin r eine ganze Zahl ist, und daß der Cantorsche Bericht, auch abgesehen von dem wesentlichen Fehler, keineswegs einwandfrei ist. Beispielsweise sagt Herr Cantor: „Ist A oder B imaginär, so verweist Maclaurin auf De Moivre". Allein in Wirklichkeit widmet Maclaurin den Binomien der Form $A \pm B\sqrt{-1}$ vier Druckseiten; erst am Ende seiner Behandlung dieses Falles verweist er auf De Moivre, und zwar auf einen in den *Vorlesungen* nicht erwähnten Anhang zur Algebra Saundersons sowie auf einen Artikel in den Philosophical transactions **40**, 1738, S. 463—478. G. Enestrom.

---

3 : 894. In meiner früheren Bemerkung (BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 349) soll Z. 4 v. u. „im April 1740" statt „etwa 1741" gesetzt werden (siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 276 die Bemerkung zu **3** : 688). Ferner soll Z. 6—14 v. u. statt: „und nach P. H. Fuss ... verfaßt wurde" gesetzt werden:

„und nach den Protokollen wurde diese Abhandlung am 30. März 1739 der Petersburger Akademie vorgelegt". G. Enestrom.

---

3 : 894. Hier könnte bemerkt werden, daß Daniel Bernoulli schon im April 1740 die unvollständige lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten integriert hatte (siehe *Excerpta ex litteris a D. Bernoulli ad L. Euler;* Comment. acad. sc. Petrop. **13** [1741/3], 1751, S. 11—14). Allerdings wurde Bernoulli von Euler angeregt, sich mit diesem Gegenstand zu beschäftigen, und Euler hatte ihm brieflich das Resultat für $n = 4$ mitgeteilt; dann entdeckte Bernoulli selbst die allgemeine Methode, auch für den Fall, daß die Hilfsgleichung mehrere gleiche Wurzeln enthält.

Am Ende der Seite sollten die Worte: „von dem 1743 gezeigten Wege" modifiziert werden. In Wirklichkeit bezieht sich der Nachweis bei Euler nur auf den Versuch, das Integral einer Differentialgleichung dritter Ordnung durch drei sukzessive Integrationen zu bestimmen. Aber bekanntlich hatte d'Alembert in seiner Abhandlung *Suite des recherches sur le calcul intégral* (Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin **4** (1748), 1750, S. 289) ein besonderes

Verfahren angegeben, um eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zu integrieren, und bei diesem Verfahren weicht man tatsächlich „von dem 1743 gezeigten Wege“ ab. Nun wurde nach den Protokollen die *Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota* Eulers am 21. September 1750 der Petersburger Akademie vorgelegt, also höchstwahrscheinlich nach dem Erscheinen der Abhandlung von d'Alembert. Durch den Cantorschen Ausspruch muß man also versucht werden anzunehmen, daß Euler auch in betreff des Verfahrens d'Alemberts „fast unüberwindliche Rechnungsschwierigkeiten“ nachgewiesen habe; in Wahrheit wird bei Euler auch nicht angedeutet, daß der 1743 gezeigte Weg der einzige sei, der zum Ziele führe.

G. Enestrom.

Anfragen.

148. Sätze über ebene gemischtlinige Figuren im Mittelalter. Bekanntlich beschäftigt sich Euklides in den *Elementa* nur ausnahmsweise mit ebenen gemischtlinigen Winkeln oder Figuren. Von gemischtlinigen Winkeln behandelt er im Vorübergehen (III: 16, 31) den Kontingenzwinkel sowie die Winkel der Kreissegmente, von gemischtlinigen Figuren die Kreissegmente und die Kreissektoren. Dagegen scheinen die gemischtlinigen Figuren in den voreuklidischen Lehrbüchern eine bedeutendere Rolle gespielt zu haben (siehe J. L. Heiberg, *Mathematisches zu Aristoteles;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **18**, 1904, S. 25—26), und auch im Mittelalter kommen Sätze über Figuren dieser Art vor, die nicht von Euklides behandelt worden sind. Ein solcher Satz findet sich am Ende des 3. Buches der *Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri IV* (siehe die Ausgabe von M. Curtze, Thorn 1887, S. 27—28), und die fraglichen Figuren werden auf folgende Weise gebildet. Sei ABC ein beliebiges ebenes geradliniges Dreieck, so verlängert man die Seite AB von A aus und konstruiert einen Kreis, der die Seite AC und die Verlängerung von BA bzw. in D und E berührt. Dann ist die Figur $EDCB$ von drei Geraden und einem Kreisbogen gebildet; von den vier Winkeln der Figur sind zwei geradlinig, der dritte ist ein Kontingenzwinkel und der vierte 180^0 größer als der Kontingenzwinkel. Jordanus konstruiert eine Reihe solcher Figuren und weist auf Grund der Konstruktion nach, daß jede Figur kleiner als die vorhergehende ist.

Es wäre von Interesse ausfindig zu machen, ob ähnliche Figuren von anderen Mathematikern vor Jordanus behandelt worden sind.

G. Enestrom.

Rezensionen.

Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XX ed ultimo. Firenze, Barbera 1909. 589 + (1) S. 4^0.

Vor 22 Jahren berichtete ich in dieser Zeitschrift ($\mathbf{2}_2$, 1888, S. 90) über den Plan der von Herrn A. Favaro in Angriff genommenen neuen Auflage der sämtlichen Werke Galileis, und vier Jahre später gab ich (a. a. O. $\mathbf{6}_2$, 1892, S. 26—27) über die zwei ersten Bände dieser Auflage Auskunft. Seitdem sind, wie die Abteilung: „Neuerschienene Schriften" der Bibliotheca Mathematica zeigt, neue Bände regelmäßig erschienen, und im Jahre 1909 wurde das Unternehmen von Herrn Favaro durch die Herausgabe des 20. Bandes abgeschlossen.

Dieser Band ist im wesentlichen ein Registerband. Nach einem Bericht (S. 9—15) über die Grundsätze, die bei der Bearbeitung der Register befolgt wurden, bringt Herr Favaro: 1. „Indice dei volumi" (S. 17—46), 2. „Indice dei facsimili" (S 47—53), 3. „Indice dei nomi e delle cose notabili" (S. 55—357), 4. „Indice biografico" (S. 359—561). Dann folgen (S. 563—589) einige kürzere Nachträge zum Briefwechsel und zu den „Documenti" des 19. Bandes der Werke.

Das größte Interesse bietet natürlich das zweite Register dar, das ein Namen- und Sachregister ist und etwa 300 zweispaltige Quartseiten umfaßt. Die 19 früheren Bände der „edizione nazionale" bringen den Forschern, die quellenmäßige Auskunft über das Leben und die wissenschaftliche Wirksamkeit Galileis suchen, eine sehr vollständige und zuverlässige Sammlung von Aktenstücken, und von diesem Gesichtspunkte aus kann die Auflage als mustergültig bezeichnet werden. Anderseits hat Herr Favaro bei der Herausgabe dieser Bände nur ausnahmsweise etwas getan, um den Bearbeitern der Geschichte eines besonderen Gebietes der reinen oder angewandten Mathematik zu ermöglichen, sich über die etwaige Tätigkeit Galileis auf diesem Gebiete leichte Auskunft zu verschaffen. Wenn man z. B. zu wissen wünschte, ob und auf welche Weise Galilei die Streitfrage über den Kontingenzwinkel behandelt hat, und wenn man nicht anderwärts etwas von dieser Sache erfahren hätte, so müßte man alle Abhandlungen und Briefe Galileis, die möglicherweise in Betracht kommen könnten, Seite für Seite durchsehen; die einzelnen Bände enthalten nämlich keine Sachregister, aus denen man entnehmen kann, welche Gegenstände darin behandelt worden sind. Durch den „Indice dei nomi e delle cose notabili" beabsichtigt Herr Favaro diesem Mangel abzuhelfen, und in Wirklichkeit bekommt man dadurch in gewissen Fällen die gewünschten Aufschlüsse; beispielsweise gibt es S. 66 ein Schlagwort „Angolo del contatto",

das auf den bekannten Brief Galileis an G. C. Gloriosi vom 30. Oktober 1635 verweist. Untersucht man indessen genauer das Register des Herrn Favaro, so dürfte man bald finden, daß er bei der Bearbeitung desselben nicht vorzugsweise auf die wissenschaftliche Wirksamkeit Galileis Bezug genommen hat, sondern in erster Linie das Studium des Menschen Galileo Galilei und seiner Beziehungen zu den Zeitgenossen erleichtern wollte. Diesen Umstand hat Herr Favaro selbst durch den Titel des Registers angedeutet, und in der Tat ist der „Indice dei nomi" der wichtigste Bestandteil desselben. Um nur einen einzigen Beleg hierfür zu geben, bemerke ich, daß das Schlagwort: „Cavalieri, Bonaventura" mehr als sechs Spalten in Anspruch nimmt, und daß die Angaben, die gebracht werden, zum größten Teil die rein persönlichen Beziehungen zwischen den zwei Gelehrten betreffen. Dagegen habe ich durch Stichproben gefunden, daß es oft sehr schwierig oder sogar unmöglich ist, vermittels des Registers die Stellen aufzufinden, wo sich Galilei über gewisse spezielle Gegenstände geäußert hat. Beispielsweise hat Galilei am Anfange der „Giornata prima" des *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* den Satz ausgesprochen, daß es nur drei Gerade geben kann, die in einem Punkte zusammentreffen, und so beschaffen sind, daß jede derselben auf den zwei anderen senkrecht steht. Will man nun das Register benutzen, um die betreffende Stelle (S. 38 des 7. Bandes der „edizione nazionale") wiederzufinden, so sucht man wohl erst das Schlagwort „Geometria" auf, aber dort (S. 200) handelt es sich nur um Geometrie im allgemeinen, und Verweise auf die speziellen geometrischen Schlagwörter fehlen leider vollständig. Man muß also selbst die passenden Schlagwörter aussinnen, und kommt wohl dabei in erster Linie auf „Angolo" (S. 66), „Linea" (S. 230) und „Punto" (S. 298) zu denken, aber keines dieser Schlagwörter bringt die gewünschte Auskunft. Dagegen wird unter „Dimensioni dei corpi" auf S. 34 des 7. Bandes verwiesen, und dadurch könnte man vielleicht zuletzt auf die Seite 38 desselben Bandes geführt werden. Durchaus erfolglos ist indessen mein Versuch gewesen, auf Grund des Registers die Stelle zu finden, wo Galilei „das rechtwinklige Achsenkreuz zur Festlegung der Punkte im Raume benutzte" (siehe E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik* II: 1, zweite Auflage, Leipzig 1910, S. 86); vermutlich bezieht sich diese Angabe auf eine Stelle der Seite 37 des 7. Bandes, die gewissermaßen vom rechtwinkligen Achsenkreuz im Raume handelt.

Nun kann ja Herr Favaro einwerfen, daß er nur ein Register der „cose notabili" versprochen hat, und daß die von mir erwähnten Sachen nicht besonders wichtig sind. Natürlich ist dieser Einwurf nicht unbegründet, aber für die mathematisch-historische Forschung wäre es zu wünschen, daß man bei der Herausgabe der sämtlichen Werke älterer Mathematiker möglichst vollständige Sachregister hinzufügte, wie es z. B. die Herausgeber der *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens* getan haben.

Das vierte Register des Herrn Favaro hat den Zweck, biographische Notizen über die Personen zu bringen, die in den 19 früheren Bänden erwähnt worden sind, und ist also ein Ersatz für die Fußnoten biographischen Inhalts, die man gewöhnlich in den Ausgaben der Werke älterer Mathematiker findet. Ohne Zweifel kann es angebracht sein, solche biographische Angaben zu einem besonderen Verzeichnis zu vereinigen, wenn es sich um Persönlichkeiten handelt, die einen gewissen Einfluß auf das Leben und Wirken Galileis geübt haben. Auf der anderen Seite sind natürlich in der Auflage des Herrn

Favaro viele Männer erwähnt, die eigentlich gar nichts mit Galilei zu tun gehabt haben, und es hat keinen Sinn, alle diese in die biographische Liste aufzunehmen. Herr Favaro ist auch derselben Ansicht gewesen, und er hat sich darum auf die Zeitgenossen Galileis beschränkt. Selbstverständlich kann man darüber streiten, ob diese Art und Weise, die Grenzen der Personenliste zu bestimmen, die zweckmäßigste gewesen ist; Herr Favaro betont ausdrücklich, daß er früher an andere Lösungen der schwierigen Frage gedacht hatte. Seine größte Bedeutung bekommt jedenfalls das vierte Register durch die Angaben über die Männer, die direkt oder indirekt mit Galilei in Beziehung gestanden haben, und von diesen Angaben sind sehr viele aus ungedruckten Quellen entnommen. Leider ist es zuweilen unmöglich gewesen, genauere biographische Notizen über Persönlichkeiten zu bekommen, die in der Lebensgeschichte Galileis eine wichtigere Rolle gespielt haben, so z. B. hat Herr Favaro fast gar nichts über die Lebensumstände Johann Eitel Zugmessers ermitteln können; allerdings hat er endgültig festgestellt, daß Zugmesser aus Speier („Spirensis") und nicht aus Steiermark („Styrensis", vgl. *Kepleri Opera omnia*, ed. Ch. Frisch **2**, Frankfurt 1859, S. 573) stammte.

In betreff der biographischen Notizen über Personen, die eigentlich nichts mit Galilei zu tun gehabt haben, erlaube ich mir zu bemerken, daß es meines Erachtens angebracht gewesen wäre, diese Notizen abzukürzen. Dadurch hätte man auch vermieden, durchaus unnötigerweise ungenaue oder irreleitende Angaben zu bringen, z. B. in betreff des Debeaune (S. 387), dem „alcuni studî sulla costruzione (!) delle equazioni" zugewiesen werden; bekanntlich lautet der Titel der fraglichen Schrift: *De aequationum natura, constitutione (!), et limitibus*, und sie enthält gar nichts über Konstruktion von Gleichungen im gewöhnlichen Sinne dieses Ausdruckes. Zu einer ähnlichen Bemerkung gibt die Angabe (S. 557) Anlaß, daß in dem *Hemisphaerium dissectum* (1648) von R. White „tentativi di integrazioni" vorkommen.

Bevor ich diese kurze Besprechung des Registerbandes der neuen Galilei-Ausgabe schließe, kann ich nicht umhin, Herrn Favaro zu beglückwünschen, daß sein großzügig geplantes Unternehmen, das seit Jahrzehnten seine Zeit und seine Arbeitskraft in Anspruch genommen hat, jetzt zu einem guten Ende gebracht worden ist. Die 20 Bände sind für die Personengeschichte eine Fundgrube von wertvollen Notizen; auch die Geschichte der mathematischen Wissenschaften wird von dem darin enthaltenen Material großen Nutzen ziehen.

Stockholm. G. Enestrom.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ahrens, 11.
André, 42.
Appell, 39.
Auerbach, 10.
Berberich, 36, 41.
Björnbo, 19.
Bonola, 8
Bricard, 39.
Bryk, 31.
Buchka, 1.
Cajori, 25.
Cantor, 5.
Cardinaal, 4.
Decourdemanche, 9.
Dingeldey, H., 43.
Eneström, 2, 28, 33.
Favaro, 22—24.
Galilei, 23.
Gauss, 30.
Gram, 26.
Gray, 27.
Hartmann, 15.
Hasselberg, 37.
Heiberg, 14.
Ibn al Haitam, 20.
Kapteyn, 4.
Kaye, 17, 18.
Klein, 29.
Kluyver, 4.
Lebon, 35.
Liebmann, 8.
Lind, 7.
Lindstedt, 38.
Loria, 3, 41.
Manville, 34.
Miller, 32.
Olbers, 30.
Schilling, 30.
Schoute, 4.
Smith, 6.
Stadler, 1.
Strunz, 16.
Sudhoff, 1.
Trueblood, Mary, 21.
Vacca, 13.
Voss, 12.
Vries, 4.
Wiedemann, 20.
Wieleitner, 44.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K von Buchka, H. Stadler, K Sudhoff. Leipzig. 8°. [1
2 (1910): 6.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
10_3 (1909/10): 4.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
12 (1910): 2.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, J. Cardinaal, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [4
18: 2 (octobre 1909—avril 1910).

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 341. (G. Eneström.) — 2^3 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 344—347. (G. Eneström, A. Sturm.) — 3^3 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 348—349. (G. Eneström.) [5

Smith, D. E., Rara arithmetica (1908). [Rezension:] Science 32_2, 1910, 114—115. (F. Cajori.) — The popular science monthly (Lancaster) 77, 1910, 226—235. (L. C. Karpinski.) [6

Lind, B., Über das letzte Fermatsche Theorem (1910). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 121—122. (J. H.) [7

Bonola, R., Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung. Deutsche Ausgabe von H. Liebmann (1908). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 21, 1910; Lit.-Ber. 41—42. (H. Hahn.) [8

Decourdemanche, J. A., Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes (1909). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 122—123. (J. T.) [9

***Auerbach, Felix,** Geschichtstafeln der Physik. Leipzig, Barth 1910. [10
8°, 150 S. — [4 Mk.] — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 411. (Meitner.)

Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Zweite Auflage. I (1910). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 501. (Meitner.) [11

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik (1908). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 21, 1910; Lit.-Ber. 40—41. (H. Hahn.) [12

b) Geschichte des Altertums.

Vacca, G., Sulla storia del principio d'induzione completa. [13
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 12, 1910, 33—35. — Der Verfasser ist der Ansicht, daß schon Euklides das fragliche Prinzip benutzt hat.

Heiberg, J. L., *Δεύτεραι φροντίδες* (1909). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 180. [14

Hartmann, N., Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 16_3, 1910, 344—345. (E. Hoppe.) [15

c) Geschichte des Mittelalters.

***Strunz, Fr.,** Geschichte der Naturwissenschaften im Mittelalter. Im Grundriß dargestellt. Stuttgart, Enke 1910. [16
8°. — [4 Mk.]

Kaye, G. R., The source of Hindu mathematics. [17
Journ. of the royal asiatic society 1910, 749—760.

Kaye, G. R., The two Aryabhaṭas. [18
Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 289—292.

Björnbo, A. A., Al-Chwârizmî's trigonometriske Tavler (1909). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 179. [19

Wiedemann, E., Ibn al Haitams Schrift über die sphärischen Hohlspiegel. [20
Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 293—307.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Trueblood, Mary Esther, John Dee and his „fruitful preface". [21
The popular science monthly (Lancaster) 77, 1910, 236—241.

Favaro, A., Galileo Galilei. Modena, Formíggini 1910. [22
8°, 74 S. + Porträt. — [1 lira.] — Profili N. 10.

Favaro, A., Galileo Galilei. Pensieri, motti e sentenze tratti dalla edizione nazionale delle opere. Firenze, Barbera 1910. [23
32°, XVII + 414 + (1) S. — [2.25 lire]

Favaro, A., La cometa di Halley nel carteggio Galileiano. [24
Rivista di astronomia (Torino) 4, 1910. 3 S.

Cajori, F., On the invention of the slide rule. [25
Colorado, College, Publications, General series n° 47, 176—185.

Gram, J. P., Nogle Bemaerkninger om Fermat's Talteori (1909). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 179—180. [26

Gray, G. J., A bibliography of the works of I. Newton (1907). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 10_2, 1909/10, 351—354. (G. Eneström.) [27

Eneström, G., Eine Legende von dem eisernen Fleiße Leonhard Eulers. [28
Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 308—316.

Klein, F., Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. VIII. [29
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachrichten 1910 (Geschäftl. Mitt.). — [Wieder abgedruckt:] Mathem. Ann. 69, 1910, 444—445.

Schilling, W., Wilhelm Olbers II: 2 (1909). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 31, 1910, 2421—2423. (O. Knopf.) [30

Bryk, O., Entwickelungsgeschichte der reinen und angewandten Naturwissenschaften im XIX. Jahrhundert (1909). [Rezension.] Monatsh. für Mathem. 21, 1910; Lit.-Ber. 58—59. (St. M.) [31

Miller, G. A., Historical sketch of the development of the theory of groups of finite order. [32
Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 317—329.

Eneström, G., Über die Geschichte der Potenzreihen, deren Exponenten eine Potenzreihe n^{ter} Ordnung bilden. [33
Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, 350. — Anfrage.

Manville, O., Les découvertes modernes en physique (1909). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 21, 1909; Lit.-Ber. 48. (K. Prz.) [34

Lebon, E., Henri Poincaré (1909). [Rezension.] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1910, 42—43. (J. W. Young.) [35

e) Nekrologe.

Johann Gottfried **Galle** (1812—1910). [36
Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 426. (A. Berberich.)

Daniel Georg **Lindhagen** (1819—1906). [37
Stockholm, Vetenskapsakad., Lefnadsteckningar 4, 1910, 191—215 + Porträt. (B. Hasselberg.)

Didrik Magnus Axel **Möller** (1830—1895). [38
Stockholm, Vetenskapsakad., Lefnadsteckningar 4, 1910, 1—66 + Porträt. (A. Lindstedt.)

Louis **Raffy** (1855—1910). [39
Paris, Soc. mathém. de France, Bulletin 38, 1910, 243—248. (P. Appell, R. Bricard.)

Eugène **Rouché** (1832—1910). [40
L'enseignement mathém. 12, 1910, 425.

Giovanni **Schiaparelli** (1835—1910). [41
Biblioth. Mathem. 10_2, 1909/10, 330—340 + Porträt. (G. Loria.) — Naturwiss. Rundschau 25, 1910, 413—414. (A. Berberich.)

f) Aktuelle Fragen.

André, D., Des notations mathématiques (1909). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1910, 43—45. (G. A. Miller.) [42

***Dingeldey, H.,** Etymologisches Fachwörterbuch zur Mathematik, Physik und Mineralogie. Breslau, Hirt 1910. [43
8°. — [1,60 Mk.] — [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 21, 1910; Lit.-Ber. 64.

[Internationaler Mathematikerkongreß in Rom 1908.] [44
Zeitschr. für mathem. Unterr. 41, 1910, 372—385. (H. Wieleitner.)

[Französische Mathematiker-Versammlung in Toulouse 1910.] [45
L'enseignement mathém. 12, 1910, 415—421.

[Schweizerische Mathematiker-Versammlung in Basel 1910.] [46
L'enseignement mathém. 12, 1910, 422—423.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent K. Bädecker in Jena zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— „Instructor" R. Ph. Baker in Iowa zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor O. Bolza zum Honorarprofessor der Mathematik an der Universität in Freiburg i. Br.

— Professor H. L. Bronson an der „Mc Gill university" zum Professor der Physik an der „Dalhousie university" in Halifax.

— Dozent S. Carrus in Besançon zum Professor der höheren Analysis an der Universität daselbst.

— „Instructor" G. R. Clements am „Williams college" zum Professor der Mathematik an der Universität von North Carolina.

— Professor F. W. Dyson in Edinburg zum „Astronomer-Royal".

— Privatdozent V. W. Ekman in Lund zum Professor der Mechanik und mathematischen Physik an der Universität daselbst.

— Dr. A. Emch in Basel zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana.

— Professor W. M. Kutta in Jena zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Aachen.

— Privatdozent M. Näbauer in München zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule daselbst.

— Dr. V. N. Rosevare zum Professor der Mathematik an der neu eröffneten Universität in Natal.

— Professor J. B. Shaw in Decatur, Ill., zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana.

— Privatdozent A. Szarvassi in Brünn zum Professor der Physik an der deutschen Technischen Hochschule daselbst.

Todesfälle.

— Charles Barton Hill, früher Astronom am „Lick observatory", gestorben in San Francisco den 25. August 1910, 47 Jahre alt.

— Maurice Lévy, Professor der Mathematik und Mechanik am „Collége de France", geboren zu Ribeauville (Elsaß) den 28. Februar 1838, gestorben in Paris den 30. September 1910.

— Jacob Lüroth, Professor der Mathematik an der Universität in Freiburg i. Br., geboren in Mannheim den 18. Februar 1844, gestorben in München den 14. September 1910.

— Eugène Rouché, Professor der Mathematik am „Conservatoire des arts et métiers" in Paris, geboren in Sommières (Gard) den 18. August 1832, gestorben zu Lunel den 19. August 1910.

— Thorvald Nicolai Thiele, früher Professor der Astronomie an der Universität in Kopenhagen, geboren in Kopenhagen den 24. Dezember 1838, gestorben daselbst den 26. September 1910.

— Wilhelm Thomé, Professor der Mathematik an der Universität in Greifswald, geboren zu Dollendorf b. Bonn den 13. März 1841, gestorben in Köln den 1. Oktober 1910.

— Philipp Weinmeister, Professor der Mathematik an der Forstakademie in Tharandt, geboren in Kassel den 27. August 1848, gestorben in Tharandt den 27. August 1910.

— Temistocle Zona, Direktor der Sternwarte in Palermo, geboren in Porto Tolle (Rovigo) den 7. Mai 1848, gestorben in Palermo den 2. Mai 1910.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität von Illinois in Urbana hat Professor G. A. Miller im Sommer 1910 fünf Vorlesungen über die historische Entwicklung der Mathematik gehalten.

Sopra una relazione che passa fra due antiche soluzioni del problema di Delo.

Di Gino Loria a Genova

Fra i vari metodi che gli antichi concepirono per inserire fra due segmenti rettilinei due medie proporzionali, ve ne sono due che, almeno nella forma sotto cui ci vennero tramandati, per condurre allo scopo esigono si proceda per tentativi; uno è da Eutocio attribuito a Platone[1]), mentre all' altro viene dallo stesso commentatore collegato il nome di Apollonio Pergeo[2]), quantunque lo si ritrovi in un' opera di Erone Alessandrino.[3]) Ma, invece che a tentativi, si può ricorrere al „metodo dei luoghi geometrici"; ed allora si trova, quale linea ausiliare, una medesima curva razionale del terzo ordine, la quale, per tale ragione, appare come una duplicatrice per eccellenza: il mostrare ciò è appunto lo scopo delle linee che seguono.

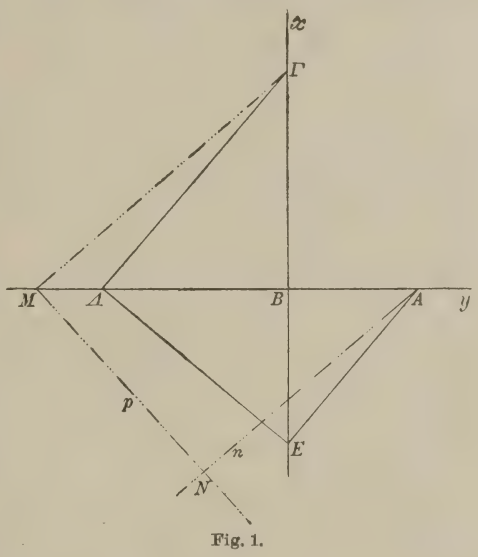


Fig. 1.

Supposto che i segmenti $AB = a$ e $B\Gamma = b$ fra cui debbonsi inserire le due medie siano disposti ad angolo retto (Fig. 1), è noto che per seguire la via indicata da Platone bisogna determinare sopra i prolungamenti di quei segmenti due punti Δ e E tali che gli angoli $\Gamma\Delta E$, $AE\Delta$ risultino entrambi retti. A tal fine si congiunga Γ ad un punto arbitrario M della

1) Archimedes, *Opera omnia*, ed. Heiberg 3 (Leipzig 1881), p. 66—70.

2) Id. p. 76—78. Apollonius, *Quae graece exstant*, ed. Heiberg 2 (Leipzig 1893), p. 104—105.

3) Carra de Vaux, *Les mécaniques ou l'élévateur de Héron d'Aléxandrie* (Paris 1894), p. 52.

retta AB, si conduca da M la perpendicolare p a quella congiungente e finalmente si abbassi da A la perpendicolare n sopra p. Il luogo geometrico N del piede N di questa perpendicolare segherà la retta $B\Gamma$ in un certo numero di punti, ognuno dei quali, assunto come punto E, darà una soluzione del problema. Questo è così ridotto alla ricerca dei punti comuni alle due linee $B\Gamma$, N. Per determinare di quale specie sia la curva N notiamo che, al variare del punto M sopra la retta AB, varia pure la retta p ed inviluppa una parabola avente per fuoco Γ e AB per tangente al vertice, onde il luogo del punto N altro non è che la podaria del punto A rispetto a questa parabola. Per trovarne l'equazione assumiamo per assi delle x e delle y le due rette $B\Gamma$ e BA e chiamiamo m l'ordinata del punto M; allora le due rette p e n avranno per equazioni

$$bx - my + m^2 = 0; \quad \frac{x}{b} + \frac{y-a}{m} = 0.$$

L'equazione cercata si otterrà eliminando m fra di esse, onde è

$$x^3 - xy(a-y) + b(a-y)^2 = 0;$$

per semplificare questo risultato porremo

$$a - y = X, \quad x = Y$$

ed otterremo così l'equazione

$$(1) \qquad Y(X^2 + Y^2) + X(bX - aY) = 0.$$

La curva è dunque un' ofiuride.[1])

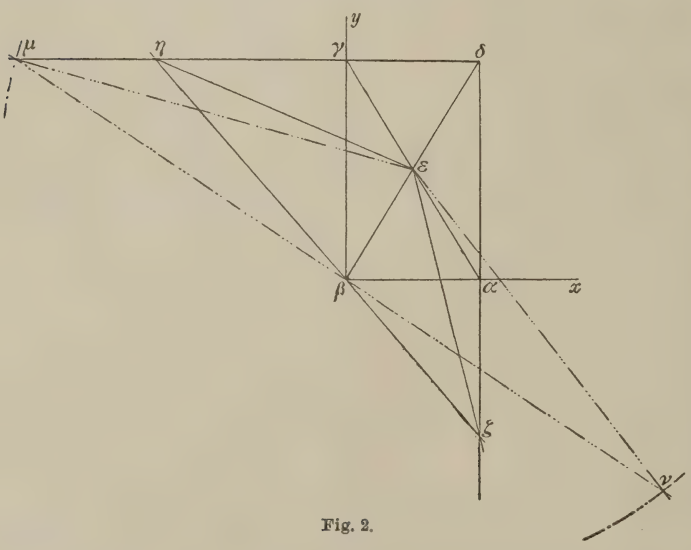


Fig. 2.

Nel secondo dei metodi sopra ricordati si suppone ancora di avere disposti ad angolo retto i due segmenti $\alpha\beta = a$, $\beta\gamma = b$ fra cui deve effettuarsi l'inserzione di due medie (Fig. 2), s'immagina di completare il rettangolo $\alpha\beta\gamma\delta$ e di segnarne il centro ε e si riduce la

1) Cfr. G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, 1. Aufl. (Leipzig 1902), p. 49; 2. Aufl. (Leipzig 1910), 1. Bd., p. 50.

questione a condurre per il punto δ una retta tale che, dettene η e ξ le intersezioni con le rette $\delta\gamma$ e $\delta\alpha$, sia $\varepsilon\eta = \varepsilon\xi$. Ora per far ciò si può procedere come segue: si conduca per il punto β una trasversale arbitraria a tagliare in μ la retta $\gamma\delta$ e se ne determini la seconda intersezione ν con la circonferenza di centro ε e raggio $\varepsilon\mu$; variando quella trasversale il punto ν genererà una linea N, di cui ogni intersezione con la retta $\delta\alpha$ conduce ad una soluzione del problema. Per trovare l'equazione della curva N sceglieremo come assi coordonati le rette $\beta\alpha$ e $\beta\gamma$; le coordinate del punto ε saranno $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ e come equazione della trasversale guidata per β si potrà assumere la seguente

$$y = \varrho x.$$

La circonferenza di centro ε e raggio $\varepsilon\mu$ è invece rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 - (ax + by) = \frac{b^2}{\varrho^2} - \frac{ab}{\varrho}.$$

L'equazione della linea N nascerà eliminando ϱ fra le due ultime equazioni scritte, onde è

$$x^2 - ax + y(y - b) = \frac{b^2 x^2}{y^2} - \frac{abx}{y}.$$

Liberata dai divisori quest' equazione si vede contenere il fattore $y - b$ (come era facile prevedere); tolto il quale rimane

$$y(x^2 + y^2) + x(bx - ay) = 0. \tag{2}$$

L'identità di questa equazione con la (1) mostra che la curva da essa rappresentata è di nuovo un' ofiuride. Così resta dimostrato quanto asserimmo nell' esordio e di questa curva viene segnalata una nuova generazione.

Das Buch der Seltenheiten[1]) der Rechenkunst von Abū Kāmil el-Miṣrī.

Übersetzt und mit Kommentar versehen
von HEINRICH SUTER in Zürich.

Im Namen Gottes, des Barmherzigen und Gnädigen! Es spricht SHODJĀ' B. ASLAM, bekannt unter dem Namen ABŪ KĀMIL: Ich kenne eine besondere Art von Rechnungen, die bei Vornehmen und Geringen, bei Gelehrten und Ungelehrten zirkulieren, an denen sie sich ergötzen und die sie neu und schön finden; es frägt einer den andern (über ihre Auflösung)[2]), dann wird ihm mit einer ungenauen, nur vermutungsweisen Antwort geantwortet, sie erkennen darin weder ein Prinzip noch eine Regel. Es pflegten viele Vornehme und Geringe mich über Aufgaben der Rechenkunst zu fragen, dann antwortete ich ihnen für jede einzelne Aufgabe mit der einzigen Antwort, wenn es keine andere gab; aber oft gab es für eine Aufgabe zwei, drei, vier und mehr Antworten, oft auch war eine Antwort unmöglich. Ja, es gelangte sogar zu mir eine Aufgabe, die ich löste und für die ich sehr viele Lösungen[3]) fand; ich prüfte die Sache eingehender und kam auf 2676[4]) richtige Lösungen. Da war meine Verwunderung hierüber groß, und ich machte die Erfahrung, daß ich, wenn ich von dieser Entdeckung erzählte, angestaunt oder unfähig erachtet wurde, oder daß diejenigen, die mich nicht kannten, einen falschen Verdacht gegen mich faßten. Da entschloß ich mich, über diese Rechnungsart ein Buch zu schreiben, um die Behandlung derselben zu erleichtern und (dem Verständnis) näher zu bringen. Dieses habe ich nun

1) Tarīfa, pl. Tarā'if = seltene, kostbare Sache.

2) Was in runden Klammern steht, ist von mir zur näheren Erläuterung hinzugefügt.

3) So übersetze ich künftighin mehr mathematisch das arabische djawāb, pl. adjwiba = Antwort; ABŪ KĀMIL braucht die Pluralform djawābāt.

4) Der Text hat unrichtig 2696; 70 und 90 können im Arabischen, wenn sie in Worten ausgedrückt sind, leicht verwechselt werden; später erscheint noch einmal die falsche, aber auch einmal die richtige Zahl.

begonnen, und ich werde die Auflösungen erklären für die Aufgaben[1]), die mehrere Lösungen haben, und für diejenigen, die nur eine, und für solche, die gar keine Lösung haben, mit Hilfe eines sicheren Verfahrens; endlich werde ich die Aufgabe behandeln, von der ich gesagt habe, daß sie 2676 Lösungen habe. Dann werden der Verdacht und die Vermutungen wieder verschwinden, und meine Aussprüche werden bekräftigt werden, und die Wahrheit wird zum Vorschein kommen. Wenn ich über diese und ähnliche Aufgaben noch mehr von den (verschiedenen) Meinungen hinzufügen wollte, die mir in betreff der großen Zahl der Lösungen zugekommen sind, so würde die Sache zu weitläufig werden.

Zu dieser Art von Rechnungen gehört, Gott stärke dich[2]), folgende Aufgabe: Eine Ente (ist zu kaufen) für 5 Drachmen, 20 Sperlinge[3]) für 1 Drachme, ein Huhn für 1 Drachme und ähnliches mehr; es werden dir 100 Drachmen oder mehr oder weniger gegeben, und es werde zu dir gesagt: Kaufe dir dafür im ganzen 100 Vögel oder mehr oder weniger von diesen verschiedenen Arten; die Antwort für solche und ähnliche Aufgaben besteht dann darin, daß du sagst: Von den Enten so viele, von den Sperlingen so viele, von den Hühnern so viele, (natürlich) ganze, kein Bruch dabei, d. h. keine halben, drittel, viertel usw. Vögel; und wenn bei einer Art ein Bruch vorkäme, so darfst du ihn auch nicht mit einem Bruche einer anderen Art vereinigen (um so Ganze zu erhalten). Wenn der Fragesteller zufrieden wäre mit diesem (d. h. mit Lösungen in Brüchen), so bekäme er in allen Aufgaben dieser Art Lösungen ohne Zahl, die nur beschränkt würde durch die Hinfälligkeit (den Tod) des Antwortenden.[4]) — Der Fragesteller darf aber auch andere Fragen stellen, indem er z. B. sagt: Wenn dir 100 Drachmen oder mehr oder weniger gegeben werden, und zu dir gesagt wird: verteile sie unter 100, oder mehr oder weniger Personen, Männer, Frauen, Knaben usw., und gib jedem Manne so viel, jeder Frau so viel, jedem Knaben so viel usw., wie viele Männer, Frauen, Knaben usw. sind da? Oder es werde gesagt: Kaufe daraus Schwerter und Lanzen oder verschiedene andere solcher Dinge, die keine Teilung zulassen, wenn dann die Zahl der Arten dieser Dinge bekannt ist, und ein Schwert so viel kostet, eine Lanze so viel und ein Bogen so viel, wieviel Stücke trifft es auf jede Art? Der Fragende kann auch dem Gefragten sagen, ob die Zahl der Männer größer oder kleiner sein soll, als die der Frauen, oder die der Knaben usw. Ist

1) Der Text hat hier nur den Singular.
2) d. h. für das richtige Verständnis des folgenden.
3) ʿUṣfūr, pl. ʿaṣāfīr = Sperling, Fink oder jeder kleine Vogel.
4) So wird hier die unendliche Zahl der Lösungen umschrieben.

nun dieses alles, soweit es möglich ist, festgestellt, so wird der Gefragte an die Auffindung der Lösungen gehen, er wird sie genau prüfen und wenn unter ihnen solche sind, die der Aufgabe entsprechen, wird der Fragesteller zustimmen, wenn solche sind, die nicht entsprechen, wird er sagen: dies ist nicht möglich.

Aufgabe 1[1]). Es werden dir 100 Drachmen gegeben und du sollst aus diesen 100 Vögel von drei Arten kaufen: Enten, Hühner und Sperlinge; eine Ente kostet 5 Drachmen, je 20 Sperlinge 1 Drachme, ein Huhn 1 Drachme, so ist die Rechnung folgende: Nimm die Zahl der Enten $= x$ an, so kosten sie $5x$ Drachmen und die Zahl der Sperlinge $= y$, so kosten sie $\frac{1}{20}y$ Drachmen[2]), dann bleiben von den (100) Drachmen noch übrig: $100 - 5x - \frac{1}{20}y$; von der Zahl der Vögel bleiben noch: $100 - x - y$.[3]) Da nun ein Huhn 1 Drachme gekostet hat, ist die Zahl der übrigbleibenden Vögel, d. h. $100 - x - y$ gleich der Zahl der übrigbleibenden Drachmen, d. h. $100 - 5x - \frac{1}{20}y$; nachdem wiederhergestellt und ausgeglichen worden ist, hat man: $4x = \frac{19}{20}y$ (geschrieben: $\frac{9}{10}y$ und $\frac{1}{20}y$), also $y = 4x + \frac{4}{19}x$. Da wir die Zahl der Enten $= x$ und die Zahl der Sperlinge $= y$ gesetzt haben, so ist klar, daß die Zahl der Sperlinge gleich 4 mal und $\frac{4}{19}$ mal die Zahl der Enten beträgt. Nehmen wir nun die Zahl der Enten $= 19$ an, so ist notwendig die Zahl der Sperlinge $= 80$, also die Zahl der Hühner $= 1$, weil diese $= 100$ weniger die Zahl der Enten weniger die Zahl der Sperlinge ist. — Diese Aufgabe läßt keine andere Lösung zu, denn soeben wurde gezeigt, daß die Zahl der Sperlinge 4 mal und $\frac{4}{19}$ mal die Zahl der Enten betrage, also ist die kleinste Zahl für die Enten, damit kein Bruch entstehe, 19, würden wir aber die Zahl der Enten $= 38$ setzen, so würde die Zahl der Sperlinge $= 160$ werden, und so wäre die Aufgabe unvernünftig, denn die Zahl einer Art wäre größer als die Gesamtzahl (der Vögel).

Aufgabe 2. Wenn dir 100 Drachmen gegeben werden und zu dir gesagt wird: Kaufe aus diesen 100 Vögel von drei Arten, Enten, Tauben und Hühner, die Ente zu 2 Drachmen, je 3 Tauben zu 1 Drachme und je 2 Hühner zu 1 Drachme, so ist die Rechnung folgende: Du kaufst x Tauben für $\frac{1}{3}x$ Drachmen und y Hühner für $\frac{1}{2}y$ Drachmen, dann bleiben dir noch $100 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$ Drachmen, der Enten bleiben noch $100 - x - y$, und da jede 2 Drachmen kostet, so kosten alle $200 - 2x - 2y$

---

1) Die Aufgaben sind im Text nicht numeriert.

2) Die erste Unbekannte (x) nennt SHODJĀʿ, wie alle arabischen Mathematiker, shaiʾ = Ding; die zweite (y) nennt er dīnār (Denarius) = ein Goldstück.

3) Alle in der Abhandlung vorkommenden Gleichungen sind, wie in der Algebra des MUḤ. B. MŪSĀ, vollständig in Worten ausgedrückt, die letztere heißt also in Übersetzung: Hundert Vögel weniger ein Ding und weniger ein Dinar.

Drachmen und dies ist gleich dem, was von den Drachmen übriggeblieben ist, also $= 100 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$. Gleiche aus, so hast du: $100 - 1\frac{1}{2}y = 1\frac{2}{3}x$[1]), also ist $x = 60 - \frac{9}{10}y$; da wir nun die Zahl der Tauben $= x$ gesetzt haben und die Zahl der Hühner $= y$, so ist die Zahl der Tauben gleich 60 weniger $\frac{9}{10}$ der Zahl der Hühner; die kleinste mögliche Zahl für die Zahl der Hühner ist also 10, nehmen wir diese so an, so wird die Zahl der Tauben $= 51$, also die Zahl der Enten $= 39$, also gibt es 51 Tauben, 10 Hühner und 39 Enten. — Es sind aber für diese Aufgabe, wie ich im folgenden zeigen werde, noch andere Lösungen möglich; es wurde nämlich gezeigt, daß die Zahl der Tauben gleich 60 weniger $\frac{9}{10}$ der Zahl der Hühner sei, nun können wir immer weitere 10 zu der Zahl der Hühner hinzufügen, was dann jedesmal übrigbleibt von 60, nachdem man $\frac{9}{10}$ der jeweilen um 10 vermehrten Zahl der Hühner abgezogen hat, ist die Zahl der Tauben[2]), und was dann jeweilen noch übrig bleibt von den 100, ist die Zahl der Enten.[3]) Dieses Verfahren (d. h. die Zahl der Hühner immer um 10 vermehren) setzt man fort, solange $\frac{9}{10}$ der Zahl der Hühner noch kleiner ist als 60, wenn aber diese Zahl die 60 überschreitet, so hört das Richtige auf und die Lösung ist falsch. Addieren wir also zu der zuerst angenommenen Zahl 10 der Hühner noch 10, so wird die Zahl derselben 20, subtrahieren wir $\frac{9}{10}$ von 20 von 60, so bleiben 42, und dies ist die Zahl der Tauben, und was von 100 übrig bleibt, ist die Zahl der Enten und diese ist 38.[4]) Nimmt man die Zahl der Hühner 30 an, so wird die Zahl der Tauben 33 und die Zahl der Enten 37; ist die Zahl der Hühner 40, so ist die der Tauben 24, die der Enten 36; ist die Zahl der Hühner 50, so ist die der Tauben 15, die der Enten 35; ist die Zahl der Hühner 60, so ist die der Tauben 6, die der Enten 34. Hier hören die richtigen Lösungen auf, denn wenn wir noch ein weiteres 10 zur Zahl der Hühner hinzufügen, so ist ihre Zahl 70, und $\frac{9}{10}$ hiervon sind 63, also größer als 60 und es sollte nun größeres von kleinerem abgezogen werden, was unmöglich ist.[5]) Diese Aufgabe hat also 6 richtige Lösungen.[6])

Aufgabe 3. Wenn dir 100 Drachmen übergeben werden und zu dir gesagt wird: Kaufe dafür 100 Vögel von vier Arten, Enten, Sperlinge, Tauben, Hühner, die Ente zu 4 Drachmen, 10 Sperlinge für 1 Drachme[7]), 2 Tauben für 1 Drachme und das Huhn zu 1 Drachme, so ist die

---

1) Hier hat der Text bloß x.
2) Der Text hat hier „Enten".
3) Der Text hat „Tauben".
4) Von hier an kürze ich die sehr breite Darstellung wesentlich.
5) Wörtlich: dies ist ein Widerspruch und unmöglich.
6) Dieselben werden zum Überfluß nochmals aufgezählt.
7) Hier hat der Text unrichtig: und die Sperlinge zu 10 Drachmen.

Rechnung folgende: Du kaufst x Enten für $4x$ Drachmen, y Sperlinge für $\frac{1}{10}y$ Drachmen und z Tauben[1]) für $\frac{1}{2}z$ Drachmen; dann bleiben von den Drachmen noch übrig $100 - 4x - \frac{1}{10}y - \frac{1}{2}z$, und für die Hühner bleibt die Zahl $100 - x - y - z$; wie wir gesagt haben, kostet 1 Huhn 1 Drachme, also ist der Preis für die Hühner gleich ihrer Anzahl, mithin ist $100 - x - y - z = 100 - 4x - \frac{1}{10}y - \frac{1}{2}z$, gleicht man aus, so erhält man $x = \frac{3}{10}y + \frac{1}{6}z$. Setze nun $y = 10$, oder gleich einem Vielfachen von 10, so ist dies die Anzahl der Sperlinge, und $z = 6$, oder gleich einem Vielfachen von 6, so ist dies die Anzahl der Tauben, dann ist x, d. h. die Anzahl der Enten $= 4$, denn dies ist gleich $\frac{3}{10}$ der Zahl der Sperlinge mehr $\frac{1}{6}$ der Zahl der Tauben; die Anzahl der Hühner ist nun die Ergänzung dieser Zahlen (10, 6 und 4) bis auf 100, also gleich 80; dies ist eine Lösung. Willst du eine zweite Lösung, so vermehre die Zahl der Sperlinge wieder um 10, lasse die Zahl der Tauben unverändert gleich 6, die Anzahl der Enten ist dann wieder gleich $\frac{3}{10}$ der Zahl der Sperlinge mehr $\frac{1}{6}$ der Zahl der Tauben; so entsteht bei jeder Vermehrung der Zahl der Sperlinge um 10 eine andere Lösung als die erste. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis die Zahl der Sperlinge auf 70 gelangt ist, von da an ist keine Vermehrung mehr möglich, weil, wenn die Zahl der Sperlinge 80 würde, und die Zahl der Tauben 6 wäre, dann die Zahl der Enten auf 25 käme ($\frac{3}{10}$ von 80 + $\frac{1}{6}$ von 6), also die Zahl der Sperlinge, Tauben und Enten zusammen schon größer als 100 wäre, und doch soll sie mit der Zahl der Hühner erst 100 ausmachen. Wenn du also bis auf 70 (für die Zahl der Sperlinge) gelangt bist, so gehe wieder zur ersten Lösung zurück und vermehre nun die Anzahl der Tauben jedesmal um 6, ohne die Anzahl der Sperlinge (10) zu verändern; du erhältst dann zuerst 12 Tauben und die Zahl der Enten wird dann 5 ($\frac{3}{10}$ von 10 + $\frac{1}{6}$ von 12), also ist die Zahl der Hühner die Ergänzung dieser Zahlen (10, 12 und 5) bis auf 100, d. h. 73. Hierauf lasse die Zahl der Tauben auf 12 stehen, und vermehre die Zahl der Sperlinge jedesmal um 10; dies kannst du fortsetzen, bis die Zahl der Sperlinge auf 60 gestiegen ist, weiter hinauf ist es unmöglich zu gehen, wie man auf dieselbe Weise wie vorher zeigen kann. Dann gehe wieder zum Anfang zurück und vermehre die Zahl der Tauben nochmals um 6, dann hast du 18, und lasse die Zahl der Sperlinge auf 10 stehen, dann hast du als Zahl der Enten 6 ($\frac{3}{10}$ von 10 + $\frac{1}{6}$ von 18), also als Zahl der Hühner 66. Hierauf lasse die Zahl der Tauben auf 18 stehen und vermehre die Zahl der Sperlinge jedesmal um 10; dies kannst du fortsetzen, bis die Zahl der Sperlinge

1) Die dritte Unbekannte (z) nennt SHODJĀʿ fals, pl. fulūs = Obolus, Pfennig, wie auch H. CHALFA III, 63 angibt.

auf 60 gestiegen ist, von da an ist eine Vermehrung unmöglich. Dann vermehre wieder die Zahl der Tauben um 6, so daß sie jetzt 24 beträgt und lasse die Zahl der Sperlinge wie im Anfang gleich 10, dann hast du als Zahl der Enten 7, also als Zahl der Hühner 59.[1]) Dann lasse die Zahl der Tauben auf 24 stehen und vermehre die Zahl der Sperlinge jedesmals um 10; dies kannst du fortsetzen bis die Zahl der Sperlinge auf 50 gestiegen ist, von da an ist eine Vermehrung unmöglich. Dann kehre wieder zurück und vermehre die Zahl der Tauben wieder um 6, dann ist ihre Zahl 30, und setze die Zahl der Sperlinge (zuerst) gleich 10, und verfahre weiter wie vorher, indem du wieder die Zahl der Sperlinge jedesmal um 10 vermehrst, bis ihre Zahl 40 beträgt, von da an ist keine Vermehrung mehr möglich. Mit der Vermehrung der Tauben um 6 fahre nun so weiter fort, und verfahre auch wie vorher mit der Zahl der Sperlinge, bis die Zahl der Tauben auf 66 gestiegen ist[2]), und die Zahl der Sperlinge 10 beträgt, dann ist die der Enten 14[3]) ($\frac{3}{10}$ von $10 + \frac{1}{6}$ von 66) und für die Hühner bleibt noch die Zahl 10.

Setzest du nun aber (im Anfang) die Zahl der Sperlinge gleich 5 (statt 10) und die der Tauben gleich 3 (statt 6), so wird die Zahl der Enten gleich 2 ($\frac{3}{10}$ von $5 + \frac{1}{6}$ von 3) und die Zahl der Hühner wird gleich 90.[4]) Fährt man nun in der gleichen Weise wie vorher fort, so erhält man wieder richtige Lösungen; man lasse also zunächst wieder die Zahl der Tauben gleich 3 und vermehre die Zahl der Sperlinge jedesmal um 10, so erhält man wieder die Zahl der Enten, indem man $\frac{3}{10}$ der Zahl der Sperlinge und $\frac{1}{6}$ der Zahl der Tauben vereinigt, und die Zahl der Hühner, indem man die jeweilige Ergänzung bis auf 100 bestimmt. So kann man fortfahren, bis die Zahl der Sperlinge auf 65 gestiegen ist, eine weitere Vermehrung ist nicht möglich. Hierauf vermehrst du die Zahl der Tauben um 6, so daß sie jetzt 9 beträgt, und lässest zuerst die Zahl der Sperlinge gleich 5, vermehrst sie dann nachher jedesmal um 10, wie es vorher gemacht wurde; so kannst du auf diese Weise fortfahren, bis die Zahl der Tauben auf 69 gestiegen ist, und die Zahl der Sperlinge 5 beträgt.[5]) Auf diese Weise ergeben sich 98[6]) Lösungen dieser Aufgabe, von denen ich dir eine Anzahl in folgende Tabelle eingetragen habe:[7])

---

1) Der Satz „dann hast du ... Hühner 59“ fehlt im Text.

2) Siehe Kommentar.

3) Der Text hat 11.

4) Der letztere Satz fehlt im Text.

5) Siehe Kommentar.

6) Der Text hat infolge der beiden Fehler (s. Kommentar) nur 96.

7) Er fügt hinzu: „damit sie in deinen Händen sei, wenn du etwas suchst, erleichtert werde dir dein Wunsch, so Gott will!“

Sperlinge	Tauben	Enten	Hühner
10	6	4	80
20	6	7	67
30	6	10	54
40	6	13	41
50	6	16	28
60	6	19	15
70	6	22	2
10	12	5	73
20	12	8	60
30	12	11	47
40	12	14	34
50	12	17	21
60	12	20	8
10	18	6	66
20	18	9	53
30	18	12	40
40	18	15	27
50	18	18	14
60	18	21	1
10	24	7	59

Aufgabe 4. Es werden dir 100 Drachmen übergeben und es werde zu dir gesagt: Kaufe dafür 100 Vögel von vier Arten, Enten, Tauben, Lerchen, Hühner, die Ente zu 2 Drachmen, 2 Tauben für 1 Drachme, 3 Lerchen für 1 Drachme und das Huhn zu 1 Drachme, so ist die Rechnung folgende: Du kaufst x Enten für $2x$ Drachmen, y Tauben für $\frac{1}{2}y$ Drachmen, z Lerchen für $\frac{1}{3}z$ Drachmen, dann bleiben von den Drachmen noch $100 - 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z$ übrig, und die Zahl der Hühner ist noch $100 - x - y - z$; du kaufst das Huhn zu 1 Drachme, also ist der Preis der Hühner gleich ihrer Anzahl, also hast du die Gleichung: $100 - x - y - z = 100 - 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z$; hieraus erhältst du nach Ausgleichung: $x = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z$. Nun setze y, d. h. die Zahl der Tauben gleich 2, und z, d. h. die Zahl der Lerchen gleich 3, dann wird x, d. h. die Zahl der Enten gleich 3, also ist die Zahl der Hühner, was noch übrig bleibt von 100, d. h. 92. Nun untersuchst du, welche weiteren Lösungen die Aufgabe noch habe, nach dem was vorangegangen ist, und du wirst finden, daß sie 304 Lösungen hat; ich habe einige derselben für dich in folgende Tabelle eingetragen[1]):

1) Hier folgt derselbe Satz wie oben.

Tauben	Lerchen	Enten	Hühner
2	3	3	92
4	3	4	89
6	3	5	86
8	3	6	83
10	3	7	80
12	3	8	77
14	3	9	74
16	3	10	71
18	3	11	68
20	3	12	65
22	3	13	62
24	3	14	59
26	3	15	56
28	3	16	53
30	3	17	50
32	3	18	47
34	3	19	44
36	3	20	41
38	3	21	38
40	3	22	35

Aufgabe 5. Wenn dir 100 Drachmen übergeben werden und zu dir gesagt wird: Kaufe für sie 100 Vögel von drei Arten, Enten, Hühner, Sperlinge, die Ente zu 3 Drachmen, 3 Hühner für 1 Drachme, 20 Sperlinge für 1 Drachme, so ist keine Lösung möglich, wie sich aus folgendem ergibt: Wenn du x Enten für $3x$ Drachmen, y Sperlinge für $\frac{1}{20}y$ Drachmen gekauft hast, so bleiben von den Drachmen $100 - 3x - \frac{1}{20}y$ übrig, und für die Hühner bleibt noch $100 - x - y$; du kaufst aus den übrigen Drachmen Hühner und zwar, wie gesagt, 3 für 1 Drachme, so erhältst du dafür $300 - 9x - \frac{3}{20}y$[1]) Hühner, und dies ist also $= 100 - x - y$; nach der Ausgleichung hast du: $200 + \frac{17}{20}y$[2]$) = 8x$, also ist $x = 25 + \frac{17}{160}y$[3]); da wir die Zahl der Enten gleich x und die Zahl der Sperlinge gleich y gesetzt haben, so ist die kleinstmögliche Zahl für die Sperlinge 160, denn so viel ist nötig, damit $\frac{1}{160}$ davon ganzzahlig werde; dann wäre aber die Zahl der Sperlinge größer als die Gesamtzahl der Vögel, dies ist ein Widerspruch.

1) Für $\frac{3}{20}$ hat der Text $\frac{1}{10} + \frac{1}{20}$.

2) Dafür hat der Text $\frac{8}{10} + \frac{1}{20}$.

3) Der Text hat unrichtig $\frac{1}{10} + \frac{1}{20}$, es sollte heißen: $\frac{1}{10} + \frac{1}{160}$.

Aufgabe 6. Wir kommen nun zu der Aufgabe, von der wir im Anfang unserer Schrift gesagt haben, daß sie 2676 Lösungen habe, sie lautet also: Wenn dir 100 Drachmen gegeben werden und zu dir gesagt wird: Kaufe dafür 100 Vögel von fünf Arten, Enten, Tauben, Ringeltauben[1]), Lerchen und Hühner, die Ente zu 2 Drachmen, 2 Tauben für 1 Drachme, 3 Ringeltauben für 1 Drachme, 4 Lerchen für 1 Drachme, 1 Huhn zu 1 Drachme, so ist die Rechnung folgende: Du kaufst x Enten für $2x$ Drachmen, y Tauben für $\frac{1}{2}y$ Drachmen, z Ringeltauben für $\frac{1}{3}z$ Drachmen, u[2]) Lerchen für $\frac{1}{4}u$ Drachmen, so bleiben von den Drachmen noch übrig $100 - 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{4}u$, und für die Hühner bleibt die Zahl $100 - x - y - z - u$; da nun 1 Huhn 1 Drachme kostet, so hat man die Gleichung:

$$100 - x - y - z - u = 100 - 2x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{4}u$$

nach der Ausgleichung hat man:

$$x = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{2}{3}z + \tfrac{3}{4}u.$$

Da wir die Zahl der Tauben $= y$, die Zahl der Ringeltauben $= z$, die Zahl der Lerchen $= u$ gesetzt haben, und die Zahl der Enten $= x$, so ist die Ergänzung bis auf 100 jeweilen gleich der Zahl der Hühner; du kannst nun (zuerst) $y = 1$, $z = 3$ und $u = 2$ setzen; im allgemeinen ist es freilich notwendig, daß du für y die kleinste Zahl setzest, die durch 2 teilbar ist, und diese ist 2, und für u die kleinste Zahl, die durch 4 teilbar ist, und diese ist 4. Daß wir zuerst $y = 1$ und $u = 2$ gesetzt haben, geschah deshalb, weil ja dann $\frac{1}{2}y$ und $\frac{3}{4}u$ zusammen $= 2$, d. h. eine ganze Zahl ausmacht[3]); hierzu addieren wir $\frac{2}{3}z$, d. h. 2; da wir $z = 3$ gesetzt haben, so haben wir $x = 4$. In allen Aufgaben dieser Art, die dir begegnen, schlage nun diesen Weg ein, so wirst du schließlich sämtliche Lösungen der Aufgabe erhalten, so Gott will.[4]) Wenn wir dann mit dieser (ersten) Art unseres Verfahrens fertig geworden sind und die Sache gründlich durchgeführt haben, wenden wir uns wieder zu unserer zweiten Annahme[5]), wo wir $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$ gesetzt und $x = 6$ gefunden haben.

Wir beginnen also mit der ersten Art und setzen $y = 1$, $z = 3$, $u = 2$, dann ist $x = 4$ und dies sind die Enten, wie du in der Tafel

1) Fākhita, pl. fawākhit = Ringeltaube.

2) Für diese vierte Unbekannte gebraucht SHODJĀ' das Wort khātam oder khātim, pl. khawātim = Siegel, Ende.

3) Daß $y = 1$ und $u = 2$ die kleinstmöglichen Werte für diese Unbekannten sind, ist wohl auch noch mit ein Grund, daß diese zuerst genannt wurden.

4) Dieser Satz paßt nicht gerade hierher, die Ordnung der Sätze scheint hier etwas gestört worden zu sein. 5) Wörtlich „Seite".

siehst, und was als Ergänzung bis 100 bleibt, sind die Hühner und das sind 90. Dann schreibe für die Zahl der Ringeltauben (z) zwei 3 (jeweilen schief) untereinander in die Tabelle, wie du siehst, und ebenso für die Zahl der Lerchen (u) zwei 2 (schief) untereinander, und vermehre die Zahl der Tauben (y) um 2, dann beträgt sie 3, dann ist die Zahl der Enten (x) = 5, d. h. $\frac{1}{2}$ von 3 mehr $\frac{2}{3}$ von 3 mehr $\frac{3}{4}$ von 2, also die Zahl der Hühner die Ergänzung bis auf 100, d. h. 87. Dann vermehre die Zahl der Tauben wieder um 2, so hast du 5, und lasse die Ringeltauben = 3 und die Lerchen = 2, dann ist die Zahl der Enten = 6 und die der Hühner = 84, wie du in der Tafel siehst.[1]) So fahre fort, bis

Tauben	Ringeltauben	Lerchen	Enten	Hühner
1	3	2	4	90
3	3	2	5	87
5	3	2	6	84
7	3	2	7	81
9	3	2	8	78
11	3	2	9	75
13	3	2	10	72
15	3	2	11	69
17	3	2	12	66
19	3	2	13	63
21	3	2	14	60
23	3	2	15	57
25	3	2	16	54
27	3	2	17	51
29	3	2	18	48
31	3	2	19	45
33	3	2	20	42
35	3	2	21	39
37	3	2	22	36
39	3	2	23	33

die Zahl der Tauben auf 59 gekommen ist und die der Enten auf 33 und die Hühner auf 3. Dann vermehre die Zahl der Lerchen um 4, so daß sie 6 werden, lasse die Ringeltauben auf 3 stehen und nimm die Zahl der Tauben (zuerst) wieder 1 an, dann ist die Zahl der Enten = 7 und die der Hühner = 83, wie du in der Tafel siehst[2]); dann vermehre

1) Wir stellen die Tafel hierher, wiewohl sie erst zwei Seiten nachher folgt.

2) Diese und die nachher erwähnten Tafeln sind nicht mehr vorhanden, ich lasse daher auch künftig diesen hinweisenden Satz weg.

die Zahl der Tauben immer wieder um 2, lasse das übrige wie vorher und verfahre ebenso, bis die Zahl der Tauben auf 55[1]), die der Enten auf 34[2]), und die der Hühner auf 2[3]) gelangt ist usf.[4]) In allen Fällen fahre so lange fort, bis du zu Ende gekommen bist, und dies findet jedesmal dann statt, wenn die Hälfte der Tauben und zwei Drittel der Ringeltauben und drei Viertel der Lerchen zusammen 100 oder mehr ausmachen; dann kehre so weit zurück, bis jene Summe kleiner als 100 wird, so daß für die Hühner noch etwas übrig bleibt. So fahre also fort, bis die Zahl der Tauben auf 3, die der Ringeltauben auf 3, die der Lerchen auf 50, die der Enten auf 41 und die der Hühner auf 3 gekommen ist. Von hier an hört nun die Zahl 3 der Ringeltauben auf, bis jetzt hast du 212 Lösungen erhalten; nun erhöhe jene 3 der Ringeltauben auf 6, die Zahl der Tauben nimm 1 an, und lasse die Zahl der Lerchen wieder 2, so wird die Zahl der Enten = 6, und für die Hühner bleibt die Zahl 85. Dann verfahre mit der Zahl der Tauben, Ringeltauben und Lerchen wie vorher, bis die Zahl der Tauben auf 1, die der Ringeltauben auf 6, die der Lerchen auf 50, und die der Enten auf 42 gekommen ist, dann ist die der Hühner = 1. Nun ist es mit den Lösungen, in denen die Zahl der Ringeltauben = 6 beträgt, zu Ende, und die Zahl der Lösungen, die du bis jetzt hast, beträgt 403. Nimm jetzt die Zahl der Ringeltauben = 9 an, die Zahl der Lerchen wieder = 2 und die der Tauben = 1, so ist die Zahl der Enten = 8, also die der Hühner = 80; dann verfahre wieder wie vorher. Und so fahre nun auch mit der Vermehrung der Ringeltauben um 3 immer fort, bis die Zahl dieser auf 51, die der Lerchen auf 6, die der Enten auf 39, die der Tauben auf 1 und die der Hühner auf 3 gekommen ist.[5]) Dann hast du bis jetzt im ganzen 1442[6]) Lösungen.

Nun kehre zur zweiten Annahme zurück, wo wir die Zahl der Tauben = 2, die der Ringeltauben = 3, die der Lerchen = 4 gesetzt haben, woraus sich dann für die Enten die Zahl 6 und für die Hühner die Zahl 85 ergab. Dann verfahre ganz gleich, wie du bei der ersten Annahme

---

1) Der Text hat 51. 2) Der Text hat 35.

3) Der Text hat 1; die Zahlen des Textes stimmen für die Lerchenzahl 10 (statt 6), die im Text ausgelassen worden ist, ich habe darum auch die Stelle für die Lerchenzahl 14 weggelassen.

4) Hier wiederholt der Verfasser nochmals das Verfahren, d. h. Vermehrung der Lerchen je um 4, Beibehaltung der Zahl 3 für die Ringeltauben usw., ich lasse diese Stelle weg.

5) Dieses ist nicht die letzte Lösung, sondern: 54 Ringeltauben, 2 Lerchen, 39 Enten, 3 Tauben, 2 Hühner.

6) Die richtige Zahl ist, wie ich durch genaue Prüfung gefunden habe, 1443.

verfahren bist[1]), bis die Zahl der Ringeltauben auf 51, die der Lerchen auf 4, die der Enten auf 39, die der Tauben auf 4 und die der Hühner auf 2 gekommen ist; dann hast du im ganzen nach beiden Annahmen 2676 Lösungen gefunden. — Lob sei Gott für das, was er hiervon uns gelehrt hat, für alle Zeiten! [Wenn du willst, so verfahre mit den Lerchen, wie du verfahren bist mit den Ringeltauben und mit den Ringeltauben, wie du verfahren bist mit den Lerchen und mit den Tauben auch in gleicher Weise, so Gott will.][2]) Beendigt ist das Buch mit dem Lobe Gottes und seines Propheten.

Anhang.

Auf Fol. 101—102 befindet sich, durch 42 Blätter getrennt von der Abhandlung Shodjā's ein Bruchstück, und zwar das Ende einer Arbeit über den gleichen Gegenstand, das ich ebenfalls hier in Übersetzung wiedergebe. Für das Weitere vergleiche man den Schluß des Kommentars: . . . . . (die Zahl z der Sperlinge ist also) $60 - x - y$, und ihr Wert ($\frac{1}{7}z$) mithin $= 8\frac{4}{7}$[3]) $- \frac{1}{7}x - \frac{1}{7}y$; setzen wir dies in die zweite Gleichung ($3x + 2y + \frac{1}{7}z = 60$) ein[4]), so erhalten wir:

$$3x + 2y + 8\tfrac{4}{7} - \tfrac{1}{7}x - \tfrac{1}{7}y = 60;$$

gleichen wir aus, so haben wir: $2\frac{6}{7}x + 1\frac{6}{7}y = 51\frac{3}{7}$, machen wir alles zu Siebenteln, so erhalten wir: $\frac{20}{7}x + \frac{13}{7}y = \frac{360}{7}$, oder: $20x + 13y = 360$.[5]) Hierauf bestimme man nach den Regeln der Zahlenlehre[6]), wie 360 in zwei Teile geteilt werden kann, von denen der eine durch 20, der andere durch 13 teilbar ist. Hast du diese gefunden, so ist die Lösung möglich, sonst nicht, wenn man die Lösung nur in ganzen Zahlen haben will. Der Beweis hierfür ist aufgezeichnet in einer[7]) Abhandlung, die ich hier weglasse wegen ihrer Länge und der Beschränktheit meiner Zeit. Man findet die eine Zahl gleich 260, die andere gleich 100; teilen wir 260 durch 13, so haben wir 20 und dies ist die Zahl der Hühner, und teilen wir 100

---

1) d. h. vermehre jeweilen die Tauben um 2, die Ringeltauben um 3, die Lerchen um 4.

2) Was in eckigen Klammern steht, verstehe ich an dieser Stelle nicht, der Satz scheint eingeschoben zu sein.

3) Der Text hat nur $\frac{4}{7}$.

4) Der Text lautet hier etwas anders, aber für mich wegen des Fehlens des Anfangs unverständlich.

5) Diese Gleichung ohne den Nenner 7 fehlt im Text.

6) Ṣanā'at el-a'dād. 7) Im Text steht der bestimmte Artikel.

durch 20, so haben wir 5 und dies ist die Zahl der Rebhühner; addieren wir beide Zahlen und subtrahieren die Summe von 60, so erhalten wir 35 und dies ist die Zahl der Sperlinge. Dies ist eine Lösung[1]) der Aufgabe; aber sie hat noch viele Lösungen; wenn du die Sache näher betrachtest und meinen Weg in diesem Beispiel einschlägst, so wirst du zur Wahrheit gelangen. Schon habe ich dem Rechner von ʿOmān[2]) 334 Lösungen übermittelt; ich nahm (nämlich) zuerst von der (angenommenen) Zahl der Tauben (340) 5 weg und teilte das übrige in die möglichen Teile, dann nahm ich von den Tauben 10 weg und teilte das übrige wieder in die möglichen Teile, hierauf 15, dann 20, dann 25 usf. Jetzt kommt dir noch die Aufgabe zu, jeweilen nur eine (statt fünf) von der Zahl der Tauben wegzunehmen, und das Übrigbleibende jeweilen auf alle möglichen Arten zu teilen; ich habe dies getan und so alle möglichen Fälle erschöpft, wie es in der folgenden Tabelle zusammengestellt ist.[3]) Denn bei Gott ist die Hilfe und auf ihn das Vertrauen in jeder Lage! Schaue nur auf die wunderbare Ordnung dieser Zahlen!

Tauben	Rebhühner	Hühner	Sperlinge
1	108	18	273
1	95	38	266
1	82	58	259
1	69	78	252
1	56	98	245
1	43	118	238
1	30	138	231
1	17	158	224
1	4	178	217

Kommentar.

Das arabische Manuskript dieser Abhandlung befindet sich im Leidener Kodex Gol. 199 und nimmt dort unter anderen Abhandlungen die sechste Stelle ein (fol. 50^b—58^b). Die Abschrift wurde zwischen 608 und 615 d. H. (1211—1218 n. Chr.) von dem Schreiber MESʿŪD B. MUḤ. B. ʿALĪ EL-

1) „Lösung“ wird hier durch ḳism = Teil, Art wiedergegeben.

2) Dieses „Rechner von ʿOmān“ ist unsicher.

3) Von dieser Tabelle gebe ich nur den Anfang, nämlich die 9 Lösungen, in denen die Zahl der Tauben = 1 ist; im Text geht sie bis zur Zahl 11 der Tauben und gibt im ganzen 98 Lösungen.

Djulfarī [1]) gemacht; die Schrift ist klein, hübsch, regelmäßig, doch stört oft das Fehlen diakritischer Punkte, auf die Seite kommen 17 Zeilen. Bis jetzt ist von dieser Schrift kein zweites Exemplar in arabischer Sprache bekannt; in hebräischer Übersetzung existiert sie noch in München[2]), und in lateinischer sehr wahrscheinlich im Pariser Manuskript 7377A, Nr. 6, unter dem Titel: „Anonymi tractatus de arithmetica". Herr Prof. Dr. E. Wiedemann in Erlangen ließ das Manuskript von Leiden zu seinem eigenen Gebrauch kommen und verschaffte mir auf meinen Wunsch hin Photographien in Weiß auf Schwarz von dieser Abhandlung und vom Anhang, für welches Entgegenkommen ich ihm an dieser Stelle den verbindlichsten Dank ausdrücke. Ebenso halte ich mich zum besten Dank verpflichtet gegenüber der Verwaltung der kgl. Universitätsbibliothek zu Leiden, die mir den Kodex noch zur nachträglichen näheren Untersuchung nach Zürich (Universitätsbibliothek) gesandt hat.

Was den Verfasser der Abhandlung, Shodjā' b. Aslam, anbetrifft, so verweise ich auf meine Arbeit: *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*[3]); er ist nach Muḥ. b. mūsā el-Khwārizmī der älteste arabische Algebraiker, von dem uns noch Schriften erhalten sind. Er lebte zirka 900 n. Chr. in Ägypten, seine Blütezeit fällt eher noch vor dieses Jahr. Er war nach dem, was wir bis jetzt von ihm kennen, einer der bedeutendsten Mathematiker der Araber und besonders mit den indischen Methoden in der Algebra vertraut.

Die erste Frage, die sich uns beim Studium dieser Abhandlung aufdrängt, ist natürlich die über den Ursprung und den historischen Zusammenhang dieser Aufgaben, die im Anfang des 16. Jahrhunderts unter verschiedenen Namen wie „regula virginum", „regula potatorum", „regula coeci" oder „coeti"[4]) in den Rechenbüchern der deutschen Rechenmeister und Cossisten, wie Adam Riese, Grammateus, Apian, Rudolff u. a. auftreten.

In abendländischen Quellen treffen wir zuerst auf eine ums Jahr 1000 im Kloster Reichenau geschriebene Handschrift mit der Abhandlung „propositiones ad acuendos juvenes"[5]), die als 34. und 38. Aufgabe ähnliche Beispiele für die „regula coeci", wie wir sie im folgenden nennen wollen, da dies immer noch der gebräuchlichste Name ist[6]), enthält, wie sie uns hier Shodjā' bietet; diese Abhandlung wurde vom Herausgeber der *Opera*

1) Von einem Ort Djulfar im Gebiete von Merw.
2) Vgl. Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 34.
3) Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. **10**, 1900, S. 43.
4) Vgl. Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 112.
5) Vgl. Cantor, *Vorlesungen* I^2, S. 784—789.
6) Shodjā' hat gar keinen Namen für die Regel.

ALCUINI, dem Abt FROBENIUS von St. Emmeran (1709—91), dem ALCUIN zugeschrieben, was aber keineswegs sicher ist, wir setzen also vorläufig ihr erstes Auftreten im Abendland auf das Jahr 1000 an.

Bei den Indern treffen wir von den uns bekannten Schriften zuerst bei BHĀSKARA (ca. 1150) auf solche Aufgaben. In der *Vīja Gaṇita* dieses Gelehrten[1]) findet sich folgendes Beispiel: 5 Tauben sind zu haben für 3 Drachmen, 7 Kraniche für 5, 9 Gänse für 7 und 3 Pfauen für 9 Drachmen. Bringe 100 dieser Vögel für 100 Drachmen als Dankbezeugung für den Fürsten." Am Anfang der Aufgabe fügt BHĀSKARA hinzu: „Beispiel aus alten Autoren". Also ist diese Aufgabe bedeutend älter als BHĀSKANA, vielleicht kommt sie schon bei MAHĀVĪRA[2]) (ca. 850) vor, von dem nächstens ein mathematisches Werk zur Veröffentlichung gelangen wird, wahrscheinlich aber noch früher.

Bei den Arabern finden wir nach SHODJĀ' einige ähnliche Aufgaben bei EL-KARKHĪ[3]), sie handeln aber von Münzen ungleicher Feinheit und nicht von Personen verschiedenen Geschlechtes, oder Vögeln verschiedener Art und werden auch als Mischungsrechnungen behandelt und gelöst.

Das dem Alter nach nächste Werk nach dem *Vīja Gaṇita* des BHĀSKARA ist der *Liber Abbaci* des LEONARDO von Pisa, wo folgende Aufgabe steht[4]): Für 30 Denare sollen 30 Vögel, Rebhühner Tauben und Sperlinge gekauft werden, wieviel Stück trifft es auf jede Art? Es folgt dann[5]) noch eine solche Aufgabe mit vier Vogelarten, Rebhühner, Tauben, Turteltauben und Sperlinge, an Zahl wieder 30. Die erste Aufgabe löst LEONARDO, indem er sich vielleicht an EL-KARKHĪ anlehnt, ähnlich wie die Mischungsrechnungen, in der zweiten nähert er sich etwas mehr der Methode SHODJĀ's.

Von LEONARDO an treffen wir bis auf die ersten deutschen Rechenbücher (c. 1482) hie und da[6]) solche Aufgaben; bei den deutschen Rechenmeistern sind die verschiedenen Vogelarten verschwunden und es treten an ihre Stelle meistens Männer, Frauen und Jungfrauen, weshalb die Regel dann vorherrschend „regula virginum" genannt wird.

Aus der Vergleichung der Aufgaben und aus dem, was wir bis jetzt von LEONARDOS Quellen wissen, ergibt sich mit fast absoluter Sicherheit, daß LEONARDO auch hier wieder, wie bei den mit Hilfe der Algebra ge-

1) Vgl. COLEBROOKE, *Algebra with arithmetic and mensuration*, usw., London 1817, S. 233—235.

2) Vgl. den Artikel von D. E. SMITH: *The Ganita-Sara-Sangraha of MAHĀVĪRĀCĀRYA* in Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/09, S. 106—110.

3) *El-Kāfī*, edid. A. HOCHHEIM, III. Teil, S. 19—20.

4) Siehe die Ausgabe von B. BONCOMPAGNI, Rom 1857, S. 165.

5) A. a. O. S. 165—166.

6) Vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 201—202; 6_3, 1905, S. 399.

lösten Aufgaben über Zehn- und Fünfecke,[1]) bei Shodjā' oder einem seiner Kommentatoren in die Schule gegangen ist. Denn wie wollte man es sonst erklären, daß Leonardo ganz dieselben Vogelarten wählt wie Shodjā'? Was den letzteren anbetrifft, so ist wohl ebensowenig daran zu zweifeln, daß er auch hier, wie in andern seiner Arbeiten, sich auf indische Quellen stützt. In der Wahl von Vögeln, die allerdings andere sind als bei den Indern, was sehr erklärlich ist, in der Wahl der Zahl 100 für die Summe der Vögel und der Preise, und in der Art der Auflösung, die bis auf die Behandlung der reduzierten Gleichung mit zwei Unbekannten so ziemlich dieselbe bei Indern und Arabern ist, bieten sich genügende Anhaltspunkte zu diesem Schlusse.

Ob nun die Aufgaben in dem Reichenauer Manuskript aus arabischen, indischen oder anderen Quellen stammen, ob die indischen Aufgaben dieser Art wirklich original oder den Indern auch von einem andern Volke zugekommen seien, das sind Fragen, die kaum jemals sicher zu beantworten sein werden, und es wäre deshalb eine unfruchtbare Aufgabe, uns weiter in Konjekturen hierüber einzulassen.[2])

Die Arbeit Shodjā's bietet sich übrigens, wenn wir sie mit der Aufgabe bei Bhāskara vergleichen, als eine recht selbständige dar, und zwar in verschiedener Hinsicht: Erstens wählte er für die Unbekannten nicht Farbennamen wie die Inder, sondern Namen von Münzen; zweitens geht er bis zu Aufgaben mit fünf Unbekannten, während wir bei den Indern, soweit wir ihre Schriften kennen, nur solche mit vier Unbekannten treffen; drittens weicht er auch in der Methode der Auflösung etwas von jenen ab, allerdings, wie man zugestehen muß, nicht ganz zu seinem Vorteil; das Verfahren Shodjā's, das die Kuṭṭaka-(Zerstäubungs-)Methode umgeht, läßt sich nur leicht anwenden, solange die Koeffizienten der Unbekannten und besonders die absolute Zahl nur klein sind; ist der Wert der letzteren recht groß, so artet dasselbe in ein langweiliges Probieren aus. Die indische Zerstäubungsmethode kam den Arabern jedenfalls etwas zu mechanisch und deshalb nicht leicht verständlich vor, sie suchten sie deshalb durch einen natürlicheren, dem Verständigen sich von selbst darbietenden Weg zu ersetzen. Man kann freilich darüber noch im Zweifel sein, ob Shodjā' die indische Zerstäubungsmethode überhaupt gekannt habe, sehr wahrscheinlich aber ist es, daß sein Kommentator, denn als solchen wollen wir den Verfasser des Anhangs betrachten, sie kannte, indem er auf ein Buch hinweist, in welchem er das Verfahren auseinandergesetzt habe, eine Zahl in zwei Teile zu zerlegen, von denen der eine durch eine gegebene Zahl, der

1) Vgl. Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 15—42.
2) Vgl. Biblioth. Mathem. 8_3, 1907 08, S. 415.

andere durch eine zweite solche teilbar sei; er nennt allerdings seine Methode nicht, aber sie kann ja von der indischen, bzw. modernen nicht wesentlich verschieden gewesen sein.

Ist nun auch die Behandlung der unbestimmten Gleichungen, wie wir sie bei SHODJĀ' treffen, vom modernen mathematischen Standpunkt aus eine ziemlich primitive zu nennen, so steht dieser Mathematiker doch bedeutend höher als die meisten deutschen Rechenmeister und Cossisten des 16. Jahrhunderts, indem er nicht nur nackte, dem Nichtmathematiker meistens unverständliche Regeln aufstellte, wie jene, sondern seine Art der Lösung zu erklären und zu begründen suchte. Auch gehen die Aufgaben der genannten Rechenmeister, soweit wir sie kennen, nicht über drei Unbekannte hinaus; sie bilden auch kein eigenes Kapitel in ihren Rechenbüchern, wie bei SHODJĀ', sondern sind ungeordnet unter andern Aufgaben zerstreut.

Betrachten wir nun die einzelnen Aufgaben und ihre Auflösungen noch einmal kurz nach unserer heutigen Darstellungsweise.

Aufgabe 1. Diese führt auf die beiden Gleichungen

$$x + y + z = 100$$
$$5x + \tfrac{1}{20}y + z = 100.$$

Diese beiden Anfangsgleichungen fehlen in allen sechs Aufgaben, es findet sich jedesmal nur die aus der Elimination der letzten Unbekannten sich ergebende Gleichung vor, die in diesem Falle heißt:

$$100 - x - y = 100 - 5x - \tfrac{1}{20}y;$$

hieraus folgt:

$$4x = \tfrac{19}{20}y, \quad \text{oder} \quad y = 4x + \tfrac{4}{19}x.$$

Diese Aufgabe hat nur eine Lösung: $x = 19$, $y = 80$, $z = 1$.

Aufgabe 2. Es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$x + y + z = 100$$
$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y + 2z = 100;$$

hieraus folgt durch Elimination von z:

$$200 - 2x - 2y = 100 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}y,$$

hieraus:

$$100 - 1\tfrac{1}{2}y = 1\tfrac{2}{3}x$$

oder:

$$x = 60 - \tfrac{9}{10}y.$$

x wird ganzzahlig und positiv für $y = 10$ bis $y = 60$, die Gleichung hat also sechs Lösungen.

Aufgabe 3. Man erhält die beiden Gleichungen

$$x + y + z + u = 100$$
$$4x + \tfrac{1}{10}y + \tfrac{1}{2}z + u = 100.$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von u die Gleichung

$$100 - x - y - z = 100 - 4x - \tfrac{1}{10}y - \tfrac{1}{2}z;$$

hieraus: $$3x = \tfrac{9}{10}y + \tfrac{1}{2}z$$

oder: $$x = \tfrac{3}{10}y + \tfrac{1}{6}z.$$

Diese Gleichung hat zwei Reihen von Lösungen, denn x wird ganzzahlig einmal für $y = 10, 20, 30 \ldots$ und $z = 6, 12, 18 \ldots$, das anderemal für $y = 5, 15, 25 \ldots$ und $z = 3, 9, 15 \ldots$ Im ganzen ergeben sich 98 Lösungen, der Text gibt nur 96 an; aus der ersten Reihe ist die Lösung $y = 10$, $z = 72$, $x = 15$, $u = 3$, aus der zweiten Reihe die Lösung $y = 5$, $z = 75$, $x = 14$, $u = 6$ weggelassen worden. Hierauf wird auch in zwei Randbemerkungen durch einen Glossisten oder Kommentator, mit Namen Afḍal ed-dīn ʿOmar b. ʿAllān, aufmerksam gemacht, über dessen Lebensverhältnisse ich keine Angaben gefunden habe.

Aufgabe 4. Sie führt auf die beiden Gleichungen

$$x + y + z + u = 100$$
$$2x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}z + u = 100.$$

Hieraus erhält man durch Elimination von u die Gleichung

$$100 - x - y - z = 100 - 2x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{3}z$$

und hieraus: $$x = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{2}{3}z$$

x wird ganzzahlig für gerade y und für durch drei teilbare z; die Lösung mit der kleinsten Zahl der y und der größten Zahl der z ist: $y = 2$, $z = 57$, $x = 39$, $u = 2$; die Lösung mit der kleinsten Zahl der z und der größten der y ist: $y = 62$, $z = 3$, $x = 33$, $u = 2$; sämtliche Kombinationen unter den y und z ergeben 304 Lösungen.

Aufgabe 5. Die beiden Gleichungen sind

$$x + y + z = 100$$
$$3x + \tfrac{1}{20}y + \tfrac{1}{3}z = 100,$$

woraus sich nach Elimination von z ergibt:

$$100 - x - y = 300 - 9x - \tfrac{3}{20}y$$

und hieraus: $$200 + \tfrac{17}{20}y = 8x$$

oder: $$x = 25 + \tfrac{17}{160}y.$$

Der kleinste ganzzahlige Wert für x würde sich ergeben für $y = 160$, also hat diese Aufgabe keine Lösung.

Aufgabe 6. Die beiden Gleichungen lauten:

$$x + y + z + u + v = 100$$
$$2x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{4}u + v = 100.$$

Hieraus folgt durch Elimination von v:

$$100 - x - y - z - u = 100 - 2x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{4}u,$$

und hieraus: $$x = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{2}{3}z + \tfrac{3}{4}u.$$

Auch bei dieser Aufgabe gibt es wie bei Aufgabe 3) zwei Gruppen von Lösungen; die eine wird erhalten, indem man für y alle geraden Zahlen von 2 an, für z alle durch 3 teilbaren Zahlen von 3 an, und für u alle durch 4 teilbaren Zahlen von 4 an setzt; die größtmöglichste Zahl für die y ist 58, für die z 51, für die u 52; es handelt sich also darum, aus den drei Reihen von Zahlen:

2, 4, 6, ... 58 (y)
3, 6, 9, ... 51 (z)
4, 8, 12, ... 52 (u)

je eine aus der ersten Reihe mit einer aus der zweiten Reihe und mit einer aus der dritten Reihe zu kombinieren; es dürfen aber jeweilen nur solche Zahlen kombiniert werden, die der Bedingung genügen:

$$x + y + z + u \quad \text{oder} \quad 1\tfrac{1}{2}y + 1\tfrac{2}{3}z + 1\tfrac{3}{4}u < 100$$

man erhält so 1233 Lösungen. — Die andere Gruppe wird erhalten, indem man für y alle ungeraden Zahlen von 1 an, für z alle durch 3 teilbaren Zahlen von 3 an und für u die jeweilen um 4 wachsenden Zahlen von 2 an setzt; die größtmögliche Zahl für die y ist 59, für die z 54, für die u 50; es handelt sich also darum, aus den drei Reihen von Zahlen:

1, 3, 5, ... 59 (y)
3, 6, 9, ... 54 (z)
2, 6, 10, ... 50 (u)

wieder wie im vorigen Falle und mit derselben Beschränkung Kombinationen zu je dreien zu bilden; die Zahl der Lösungen ist in diesem Falle 1443, also die Gesamtzahl der Lösungen 2676. — SHODJA^{c} hat, wie man aus der Aufgabe ersieht, die zweite Gruppe zuerst behandelt, die erste nur ganz kurz berührt.

Anhang. Leider haben wir hier nur ein Bruchstück einer Abhandlung ähnlichen Inhaltes vor uns, der Anfang fehlt. Die Vermutung liegt nahe, es möchte dieses Bruchstück aus einem Kommentar der Arbeit Shodjā's stammen, und der Kommentator vielleicht der oben genannte Verfasser der beiden Glossen Afḍal ed-dīn ʿOmar b. ʿAllān, sein. Wir geben hier den Anfang dieser Aufgabe, wie er dem Schlusse entsprechend ungefähr gelautet haben mag:

„Es kauft jemand 400 Vögel von vier Arten, Tauben, Rebhühner, Hühner und Sperlinge; eine Taube kostet eine Drachme, ein Rebhuhn 3 Drachmen, ein Huhn 2 Drachmen und 7 Sperlinge eine Drachme. Er hat 400 Drachmen, wieviel kann er von jeder Art kaufen? Man nehme die Zahl der Tauben = 340 an,[1]) setze die der Rebhühner = x, die der Hühner = y, dann ist die Zahl (z) der Sperlinge also = $60 - x - y$ . . ."

Nachdem die Zahl der Tauben (u) = 340 angenommen war, hatte man also die beiden Gleichungen:

$$x + y + z = 60$$
$$3x + 2y + \tfrac{1}{7}z = 60,$$

aus denen durch Elimination von z sich ergab:

$$20x + 13y = 360.$$

Diese Gleichung und auch die folgenden, die sich bei anderer Annahme der Taubenzahl jeweilen ergeben würden, scheinen nun, nach dem Text zu schließen, auf andere Art gelöst worden zu sein, als es von Shodjā' geschehen ist, und dieser andere Weg wird, wie oben schon bemerkt wurde, wohl mit dem indischen Zerstäubungsverfahren identisch oder doch verwandt gewesen sein. Was die Zahl der Lösungen anbetrifft, so wird dieselbe ca. 1700 betragen; ich habe die Lösung der Aufgabe nicht vollständig durchgeführt, sondern nur die Fälle geprüft, in denen die Zahl der Tauben durch 5 teilbar ist, also die Fälle von 395 bis 5 Tauben. Bei diesen ergaben sich im ganzen 341[2]) Lösungen, also wird die Zahl aller etwa 5mal größer sein. Bei 395 bis 370 Tauben gibt es keine Lösungen, bei 365 eine, bei 360 wieder keine, von 355 an gibt es stets Lösungen bis auf 5 Tauben hinunter, in welchem Falle man neun Lösungen erhält; auch die vier Fälle von 4 bis 1 Taube ergeben jeder neun Lösungen.

---

1) Warum gerade diese Zahl gewählt wird, weiß ich nicht.

2) Der Text hat unrichtig 334, diese Zahl würde auch nicht stimmen, wenn an jener Stelle nur die Fälle von 340 bis auf 5 Tauben hinunter gemeint wären, denn diese Zahl ist 337.

Übrigens sind bei dieser Aufgabe die sich jeweilen ergebenden Gleichungen mit zwei Unbekannten auch ohne das Zerstäubungsverfahren sehr leicht zu lösen. Bei der Gleichung $20x + 13y = 360$ erkennt man sofort die richtige Zerlegung von 360; nehmen wir nun die Gleichung $20x + 13y = 1572$, die sich bei der Annahme von 138 Tauben ergibt, so ist sofort klar, daß man für y nur solche Werte setzen darf, für welche $13y$ am Ende eine 2 und als Zehnerziffer eine ungerade Zahl aufweist, damit $20x$ oder $1572 - 13y$ durch 20 teilbar werde; dies sind also die Werte 4, 24, 44, 64, 84, 104, denen die Werte 76, 63, 50, 37, 24, 11 für x entsprechen. Nicht in allen Fällen aber ist die Sache so leicht, und dann kommt es eben, wie schon erwähnt, auf ein bloßes Probieren hinaus. Auf diese Weise scheinen eine Reihe von Mathematikern vorgegangen zu sein, wie z. B. Leonardo von Pisa in seinem *Flos*[1]), Chuquet in seinem *Triparty*[2]), Initius Algebras (oder sein deutscher Kommentator) in seiner *Algebra*[3]) und P. Apian in seiner *Kauffmanns Rechnung.*[4])

1) *Scritti di Leonardo Pisano*, pubbl. da B. Boncompagni **2**, Rom 1862, S. 247—248.

2) Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, S. 652.

3) Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. **13**, 1902, S. 571—573.

4) P. Treutlein, *Das Rechnen im 16. Jahrhundert*, in den Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **1**, 1877, S. 91, und G. Eneström in Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 392—393.

Hindu numerals in the Fihrist.

By Louis C. Karpinski in Ann Arbor.

Silvestre de Sacy[1]) was one of the first to call attention to the two forms of numerals in use among the Arabs. The type of numerals ordinarily[2]) called Indian are quite like the modern Arabic (of Arabia), while the ġobār (or dust) forms resemble somewhat these which we use. The term ġobār is connected with the fact referred to by al-Bīrūnī in his work on India, that the Hindus performed arithmetical calculations on a sand board.[3]) In a work[4]) translated by Woepcke the designations Indian and ġobār are interchanged, Indian being applied to the modern European forms and ġobār to the Arabic. At first the supposition was made that the ġobār system was characterized by the use of superposed dots to denote the successive powers of ten, thus $\dot{2}$ for 20, $\ddot{2}$ for 200 and so on. However, as Woepcke shows[5]), this usage was not confined to either of the two types, as in fact in one manuscript the notation of the superposed dots is employed with both the ġobār and the Indian forms. It is hardly necessary to state that both types were also used without the superposed dots. The ġobār forms, it is stated by Ḥosein ibn Muhammad al Maḥallī[6]), were commonly employed in the Occident while the Indian forms were more common in the Orient.

---

1) *Grammaire arabe,* Paris 1810, Tome I planche VIII.

2) So in the three Arabic works, of the fifteenth to the eighteenth centuries, cited by Woepcke in his *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens;* Journal asiatique $\mathbf{1}_6$, 1863, p. 58—69.

3) The story is told in the first passage cited by Woepcke (*Propagation des chiffres indiens,* p. 60) that a man from India spread dust on a board and showed how to perform arithmetical operations thereon.

4) *Introduction au calcul Gobârî et Hawâî;* Atti dell' accademia pontificia dei Nuovi Lincei **19**, 1866, p. 361—383.

5) *Propagation des chiffres indiens,* p. 244—246, note.

6) *Propagation des chiffres indiens,* p. 63.

Confirmation of the early use of the ġobār numerals in the West is given by two Spanish manuscripts[1]) of the tenth century which contain the ġobār characters without the zero. In both cases the reference is an addition to the first chapter of the third book of the *Origines* of ISIDORUS of Seville, in which the Roman numerals are under discussion. "Item de figuris arithmeticis. Scire debemus Indos subtilissimum ingenium habere et ceteras gentes eis in arithmetica et geometria et ceteris liberalibus disciplinis concedere. Et hoc manifestum est in novem figuris, quibus designant unumquodque gradum cuiuslibet gradus. Quarum hae sunt forma": and the nine figures follow.

Probably the oldest known Arabic work containing all the numerals is the one written at Shiraz by the geometer AḤMED IBN MUḤAMMAD, IBN ʿABDEL-ǦALÎL, ABÛ SAʿÎD, AL-SIǦZÎ[2]) in the year 970 A.D. The forms used do not correspond, as a whole, to either of the types mentioned; the two is given both as the Arabic ٢ and in a form not unlike the modern 2.

The *Fihrist* (987 A.D.) gives an account[3]) of an Indian notation employing dots placed below the numerals. Both WOEPCKE and DE SACY were familiar with Arabic manuscript copies of this work and it is rather surprising[4]) that neither of these scholars noted the passage of which I present here a free translation[5]):

"A word about India."

"These people differ in languages and in religions, and they have a number of writings. Someone who traveled in their countries told me that they have about two hundred different writings (alphabets). He said that he saw a golden idol in the house of the sultan which was said to

1) P. EWALD, *Mitteilungen;* Neues Archiv d. Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde 8, 1883, p. 354—364. One of the manuscripts is of 976 A.D. and the other of 992 A.D.

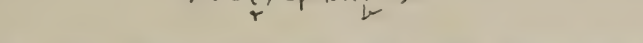
2) WOEPCKE, *Sur une donnée historique relative à l'emploi des chiffres indiens par les Arabes;* Annali di scienze matematiche e fisiche **6**, 1855, p. 321—324.
H. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **10**, 1900, p. 80.

3) Professor BRÜNNOW (Princeton University) and I recently chanced upon this passage in looking through the *Fihrist.*

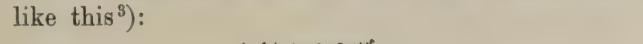
4) It is possible that the section in question was not present in the manuscripts to which they had access. The passage is found on pages 18 and 19 of the *Kitâb al Fihrist* by G. FLÜGEL, Leipzig 1871—72. This work was given out after Professor FLÜGEL's death by J. ROEDIGER and A. MUELLER.

5) I am indebted for the translation to Dr. A. YOHANNAN, Columbia University.

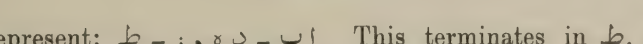
be the picture of Buddha. It is a man sitting on a chair, numbering[1]) with the fingers of one of his hands thirty. Upon the chair was writing like this[2]):



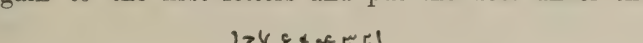
And this man, mentioned above, says that mostly they write by nine letters, like this[3]):



and they represent: ا ب ج د ه و ز ح ط. This terminates in ط, and then they turn again to the first letters and put the dots under them, thus:



These then become: ي ك ل م ن س ع ف ص increasing by tens (ten and ten) and ending in ص. They write then in this way, putting two dots under every letters, thus:



1) The Arabic word used by the writer is given in E. W. Lane's *An arabic english lexicon* (London 1863—1893) as meaning to number with the fingers. So also in the notes by Flügel, *Fihrist,* Vol. II, p. 10.

2) Dr. Gray (Columbia), who has been kind enough to examine this inscription somewhat carefully, has not been able to locate the alphabet of the writing. It is unlike any of the forms given by Bühler, *Indische Paläographie.* As other inscriptions and alphabets in the *Fihrist* (of which the manuscript from which these are taken is of date 1220 A. D.) are accurately copied, it is to be presumed that this one is also.

The forms written below in this inscription, and in the number series are variations found in other manuscripts.

3) Flügel gave a resumé of the *Fihrist* in 1859 in the Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **13**, 1859, p. 559—650: *Über Muḥammad ibn Isḥaḳ's Fihrist al-ʿulum.* In regard to this paragraph he says: "Der Verfasser, der nun nach Sind . . . übergeht, läßt dieses Gebiet von einem Volke bewohnt sein, dessen Sprache ebenso in verschiedene Dialekte wie seine Religion in verschiedene Secten zerfalle. Es bediene sich mehrerer Schriftarten . . ., von denen der Verfasser einige erwähnt und ihre Eigenthümlichkeiten bezeichnet. Die Zahl der Buchstaben ist nicht groß, sie ergänzen aber die fehlenden durch Beifügung von Puncten." In view of the fact that the explicit statement is made "increasing by tens" and the further fact that these forms are found later as numerals, it is certain that the writer is giving here a system of numeration.

Later in his critical notes (*Kitâb al-Fihrist,* Vol. II, Leipzig 1872, p. 10) Flügel refers to the third line, having two dots below, as a "Zahlenreihe", calling attention to the omission of the eighth symbol in all codices which he used.

Possibly these subscript dots are used here only as we use Roman numerals. Woepcke (*Propagation des chiffres indiens*, p. 245—246) states that this is the way in which the superposed dots are employed and not for computations.

These then are ظ ذ خ ث ت ش ر ق[1]), ending in ظ. Then is written the first letter as it is originally, and this is the figure of the letter ٦̇̇, placing three dots under each letter like this. So they come to all the letters of the mu'jam (Persian letters)[2]), and they write whatever they please."[3])

In the next section in which the people of the Soudan are discussed the writer states that these people do not have any writing of their own but that they use the *hindijah*, meaning the characters which have just been explained.

With the single exception of the five, these forms are almost identical with numerals used in an arithmetic in the Plimpton library by Djamschid which was written in 1516 A. D. Even the five is only slightly different. Their correspondence to modern Arabic forms is apparent.

---

1) ض or غ is omitted.

2) These letters represent the higher hundreds and 1000.

3) Meaning evidently that they could write any number as large as you please. It is rather striking that the sixteenth century manuscript, cited by Woepcke (*Propagation des chiffres indiens*, p. 509) should give the system with the superposed dots to the same number (1000, or 1 with three dots) as it is here given.

Robert of Chester's Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi.

By L. C Karpinski in Ann Arbor.

The important role played by the Algebra of Al-Khowarizmi is attested by the numerous works of the fifteenth and sixteenth centuries which contain either excerpts from the Latin versions or translations from the Latin into German or Italian. The library of Mr. G. A. Plimpton[1]) includes three manuscripts which treat of algebra after the manner of the great Arab writer. Probably the most important of these is the „Liber Mahucmeti de Algebra et almuchabala. 1. recuperationis et oppositionis[2])" of date 1456, probably a German or Austrian product. This follows quite closely the Libri[3]) version, but contains some material not found in the text published by Libri. An Italian mathematical treatise of about 1464[4]) gives an almost word for word translation of the sections in which Al-Khowarizmi explains the six fundamental equations. Not only in Italy and Germany but in France also this algebra was studied, for Rollandus[5]), writing in 1424, devotes considerable attention to the subject, following Al-Khowarizmi's method of presentation.

For the sake of completeness it may be well to recall here The Algebra of Mohammed Ben Musa[6]) in Arabic and English, and another Latin translation[7]) attributed to Gerard of Cremona.[8])

---

1) See D. E. Smith, *Rara Arithmetica,* Boston 1908.

2) Smith, l. c., p. 454—456. The .l. in the above title is the ordinary ligature for „id est". I find the same symbol in the Vienna codex, Nr. 4770, f. 10a, with meaning „id est".

3) *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* Vol. I, Halle 1865.

4) Smith, l. c., p. 459. The date 1464 occurs so frequently in the problems that it seems a more probable date than 1460 as given by Professor Smith.

5) Smith, l. c. p. 446—447.

6) By Fr. Rosen, London 1831, from an Oxford manuscript of 1342.

7) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese;* Atti d. Accad. pont. dei nuovi Lincei, June, 1851. The algebra is given on pages 28—51 of the reprint, together with a plate.

8) See A. A. Björnbo, Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, p. 239—241; G. Enestrom, l. c. 9_3, 1908/9, p. 73—74.

Steinschneider[1]) directed attention to the translation of Al-Khowarizmi's Algebra by one Robertus Cestrensis[2]) (probably Robert of Reading) which is found in Cod. Vindob. Nr. 4770, f. 1a—12b. To this same manuscript Curtze[3]) made reference in a later article. Wappler[4]) has given a brief description of a similar manuscript in the K. Bibliothek in Dresden (codex Dresd. C 80, f. 340a—348b). The commentary[5]) on Al-Khowarizmi's Algebra by Adrien Romain was based upon Robert's translation. Aside from the texts here cited the Columbia University Library possesses a copy of Robert's version in the handwriting of Johann Scheubel[6]) (or Scheybl).

The title page of Scheubel's manuscript reads as follows:

Breuis ac dilucida regularum Algebrae descriptio, autore Joanne Scheubelio, in inclyta Tubingensi academia Euclidis professore ordinario.[7])

Huic accedit liber consumatissimi mathematici Jordani, de datis:

Liber praeterea, continens demonstrationes regularum Algebrae, Arabice olim conscriptus.

Qui ambo eodem Scheubelio nunc primum, quantum fieri potuit emendate in lucem aedita, et aptissimis atque utilibus exemplis illustrata sunt.

Gratia et priuilegio.

The algebra is briefer than Scheubel's published algebra of 1551 and with different problems (in general) although the plan is much the same.[8]) The „De datis" is of interest chiefly because it indicates the prominence

1) Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **25**, 1871, p. 104, and Zeitschr. für Mathem. **16**, 1871, p. 392—393.

2) Robert of Chester.

3) Centralblatt f. Bibliothekswesen **16**, 1899, p. 289.

4) *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert;* Programm Zwickau 1887.

5) H. Bosmans, *Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mahumed Ben Musa El-Chowārezmī;* Annales de la société scientifique de Bruxelles **30**, 1906, p. 267—287.

6) This copy was acquired some years ago through Professor D. E. Smith who later secured photographs of pages from Scheubel's manuscripts in Tübingen. A comparison of the handwriting leaves no doubt that this was the work of Scheubel's own hand. Even in the extended biography of Scheubel by H. Staigmüller (Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, p. 429—469) no mention is made of this work which was evidently prepared for publication.

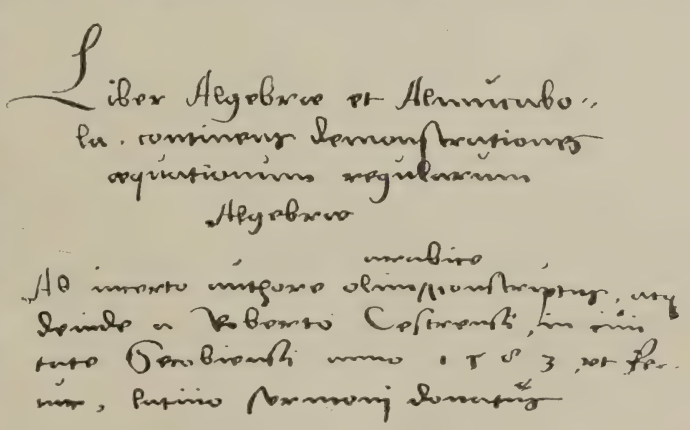
7) This is the same as his designation of his title and residence in his Euclid edition of 1550 (Staigmüller, l. c. p. 436).

8) Scheubel's Euclid edition (1550) is prefaced by a „Brevis regularum algebrae descriptio, una cum demonstrationibus geometricis" (76 pages). The text is different from that of this manuscript and from his 1551 algebra.

given to this work of Jordanus by mathematicians of the sixteenth century. In addition to the statement of the propositions, 113 in number and divided into four books, Scheubel usually adds to each example a „Solutio per regulam Algebrae" in which he uses the algebraic symbolism „co" for „cosa" (x), the square root sign $\sqrt{}$ for „substantia" (x^2) and „N" for „numerus", as well as + and − signs. The explanatory text is not as complete as that given in the work „De numeris datis" edited by Treutlein[1]), nor is the wording of the propositions exactly the same.

Robert of Reading[2]) (Robertus Retinensis), famed as the first translator of the Koran, is said to have travelled extensively before settling in Spain to make translations from the Arabic. His version of the Koran was completed in 1143 which labor he regarded as only preparatory to his study of astronomy and astrology. In an introductory letter to his translation Robert dedicates himself to these sciences. In 1144 A. D. he finished the work „De Compositione Alchemiae" and in the year 1147 A. D. (1185 of the Spanish Era), Ptolemy's „De Compositione Astrolabii". The Algebra was written in 1144 A. D. The correspondence of the dates of the translation of the Koran by Robert de Ketene with the dates of these astronomical and other works by Robertus Cestrensis, together with Robert of Ketene's avowed purpose of devoting himself to scientific labors would seem to establish conclusively that these various spellings stand for the same name.

The Scheubel manuscript gives no less than three designations which might serve as title of the algebra. The title page proper to Robert's exposition (p. 71 of the Ms.) reads: Liber Algebrae et Almucabola, continens demonstrationes aequationum regularum Algebrae.



1) Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. 2, 1879, p. 135—166.

2) The biographical notes are taken largely from the *Dictionary of national biography*. Various other forms of the name are given, including „Robert the Englishman", and Robertus Cestiensis.

Ab incerto authore olim arabice conscriptus atque deinde a Roberto Cestrensi, in ciuitate Secobiensi anno 1183, vt fertur, latino sermoni donatus.

At the top of the next page begins: „Liber Algebrae et Almucabola, de quaestionibus arithmeticis et geometricis. In nomine dei pii et misericordis incipit liber Restaurationis et Oppositionis numeri quem aedidit Mahomet filius Mosi Algaurizin, dixit Mahomet, Laus deo creatori, qui homini contulit scientiam inueniendi vim numerorum." At the end stands (p. 122 of the Ms.): „Laus deo praeter quem non est alius. Finis libri restaurationis et oppositionis numeri quem Robertus Cestrensis de Arabico in latinum in ciuitate Secobiensi transtulit anno millesimo centesimo octogesimo tertio."[1])

The divisions of the work are very similar to those of the Libri version, and indeed to the Rosen and Boncompagni editions. A comparison of the four renderings gives little evidence of different Arabic originals except that there is a long introduction in the Arabic as given by Rosen, and the geometrical problems and the inheritance problems which form so large a part[2]) of that edition are not found in any of the other versions. Differences in terminology and construction are frequent and, we may say, inevitable in translating into Latin from such a fundamentally different language as the Arabic. Similar variations would doubtless occur in three separate English or French translations of the same Chinese original.

Robert's version of the algebra begins with a consideration of numbers as derived from unity and proceeds to a discussion of the three classes of numbers of restoration and opposition, — roots, squares and numbers. The designations herein used are *radix* and occasionally *res* for root,

---

1) The Vienna codex begins: „In nomine dei pii et misericordis Incipit liber restaurationis et oppositionis numeri quem edidit Mahumed filius Moysi Algaurizim", and it ends: „Explicit liber restaurationis et oppositionis numeri, quem Robertus Cestrensis ex arabico in latinum in civitate Sectobiensi transtulit Era MCLXXXIII." Steinschneider (Zeitsch. f. Mathem. **16**, 1871, p. 376) gives the name of the city (Segovia) as Segobiensi. Curtze (l. c.) misreads the date as MCLXXXII.

Adrien Romain (Bosmans, l. c.) writes Al-Khowarizmi's name „Mahumed filius Moysis Algaorizim."

The Dresden codex has further variations: „In nomine dei pii misericordis Incipit liber instauracionis et opposicionis numeri quem edidit Machumed filius Moysi Algaurizm."

The author is indebted to Professor E. Dintzl for photographs of the Vienna codex 4770, f. 1a—12b, and to Mr. L. L. Locke for the above reproduced photograph.

2) Of 174 pages of translation (with some notes) 89 pages are devoted to „On Legacies" and over 15 pages to „Mensuration".

substantia for square and *numerus* or *solus numerus* for number alone. The six cases[1]) as taken up are entirely similar in order and in the numerical data of the problems to those in the other editions noted above. So also the geometrical explanations follow, on the whole, the corresponding sections.

Among the differences in terminology especially worthy of note are the words used for tens, — *articuli*[2]), greater numbers[3]) and *nodi*[4]). The Arabic word of which these terms represent diverse conceptions is ʿuqūd which means tens. The verb from which this word is derived has the meaning „to knot", the connection evidently being with the ancient practise of tying knots on a string to indicate tens.

The chapter „on Mercantile Transactions" is found in Scheubel's manuscript as the „Caput rerum venalium", and also without separate title in the Vienna codex, although according to Wappler[5]) it is not found in the Dresden manuscript. The content follows closely the Libri text. Some interest attaches also to a chapter heading „Caput adiectionis et diminutionis"[6]) (Scheubel) or „Mahumed de additis et diminutis" (Vienna). The paragraphs dealing with the addition and subtraction of the square root of two-hundred[7]) do not appear.

Scheubel adds without the name of Robert of Reading, „Addita quaedam pro declaratione Algebrae" (p. 123—157 of the manuscript). Herein are duplicated many of the problems of the text proper and further some problems found in the Libri and Rosen versions. While these may go back to Robert it is possible that Scheubel had some other source of information in regard to Al-Khowarizmi's Algebra. Included also is the work on the root of two-hundred in the form of four „aenigmata" with a slightly varied geometrical explanation.

In order to give the reader a clearer notion of the variations in the three manuscripts of this translation by Robert of Chester I add here

1) $x^2 = ax$, $x^2 = n$, $ax = n$; $ax^2 + bx = n$, $a^2x + n = bx$, $bx + n = ax^2$.

2) Libri text and the Boncompagni text.

3) Rosen, l. c.

4) Scheubel manuscript and Vienna manuscript. See also Woepcke, Journal Asiatique 1_6, 1863, p. 276.

5) L. c. p. 1. A side from this the Dresden manuscript is complete.

6) H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig 1900, p. 10. Al-Khowarizmi is given as the author of a work „Über die Vermehrung und die Vermindung". See also Enestrom, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, p. 184—185.

7) Libri, l. c. p. 271—273; Rosen, l. c. p. 27 and 31—33; Boncompagni, l. c., reprint p. 40.

corresponding sections from the Scheubel, the Vienna, and the Dresden[1]) manuscripts. The use of the word „rumbum“ for „square“ is striking.

Scheubel manuscript, p. 81 and 82:

Dixit Algaurizin

. . . Sex sunt modi de quibus, quantum ad numeros pertinet, sufficienter diximus. Nunc vero oportet vt quod per numeros proposuimus ex geometrica idem verum esse demonstremus. Nostra igitur prima propositio talis est.

Substantia et 10 radices 39 coequantur drachmis.

Huius probatio est, vt quadratum cuius latera (p. 82) ignorantur, proponamus . . .

Dresden manuscript, f. 341b:

Dixit Alghuarizim Sex autem sunt modi de quibus quantum ad numerum pertinet sufficienter diximus Nunc vero oportet ut quod numero proposuimus geometrice idem verum esse probemus Nostra ergo prima proposicio talis est Substantia et X radices XXX et nouem coequantur dragmatibus Huius probacio est ut Rumbum[2]) Cuius latera ignorantur proponamus

Vienna manuscript, f. 3a:

. . . Dixit Alguarizin Sex autem sunt modi de quibus quantum ad numerum pertinet sufficienter diximus Nunc vero oportet quod numero proposuimus geometrice idem verum esse probemus Nostra igitur prima propositio talis est Substantia et 4 radices 29 coequantur dragmatibus Huius probatio est vt rumbum cuius latera ignorantur proponamus . . .

Scheubel manuscript, p. 92 and 93:

. . . Nunc pario quomodo res vel radices, quando vel solae vel cum illis numeri fuerint: aut quando ex eis numeri extracti, seu cum ipsae ex numeris extractae fuerint, ad inuicem multiplicentur, vel quomodo ad inuicem iungantur, vel ex aliis diminuantur deinceps dicendum est.

In primis, ergo sciendum est, quod numerus cum numero multiplicare non possit, nisi cum numerus multiplicandus toties sumatur, quoties in numero cum quo ipsem multiplicatur, vnitas reperitur. Cum ergo nodi: seu incerta et obscura cognitio[3] : numerorum et

1) I am indebted to the Directors of the Dresden and Leipzig University Libraries for photographic reproductions of the Dresden manuscript.

2) In margin the scribe has written „rumbum“.

3) This phrase is interjected, evidently by Scheubel.

cum illis aliquot vnitates propo- (p. 93) sitae fuerint, aut si vnitates ab illis subtractae fuerint, tunc multiplicatio quater repetenda erit, hoc est nodi primo cum nodis, vnitates deinde cum nodis, et nodi cum vnitatibus, ac tandem vnitates cum vnitatibus multiplicandae erunt.

Dresden manuscript, f. 343b.

. . . Nunc ergo addendum est quomodo res: radices quando sole fuerint, uel quando cum illis numeri fuerint aut quando ex eis numeros extraxerunt, seu quando ipse ex numeris extracte fuerint ad inuicem multiplicentur, ei qualiter adinuicem iungantur et qualiter quidam ex aliis diminuantur In primis ergo sciendum est quoniam numerus in numerum multiplicari non posset nisi numerus duplicandus tociens duplicetur quociens in numero quem ipse multiplicatio vnitas reperitur Cum ergo modi numerorum et cum illis aliquot vnitates proposite fuerint aut si vnitates ab illis subtracte fuerint tunc multiplicatio quater repetenda erit id est modos[1]) in prima modis multiplica et vnitates et iterum vnitates in modis et vnitates in vnitatibus

Vienna manuscript, f. 6a:

. . . Nunc ergo dicendum est quomodo res id est radices quando sole fuerint uel quando cum illis numeri fuerint vel quando ex eis numeros extraxerint seu quando ipse ex numeris extracte fuerint adinuicem multiplicentur et qualiter adinuicem iungantur et qualiter quidam ex aliis diminuantur In primis ergo sciendum quoniam numerus in numerum multiplicari non potest nisi numerus multiplicandus tociens duplicetur quociens in numero in quam ipse multiplicatur vnitas reperitur Cum ergo nodi numerorum et cum illis aliquot vnitates proposite fuerint aut si vnitates ab illis subtracte fuerint tunc multiplicatio quater repetenda erit id est nodos in nodis multiplica et vnitates in nodis et iterum vnitates in nodis et vnitates in vnitatibus

1) „modos“ instead of „nodos“, later the scribe uses „n“.

Fourier's improvement of the Newton-Raphson method of approximation anticipated by Mourraille.[1]

By FLORIAN CAJORI in Colorado Springs.

It is well known that the NEWTON-RAPHSON method of approximation to the roots of numerical equations, as it was handed down from the seventeenth century, labored under the defect of insecurity in the process, so that the succesive corrections did not always yield results converging to the value of the root sought. The earliest removal of this defect has been attributed to FOURIER[2]), and is generally considered among the more important results reached by FOURIER on numeral equations.

It is the purpose of this note to point out that, in this improvement, FOURIER was anticipated 50 years by J. RAYM. MOURRAILLE.

Regarding the NEWTON-RAPHSON method of approximation, LAGRANGE expressed himself in his *Résolution des équations numériques*[3]) as follows: „... elle n'est pas toujours sûre; car en négligeant à chaque opération des termes dont on ne connoît pas la valeur, il est impossible de juger du degré d'exactitude de chaque nouvelle correction; et il peut arriver, dans les équations qui ont des racines presque égales, que la série soit très-peu convergente, ou qu'elle devienne même divergente après avoir été convergente." Again in Note V of the same publication (p. 140): „... il est difficile, peut-être même impossible de trouver *à priori* un

1) In another article we shall point out that what is called „NEWTON's method of approximation" in modern texts is not NEWTON's method at all, but RAPHSON's modification of it.

2) See for instance, A. LOEWY's translation of FOURIER's *Analyse des équations déterminées,* OSTWALD's Klassiker No. 127, Leipzig 1902, p. 244; G. FOURET, *Sur la méthode d'approximation de NEWTON,* Paris 1891, p. 5; A. XAVIER, *Approximations numériques,* Paris 1909, p. 132. FOURIER'R improvement of the NEWTON-RAPHSON method was given in two publications: a) *Question d'analyse algébrique;* Bulletin des sciences, par la Société Philomatique de Paris, 1818, p. 61—67; b) *Analyse des équations déterminées,* Paris 1831.

3) Paris 1798, p. 3.

caractère pour juger si la condition dont il s'agit est remplie ou non", and (p. 141) „d'où l'on peut conclure en général que l'usage de la méthode dont il s'agit n'est sûr que lorsque la valeur approchée *a* est à la fois ou plus grande ou plus petite que chacune des racines réelles de l'équation, et que chacune des parties réelles des racines imaginaires."

Mourraille, as we shall see, had removed these difficulties thirty years before Lagrange issued his book of 1798. Mourraille's researches are contained in his *Traité de la résolution des équations.*[1])

Mourraille was for 14 years, until 1782, secretary „de la classe des sciences" of the academy at Marseille. About the time of the French Revolution he became mayor of Marseille and during the political upheavals that followed he was accused of several crimes.[2])

In the preface to his *Traité* Mourraille states that he has consulted only the researches of Newton, Maclaurin and some other English writers, and the French work (the *Analyse démontrée*) of Reyneau. He was a great admirer of the Newtonian and an opponent of the Leibnizian exposition of the calculus. Of Newton's method of approximation he says, „Cette Méthode fait l'Object principal de mon Ouvrage" (Préface p. I), and he explains p. I, „Mais au-lieu que Newton déduit cette Méthode, d'un raisonnement purement analytique, je la dérive de la Propriété générale des Courbes." It is worthy of notice that both Newton and Lagrange approached the problem by purely analytical considerations, and Lagrange considered its solution difficult, if not impossible, while Mourraille and Fourier both introduced also geometrical considerations and thereby arrived at analytical criteria which are sufficient to insure security in the operation of Newton's method. Mourraille gives 66 drawings.

Mourraille explains the elements of the theory of equations, gives theorems on the limits of roots due to Rolle, gives Newton's, Maclaurin's

---

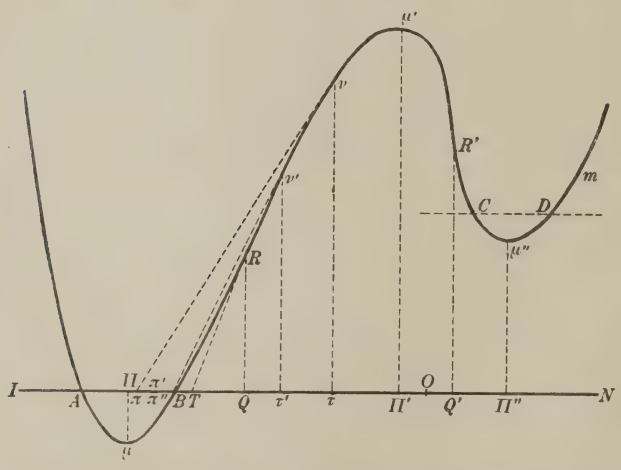
1) *Traité de la résolution des équations en général. Premiere partie. Des équations invariables.* A Marseille, A Paris, MDCCLXVIII. (The second part, *De la résolution des équations fluxionnelles,* I have not seen, but I take it to be the work published in 1781 under the title *Traité des fluxions.*) This large quarto volume of 445 pages has remained quite unnoticed by mathematicians. It is referred to by W. F. A. Murhard in his *Litteratur der math. Wiss.,* Zweiter Band, Leipzig 1798, p. 299. The only review of it that we have seen is in the Journal des Sçavans, March 1769. Mourraille is not given in Poggendorff's *Handwörterbuch,* nor have we seen mention of him in publications on the solution of numerical equations.

2) For biographical data, see *Histoire de l'académie de Marseille depuis sa fondation en 1726, jusqu'en 1826;* par J. B. Lautard, 1e partie, Marseille 1826, p. 266, 382, 389, 396, 465; 2e partie Marseille 1829, p. 49, 334. Also *Histoire de Marseille,* par Augustin Fabre, Tome second, Marseille et Paris 1829, p. 409, 496.

and CAMPBELL's tests for imaginary roots, explains how to try for linear and quadratic rational factors and commensurable roots of an equation, deduces analytical conditions for maxima and minima, for direction of curvature and for points of inflexion. The general conclusion at which he arrives is that NEWTON's method always proceeds with security, if one selects as the first approximation a value A for x, such that the curve is convex toward the axis of x for the interval between A and the root. The main difference between the old mode of procedure and his own is that the old does not specify whether the first approximation shall be taken larger than the required root or smaller, while his revision of it does so specify. MOURRAILLE considers the special case of multiple roots, and the case where a root is at a point of inflexion of the curve while the curve is at the same time concave toward the axis of x on both sides. He does not always rely upon the looks of the curve to determine the convexity; he can tell this with greater certainty by examining the fluxions, especially near a point of inflexion (p. 428).

To explain his ideas and to point out the insecurity of the old process, MOURRAILLE considers the following figure.[1])

1. Let P be a variable point on the axis of x between A and B. From P imagine the ordinate drawn to the curve, also the corresponding tangent. Designate the subtangent by Pp. MOURRAILLE says that, to his knowledge, no one before him has pointed out that the correction to the assumed approximation to the root, obtained by the NEWTON-RAPHSON method, represents geometrically the length of the subtangent to the curve. As P moves from Π to B, p moves from N toward B. If OP is taken between $O\Pi$ and $O\pi$, the subtangent is very large and NEWTON's process causes divergence from the value of the desired root OB; that is, the process fails. Suppose the part of the curve $R'\mu''m$ reached down far enough to cut the axis of x in the points C and D, near the point B, and that p corresponds



1) Fig. 54 in his book, see pages 342—345.

to a point in the arc $R'C$ which is convex to the abscissa, then the second and all subsequent subtangents yield approximations to the root OC, instead of the desired root OB. This same wrong root is approached, if p corresponds to certain points in the arc $\mu' R'$ or to certain other parts of the curve. Or we may obtain some other root OD in place of the desired root OB.

2. If $OP = O\pi$, then p falls at τ, which corresponds to ν on the concave part $R\mu'$ of the curve. On the second application of the process the point p returns to the starting point π. Thus, repeated applications cause oscillations to and fro, but no approach to the root.

3. There is a point π', such that p falls at τ', which corresponds to ν' on the curve. The second application of the process places p at B, thus yielding the desired root accurately.

4. There is a point π'', such that p falls at Q, which corresponds to the point of inflexion R, so that the second step yields the position T on the convex side of B, from which the desired root OB is safely approached.

5. The point π is therefore „la Limite entre la convergence et la divergence de la suite"; between π and B there is convergence, between π and Π there is divergence. The point π' and certain other points yield the answer accurately after a finite number of trials. This fact is of no service in finding incommensurable roots, for $O\pi'$ is then itself incommensurable; for commensurable roots simpler solutions exist. When OP lies between $O\pi$ and OB, the successive subtangents do not all have like signs and the convergence is usually not as rapid as when the start is made in the interval BQ, where the approach to the root is continuous. Hence, the advantage of starting on the convex side lies not only in perfect security, but usually also in greater speed. We may interpolate here the remark that Newton, in his only illustration of his method of approximation, takes the equation $x^3 - 2x - 5 = 0$, and letting $x = 2$, starts on the side of the curve concave toward the axis of x, corresponding to a point P in Mourraille's figure, located between π and B. The first correction of the assumed value yields $x = 2 \cdot 1$, which corresponds to a point between B and Q, on the convex side. It is to be noticed that Mourraille establishes for an interval $x = O\Pi$ and $x = OQ$ the necessary and sufficient conditions, expressed geometrically, for the success of the Newton-Raphson process of approximating to the required root OB.

6. Some writers aim at greater security in the process by retaining terms of the second degree in the calculation of the first correction to the assumed value, but Mourraille points out that in some cases better

values are obtained by using the term of the first degree without that of the second degree (p. 347).

7. In the case of equal roots the curve is convex toward the axis of x on both sides of the root-value, and one may begin with a value greater or less than the root, at pleasure.

8. If the axis of x cuts the curve at a point of inflexion, and the root is not a multiple root, then the curve may be concave toward the axis on both sides of the point. In this case find the second fluxion (or the 4th, 6th, ... if necessary). As the root is common to the given equation and the second fluxion, solve the latter (p. 336).

9. To ascertain whether certain roots are distinct roots, multiple roots or imaginaries, MOURRAILLE (p. 441) advances a new test of his own. „Si ... on prend séparément pour A les valeurs des deux abscisses, entre lesquelles se fait le changement de signe des premieres fluxions, et qu'on en tire les deux suites $A \mp S \mp S' \mp S''$, etc., et $A \pm S \pm S' \pm S''$, etc. exactes[1]) jusques à la place insensible dont j'ai parlé dans la Régle pratique de cet Article; alors si ces deux suites ont la même valeur, il seroit inutile de faire d'autres recherches, et je crois qu'on peut fort bien conclure sans erreur sensible, que ce sont deux, ou un plus grand nombre pair de Racines égales; mais si ces deux suites ont des valeurs différentes, ce seront deux Racines inégales; et enfin si ces deux suites étoient divergentes après avoir commencé d'être convergentes, on pourroit conclure qu'il y a là deux, ou un plus grand nombre pair de Racines impossibles."

The rule given in this last quotation is the same as part of „Rule B" invented later by FOURIER[2]), but FOURIER's treatment is far more precise and exhaustive.

FOURIER's rule of procedure for single roots in his improvement of the NEWTON-RAPHSON method, is as follows: If one and only one root of the equation $f(x) = 0$ lies between the real numbers a and b, then the NEWTON-RAPHSON method yields with certainty successive approximations to this root, if the first two derivatives of $f(x)$ do not vanish for values of x lying in the interval between a and b, and if, of these two limits, that one is chosen which, when substituted for x gives to $f(x)$ and $f''(x)$ the same sign.

It has been pointed out by DARBOUX[3]) and others that the condition named by FOURIER, that $f'(x)$ must not vanish in the interval, is not

1) These S's are the values of the successive subtangents in the NEWTON-RAPHSON process.

2) FOURIER, *Analyse des équations déterminées*, Paris 1831, p. 121.

3) Nouvelles annales de mathématiques 8_2, 1869, p. 17—27.

necessary. It is interesting to observe that MOURRAILLE did not impose this condition, and, therefore, deduced a simpler set of sufficient conditions than did FOURIER. MOURRAILLE nowhere epitomizes his analytical rule into a single statement, but he insists that the approximation begin on the side close to the root where the curve is convex to the axis of x. Now the test for convexity does not involve the question of the vanishing of the first fluxion. On page 440 he considers two small ordinates having the same sign and lying close to each other, between which the first fluxion vanishes. It is the case of two nearly equal roots. „Si les secondes fluxions ne changent pas de signe dans l'intervalle entre ces Racines, on sera assuré que la courbe est convexe vers l'abscisse de part et d'autre de cet intervalle, et par conséquent concave dans cet intervalle; mais si les secondes fluxions changent de signe dans cet intervalle, ce changement de signe fera connoitre les Limites entre la concavité et la convexité de la courbe . . .“ On page 428 he speaks of a positive ordinate diminishing during approach of a root from an upper limit, while the first fluxion decreases also, thus indicating convexity at that place.

Über Jacobis Auffassung des realen Integrals als einer mehrdeutigen Funktion.

Von L. Schlesinger z. Zt. in Frankfurt am Main.

In allen mir bekannten Lehrbüchern der Integralrechnung und der Funktionentheorie, älteren und neueren, findet man die folgende Auffassung vertreten: Ein Integral $\int_a^x f(x)dx$, wo a eine reale Größe, $f(x)$ eine reale Funktion der realen Variabeln x bedeutet, ist eine eindeutig definierte Funktion seiner oberen Grenze; ist $f(x)$ auch für komplexe Werte von x erklärt, also z. B. eine rationale oder algebraische Funktion, und faßt man jenes Integral als in der Ebene der komplexen Variabeln x auf irgendeinem beliebigen Wege erstreckt auf, so wird es im allgemeinen eine unendlich vieldeutige Funktion von x. Es ist nicht möglich, diese Mehrdeutigkeit des Integrals hervortreten zu lassen, so lange man x auf die realen Werte beschränkt.

Die Richtigkeit des ersten Teiles dieser Aussage steht unzweifelhaft fest. Die zweite (in dem gesperrten Satze enthaltene) Behauptung ist bisher auch niemals angefochten worden. Ich will in den folgenden Auseinandersetzungen zu zeigen versuchen, daß sie unhaltbar ist, und daß Jacobi in seinen Vorlesungen Methoden angegeben hat, die es ermöglichen, im Gebiete der realen Variabeln die Mehrdeutigkeit eines Integrals einer realen Funktion einer realen Variabeln zur Evidenz zu bringen. Diese Methoden sind in dem Teile von Jacobis Vorlesungen über elliptische Funktionen von 1835/1836 entwickelt, den Herr Gundelfinger[1]) veröffentlicht hat, sie sind aber, wie Herr Gundelfinger a. a. O. hervorhebt, auch schon von Rosenhain in seiner Preisschrift[2]) vollständig angegeben worden. Implizite enthalten sind sie jedoch, wie ich nachweisen werde, schon in den §§ 4, 5 von Jacobis Abhandlung im 13. Bande (1835) des Crelleschen Journals.[3])

1) Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, S. 211—226.

2) Siehe die deutsche Übersetzung, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften No. 65, S. 78, 79.

3) Jacobis Werke Bd. II, S. 23; datiert Februar 1834.

Ich disponiere meine Darlegung dieser Methoden folgendermaßen:

1. Zeige ich, durch welche Erscheinungen das Bedürfnis wachgerufen wurde, ein Integral einer realen Funktion als mehrdeutige Funktion der oberen Grenze charakterisieren zu können;

2. Entwickle ich die von Jacobi gegebene Methode an einigen der von Jacobi selbst behandelten Fällen von Integralen (mehrdeutiger) algebraischer Funktionen und zeige im Anschluß daran, wie dieselbe Methode auf Integrale eindeutiger Funktionen übertragen werden kann;

3. Fixiere ich die historische Stellung dieser Jacobischen Methode als Mittelglied zwischen Cauchy und Puiseux, Riemann;

4. Weise ich darauf hin, daß dieser Methode auch bei dem gegenwärtigen Stande der analytischen Erkenntnis und vielleicht noch über diesen hinaus eine prinzipielle Bedeutung beizumessen ist.

I.

Für die Umkehrungsfunktion des elliptischen Integrals erster Gattung

$$(1) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-k^2x^2}} \qquad (k \text{ real und kleiner als Eins})$$

beweisen sowohl Abel[1]) als auch Jacobi[2]) die Periodizität mit Hilfe des Additionstheorems.[3]) D. h. sie zeigen, daß die Umkehrungsfunktion $x = \lambda(u)$, die Eigenschaft hat:

$$\lambda(u) = \lambda(u + 4mK + 2m'K'\sqrt{-1})$$

wo K, K' die kompletten Integrale, m, m' ganze Zahlen bedeuten. Betrachtet man also in der Gleichung $x = \lambda(u)$ u als Funktion von x, so ist diese Funktion unendlich vieldeutig (auch wenn man nur reale Werte von u in Betracht zieht, d. h. die imaginäre Periode ganz beiseite läßt), während das Integral doch, sofern man das Vorzeichen der Quadratwurzel fixiert, eine eindeutige Funktion der oberen Grenze ist. Eine ähnliche Diskrepanz zeigt sich auch schon für das trigonometrische Integral

$$(2) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1) *Recherches sur les fonctions elliptiques* § 4; Oeuvres (éd. Sylow et Lie) I, p. 271.

2) *Fundamenta nova* § 19; Werke I, p. 85.

3) In derselben Weise verfährt auch Gauss (Werke Bd. VIII, S. 94), um zu zeigen, daß die inverse Funktion des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ die reale Periode $6\,\wp$ (siehe a. a. O.) besitzt.

Dieser Zwiespalt hat nichts Beunruhigendes, wenn man sich damit abfinden will, daß durch das Integral eben nur eine partikulare Lösung der Gleichung $x = \lambda(u)$ dargestellt wird, wie es ja auch nur eine partikulare Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-k^2x^2}}$$

liefert. Und in der Tat finden wir auch bei Jacobi nicht das Bedürfnis, diesen Zwiespalt zu beseitigen, so lange die Gleichung $x = \lambda(u)$, die u in seiner vollen Mehrdeutigkeit lieferte, eine eindeutige ist, also eine gut faßbare Form hat, wie für das Integral (1) oder (2). Eine Änderung wird erst wünschenswert, wenn es sich um ein hyperelliptisches Integral handelt

$$(3) \qquad u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)}}, \quad (1>k^2>\lambda^2>\mu^2>0)$$

dessen Umkehrungsfunktion keine „analytische" im Sinne Jacobis ist, für die also keine eindeutige Gleichung zwischen u und x existiert, aus der u in seiner vollen Mehrdeutigkeit als Funktion von x entnommen werden könnte.

II.

Jacobi beweist die Periodizität der Umkehrungsfunktion $x = \lambda(u)$ des Integrals (3) in seiner Abhandlung im 13. Bande des Crelleschen Journals auf folgende Weise.[1]) Durch eine Substitution von der Form

$$x = \frac{d + c\sin^2\varphi}{f + g\sin^2\varphi},$$

die für jedes der sechs Intervalle

$$-\infty \cdots 0,\ 0 \cdots 1,\ 1 \cdots \frac{1}{k^2},\ \frac{1}{k^2} \cdots \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{1}{\lambda^2} \cdots \frac{1}{\mu^2},\ \frac{1}{\mu^2} \cdots +\infty$$

anders einzurichten ist[2]), wird das Integral (3) in

$$C + \delta \int_0^{\varphi} \frac{(m+n\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\varphi \cdot 1-q^2\sin^2\varphi \cdot 1-r^2\sin^2\varphi}}$$

1) Abel gibt in einer nachgelassenen Arbeit (Oeuvres II, p. 40) ein anderes Verfahren an; vielleicht läßt der Schluß der Abhandlung (Oeuvres I, p. 517) die Deutung zu, daß Abel später diese Periodizität mit Hilfe seines Theorems bewiesen habe, also ähnlich, wie für die elliptische Funktion. Jedenfalls wäre diese Deutung viel naheliegender als die von Bjerknes (*Niels Henrik Abel, sa vie et son action scientifique*, Paris 1885, p. 216) vorgeschlagene.

2) Für das Intervall 0 . . 1 ist z. B. einfach $x = \sin^2\varphi$ zu setzen.

transformiert, wo p^2, q^2, r^2 real und kleiner als 1 sind, und dann das mit δ multiplizierte Integral in eine Reihe

$$\frac{2A}{\pi}\varphi + A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi + \cdots \text{ in inf.}$$

entwickelt, wo

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(m + n\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - p^2\sin^2\varphi \cdot 1 - q^2\sin^2\varphi \cdot 1 - r^2\sin^2\varphi}}$$

ist. Vermehrt man dann φ um π, so bleibt x ungeändert, während u sich um $2A\delta$ vermehrt.

In dieser trigonometrischen Substitution liegt — wie ich in der Einleitung bemerkt habe — implizite schon jene Jacobische Verallgemeinerung des realen Integralbegriffs, die in den hier in Betracht kommenden Fällen ein reales Integral als mehrdeutige Funktion der oberen Grenze erscheinen läßt. Verfolgt man nämlich die Änderung von x, die einer Vermehrung von φ um π entspricht, so sieht man, daß z. B. für das Intervall $0 < x < 1$ und für $x = \sin^2\varphi$, zunächst x bis zu dem Werte $x = 1$ hin wächst, dann von 1 bis 0 abnimmt, um dann wieder bis x zu wachsen. Wählt man etwa zu Anfang[1]) für $0 < x < 1$ die Quadratwurzel positiv, so daß also

$$\sqrt{x(1-x)} = \sin\varphi\cos\varphi, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

ist, so haben wir, wenn φ den Wert $\frac{\pi}{2}$ erreicht hat $x = 1$, $\sqrt{x(1-x)} = 0$; wächst φ dann weiter von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so ist $1 > x \geqq 0$ und $\sqrt{x(1-x)} < 0$, und wenn endlich φ von π bis $\pi + \varphi\left(< \frac{3\pi}{2}\right)$ zunimmt, so ist $\sqrt{x(1-x)}$ wieder positiv und x ist zu seinem Ausgangswerte zurückgekehrt. Wir haben also

$$\int_0^{\varphi+\pi} = \int_0^x + \int_x^1 - \int_1^0 + \int_0^x = \int_0^x + 2\int_0^1, \tag{4}$$

wo unter den Integralzeichen stets der positive Wert der Quadratwurzel zu denken ist. Hierdurch ist gezeigt, daß die Vermehrung des im gewöhnlichen Sinne — d. h. auf dem „kürzesten Wege“ von 0 bis x — genommenen Integrals (3) um den Periodizitätsmodul $2\int_0^1$ dadurch erzielt wird, daß man, statt von 0 bis x mit positivem Inkrement und positivem Vorzeichen der Quadratwurzel zu integrieren, zunächst von 0 nach 1 mit positivem Inkrement und positiver Quadratwurzel, dann von 1 bis 0 mit

1) Vgl. Jacobi, a. a. O. S. 32 unten.

negativem Inkrement und negativer Quadratwurzel, endlich von 0 bis x wieder mit positivem Inkrement und positiver Quadratwurzel integriert. Die Änderung des Vorzeichens der Quadratwurzel an den Verzweigungsstellen 1 und 0 ist dem Gesetze der Kontinuität gemäß, und insofern frei von jeder Willkür, als bei abweichender Wahl des Vorzeichens ein triviales Resultat (nämlich der ursprüngliche Integralwert oder Null) entstehen würde.[1]) Wir erhalten also auf Grund dieser Interpretation der von Jacobi im Bande 13 des Crelleschen Journals angewandten trigonometrischen Substitution die folgende Deutung für die Periodizität der Umkehrungsfunktion vom Standpunkte der Integralrechnung aus:

Man kann auf der realen Achse verbleibend von 0 nach x hin auf verschiedenen Wegen integrieren, wenn man nur das Hin- und Herintegrieren zwischen Verzweigungspunkten zuläßt, d. h. sich nicht auf positive Inkremente dx beschränkt, und erzielt damit, indem man der Quadratwurzel ihre Mehrdeutigkeit beläßt und beim Passieren der Verzweigungspunkte die Freiheit der Wahl für das Vorzeichen der Quadratwurzel unter Wahrung der Kontinuität ausnützt, ein verallgemeinertes Integral, das eine unendlich vieldeutige Funktion der oberen Grenze ist; die verschiedenen Determinationen dieser Funktion entsprechen genau der Periodizität der Umkehrungsfunktion und ihrer durch die Quadratwurzel selbst verursachten Doppelwertigkeit.

Diese Verallgemeinerung des Begriffs des Integrals zwischen realen Grenzen findet sich in der Vorlesung Jacobis von 1835/1836[2]) für die Integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-k^2x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_6)}}$$

mit vollem Bewußtsein ihrer Tragweite auseinandergesetzt und ist auch schon bei Rosenhain[3]) in der der Pariser Akademie 1846 eingereichten und 1851 publizierten Preisarbeit als von Jacobi herrührend wiedergegeben. Daß für Jacobi ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen seiner Methode von Band 13 (1834) und der von 1835/1836 bestanden hat, unterliegt

1) Will man der unter dem Integralzeichen stehenden Quadratwurzel wirklich ihre volle Mehrdeutigkeit belassen, so muß man — sowie dies nach dem Gesetze der Kontinuität möglich wird — die beiden Möglichkeiten für das Vorzeichen in Betracht ziehen. Es liegt also, da die eine — nämlich das Beibehalten des Vorzeichens, mit dem man in dem Verzweigungspunkte angekommen ist — ein triviales Ergebnis liefert, in der Ausnutzung der anderen Möglichkeit in der Tat keinerlei Willkür. Vgl. auch den „Nachtrag" am Schlusse dieses Aufsatzes.

2) Siehe Gundelfinger, Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, S. 212—225.

3) A. a. O. S. 226.

wohl keinem Zweifel[1]); es könnte vom Standpunkte des Historikers nur noch fraglich erscheinen, ob Jacobi schon, als er 1834 die trigonometrische Substitution anwandte, deren geometrische Bedeutung als ein Hin- und Herintegrieren auf der x-Achse gekannt hat, und ob er, wenn dies nicht der Fall war, ganz von selbst, oder unter irgendeinem äußeren Einfluß den Übergang von dieser Substitution zu der geometrischen Darstellung, wie wir sie in der Vorlesung von 1835/1836 finden, vollzogen hat. Wir werden, um die Indizien für diese verschiedenen Möglichkeiten gegeneinander abwägen zu können, schon hier dem Einfluß nachgehen müssen, den Cauchys *Mémoire sur les integrales définies prises entre des limites imaginaires* von 1825[2]) auf Jacobi ausgeübt hat.

Wir brauchen hier keine genaue Analyse des Cauchyschen „Mémoire" zu geben[3]), es genügt der Hinweis darauf, daß Cauchy, nachdem er das Integral einer eindeutigen Funktion $f(z)$ der komplexen Variabeln $z = x + yi$, zwischen den komplexen Grenzen $x_0 + iy_0$ und $X + iY$ entlang einer Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$ definiert hat, zeigt, wie sich jenes Integral verändert, wenn jene Kurve variiert und bei der Variation ein Unendlichkeitspunkt von $f(z)$ überschritten wird. Als Konsequenz dieses Theorems ergibt sich z. B., daß $\int_1^z \frac{dz}{z}$ eine mehrdeutige Funktion der oberen Grenze ist, wenn das Integral in der komplexen Ebene auf beliebigem Wege erstreckt wird. — Von Integralen mehrdeutiger algebraischer Funktion handelt Cauchy in dem „Mémoire" von 1825 nicht. Jacobi äußert sich an zwei Stellen der Vorlesung von 1835/1836 über dieses „Mémoire". In der Einleitung setzt er auseinander, daß er die Theorie der durch die elliptischen Integrale definierten Transzendenten auf die Transzendente

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} q^{i^2} z^i$$

gründen wolle, weil „man dadurch von ihrem Werte eine bestimmte Anschauung erhält. Dieses ist z. B. nicht der Fall, wenn man die Transzendenten als Integrale definiert, wie z. B. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, wo man zwar für das reelle φ ein Bild von der Sache hat, wo aber alle Präzision aufhört, wenn φ imaginär wird. Cauchy hat sich mit solchen Integralen sehr viel be-

1) Eine Bestätigung findet man im „Nachtrag".

2) Deutsch in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften No. 112 mit Anmerkungen von P. Stäckel.

3) Man findet eine solche z. B. bei Brill und Noether, Jahresb. d. deutschen Mathem.-Verein. 3 (1892/1893), S. 170ff.

schäftigt, aber dadurch nie die Klarheit, wie sie unsere Reihe gibt, erreicht. Wenn unter dem Integralzeichen überdies ein vieldeutiger Ausdruck oder ein Wurzelzeichen sich befindet, so läßt sich zwar für eine reelle Variable das Bild durch ein Integral leicht fassen, aber wenn sie imaginär wird, hört jede Bestimmtheit auf .... Doch liegt das Ungenaue in den Integraldefinitionen vielleicht nur darin, daß man die Prinzipien jener Integrale noch nicht genau genug erkannt hat." Die andere Stelle findet sich in der 36. Vorlesung, sie ist bereits von Herrn Gundelfinger publiziert worden, ich setze aber ihren Wortlaut der Vollständigkeit wegen hierher. Auf die Überschrift: „Von der Vieldeutigkeit der Integrale, die unter dem Integralzeichen einen mehrdeutigen Ausdruck haben" folgt die Bemerkung: „Eine Quelle der Vieldeutigkeit, die aber von der hier stattfindenden verschieden zu sein scheint, ist die, wenn die zu integrierende Funktion für irgendeinen reellen Wert oder auch einen imaginären Wert der Variabeln unendlich werden kann. Diese Ursache hat Cauchy in einer Abhandlung: Mémoire etc. Paris 1825 sehr gründlich erörtert. Aber seine Prinzipien sind nicht anwendbar auf den Fall, wo die Vieldeutigkeit eines unter dem Integralzeichen sich befindenden Ausdruckes die Vieldeutigkeit der Werte des Integrals herbeiführt." — Es folgt dann die Auseinandersetzung der oben besprochenen Methode des Hinundherintegrierens zwischen den Verzweigungspunkten.

Man wird aus diesen beiden Stellen ersehen können, daß Jacobi, während er jene Vorlesung hielt, sich mit der Integration im komplexen Gebiete genauer vertraut gemacht hat, indem er zu Anfang bei Cauchy noch die „Klarheit, wie sie unsere Reihe gibt" vermißt, während ihm in der 36. Vorlesung die Erörterung schon „sehr gründlich" erscheint. Daß er die Prinzipien Cauchys auf den ihn beschäftigenden Fall für nicht anwendbar hält, ist gewiß durchaus richtig, wenn man an eine unmittelbare Anwendung denkt, da es sich ja bei Cauchy um die Integrale eindeutiger Funktionen handelt. Wir wissen seit Riemann, daß man, um die von Cauchy für die Integrale eindeutiger Funktionen entwickelten Prinzipien auf die Integrale mehrdeutiger algebraischer Funktionen anwenden zu können, als das Gebiet der Integrationsvariabeln nicht die schlichte Ebene der komplexen Variabeln z, sondern eine Fläche wählen muß, in der die unter dem Integralzeichen stehende Funktion eine eindeutige Funktion des Ortes ist. Das wesentlich Neue bei dieser Fläche gegenüber der Cauchyschen schlichten Ebene ist, daß sie mehrfach zusammenhängend sein kann, ohne durch Ausschluß von polaren Singularitäten entstandene Löcher aufzuweisen, daß also zwei Integrationswege in der Riemannschen Fläche auch dann zu verschiedenen Integralwerten führen können, wenn keine Unendlichkeitsstelle des Integrals zwischen

ihnen liegt.[1]) In den von Jacobi behandelten Fällen liegen die Verzweigungspunkte dieser Riemannschen Fläche auf der realen Achse; denkt man sich auch die Verzweigungsschnitte in diese Achse gelegt, so erscheint uns die Jacobische Methode kurz gesagt als Integration nach den Prinzipien von Cauchy innerhalb eines die reale Achse enthaltenden unendlich schmalen Streifens der Riemannschen Fläche; Jacobi stellt also de facto die Periodizitätsmoduln seiner Integrale als Integrale erstreckt auf geschlossenen Wegen in der zugehörigen Riemannschen Fläche dar, nur erscheint bei ihm die geschlossene Integrationskurve als dicht an die reale Achse herangezogen, wie es ja übrigens Riemann selbst in diesem Falle vorschreibt, wenn er an die wirkliche Berechnung der Periodizitätsmoduln geht. Z. B. ist in Jacobis Darstellung der Periodizitätsmodul

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}},$$

nach Gleichung (4), in der Form

$$\int_0^x + \int_x^1 - \int_1^{\infty}$$

als geschlossenes Integral in der Riemannschen Fläche ausgedrückt; und ebenso ist für den arcussinus[2])

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 - \int_1^x - \int_x^0.$$

Man wird nach dieser Auseinandersetzung die Vermutung aussprechen können, daß Jacobi seine Methode der verschiedenen Integrationswege im realen Gebiete unter dem — vielleicht unbewußten — Einflusse von Cauchys „Mémoire“ erdacht, bzw. daß er unter diesem Einflusse die geometrische Deutung seiner trigonometrischen Substitution von Crelles Journal, Band 13, gefunden haben mag. Ich möchte aber ausdrücklich betonen, daß es mir natürlich fern liegt, mit dieser Auseinandersetzung eine Rekonstruktion des wirklichen Gedankenganges von Jacobi versucht

1) Vgl. den „Nachtrag“.

2) Siehe bei Gundelfinger, a. a. O. S. 214, letzte Gleichung. Man vgl. auch insbesondere S. 217, Zeile 17 ff., wo Jacobi für den Fall des elliptischen Integrals $u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-k^2y^2}}$ den Periodizitätsmodul direkt definiert als den „Wert, welchen das Integral annimmt, wenn man es von einem Werte von y, für den die Quadratwurzel verschwindet, bis zu einem anderen erstreckt, für den sie wieder verschwindet, eine beliebige gerade Anzahl Male genommen“.

zu haben; dieselbe sollte vielmehr nur dazu dienen, die Methode Jacobis in unsere heutigen funktionentheoretischen Vorstellungen einzuordnen und zu zeigen, daß Jacobi für die von ihm behandelten Beispiele im realen Gebiete direkt das geleistet hat, was wir auf Grund der Schöpfungen von Riemann sozusagen auf dem Umwege durch das komplexe Gebiet zu verstehen gewöhnt sind. Und gerade dieser direkte Weg gibt der Jacobischen Methode über das historische Interesse hinaus ihren aktuellen Wert, indem er zeigt, daß in den Fällen, wo das Integral endlich bleibt für diejenigen realen Werte von x, denen reale Werte der zu integrierenden Funktion entsprechen, der bisher allgemein für unvermeidlich angesehene Durchgang durch das komplexe Gebiet überflüssig ist.

Ich möchte hieran noch zwei Bemerkungen anknüpfen.

Die erste bezieht sich auf die Anwendung der Jacobischen Methode auf Integrale von eindeutigen, z. B. rationalen Funktionen. Für das Integral $\int_1^x \frac{dx}{x}$ kann von einer Anwendung dieser Methode nicht die Rede sein, weil ja das Integral im Punkte $x = 0$ unendlich wird, also die in dem oben gesperrten Satze enthaltene Bedingung nicht erfüllt. Dagegen ist diese Bedingung für das Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

erfüllt, und wir wollen nachweisen, wie sich an diesem Integral auf Grund der Jacobischen Methode die Mehrdeutigkeit des arcustangens in Evidenz setzen läßt, ohne das reale Gebiet zu verlassen.

Man beweist zunächst, etwa durch Anwendung der Substitution

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{5}$$

daß

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{-\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

ist. Dann setze man das auf dem direkten Wege zwischen 0 und x erstreckte Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arc\,tg}\, x),$$

wo also $(\operatorname{arc\,tg}\, x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ gelegen ist. Nunmehr integrieren wir von 0 bis x auf dem folgenden Wege: Von 0 in positiver Richtung

nach $+\infty$, dann von $-\infty$ (ebenfalls in positiver Richtung) bis x.[1]) Wir erhalten auf diese Weise in der Tat:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \pi + (\operatorname{arc\,tg} x).$$

Der Periodizitätsmodul π erscheint in der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

also ganz im Sinne der Cauchyschen Theorie als Integral erstreckt über eine geschlossene Kurve, die den Pol $x = +i$ im positiven Sinne umkreist.

Die Behandlung der Mehrdeutigkeit im realen Gebiete gibt nur noch zu einem gewichtigen Bedenken Veranlassung, und auf dieses soll sich unsere zweite Bemerkung beziehen. Da nämlich im realen Gebiete von einer analytischen Fortsetzung nicht die Rede sein kann, so schwebt der Begriff der Mehrdeutigkeit für eine Funktion einer realen Variabeln gewissermaßen in der Luft. Rosenhain sagt z. B. in seiner Preisarbeit, ehe er an die Auseinandersetzung der Jacobischen Methode herangeht[2]): „Ich nenne eine Funktion mehrdeutig, wenn deren Definition mehrere Funktionen zugleich umfaßt.“ Aber wann soll man mehrere Funktionen als Zweige einer und derselben mehrdeutigen Funktion auffassen, d. h. mit Anwendung auf unseren Fall, mit welchem Rechte betrachten wir — immer im realen Gebiete verbleibend — z. B. die unendlich vielen Funktionen

$$u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \pi - u, \quad u + 2g\pi, \quad \pi - u + 2g\pi$$

als die verschiedenen Determinationen einer und derselben mehrdeutigen Funktion?

Jacobi hat diese Schwierigkeit wohl gefühlt, und darauf bezieht sich die „wichtige Bemerkung“, mit der er seine 37. Vorlesung[3]) beginnt, damit, wie er sagt, „diese Betrachtungen nicht falsch verstanden werden“.

---

1) Für das durch die Substitution (5) transformierte Integral $u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ entspricht dem im Texte angegebenen Integrationswege genau der Integrationsweg, den Jacobi (siehe Gundelfinger, a. a. O. S. 214, letzte Gleichung) benutzt, um den Wert $\pi - \arcsin x$ zu erzielen. Ich möchte noch hervorheben, daß Jacobi selbst (a. a. O. S. 219) eine Integration „durch $\pm\infty$ gehend“ für den Fall des elliptischen Integrals ausführt.

2) Ostwalds Klassiker **65**, S. 78. 3) Bei Gundelfinger, a. a. O. S. 215.

Wir können den Inhalt dieser „wichtigen Bemerkung“ kurz dahin zusammenfassen, daß in dem Falle des arcussinus und im Falle des elliptischen Integrals, wo also die obere Grenze x sich als eindeutige Funktion $E(u)$ des Integrals u[1]) ausdrücken läßt, die durch die verschiedenen Integrationswege erzielten unendlich vielen Determinationen des Integrals alle derselben Gleichung $x = E(u)$ genügen und die Lösungen dieser Gleichung auch erschöpfen. In der Tat ist dies auch ein vollständig einwandfreier Grund dafür, diese Determinationen als Zweige einer und derselben Funktion aufzufassen, und man wird auch heute noch kaum ein anderes Kriterium dafür angeben können, daß sich im realen Gebiete verschiedene Funktionen zu einer unendlichvieldeutigen Funktion zusammenfügen als das, daß diese Funktionen sich als Lösungen einer eindeutigen Gleichung von der Form $x = E(u)$ ergeben. Und im Falle des hyperelliptischen Integrals, wo durch die Umkehrung eines Integrals ein solches Kriterium nicht zu erzielen ist, liefert gerade das Jacobische Umkehrproblem wieder die Lösung der Schwierigkeit.

III.

Wenn wir nun die Stellung fixieren wollen, die Jacobis — wie er selbst es nennt[2]) — „Erklärung der Vieldeutigkeit“ eines Integrals in der historischen Entwickelung der Funktionentheorie einnimmt, so muß zunächst hervorgehoben werden, daß in unseren bisherigen Darlegungen insbesondere auf die Bedeutung der Jacobischen Methode für die reale Funktionentheorie hingewiesen worden ist und zwar darum, weil nach dieser Seite hin die Methode auch heute noch eine wesentliche Bereicherung unserer analytischen Hilfsmittel darstellt. Jacobi hat aber selbst Wert darauf gelegt[3]), daß seine Methode nicht nur die realen sondern auch die imaginären Periodizitätsmoduln liefert, natürlich immer für die von ihm ausschließlich behandelten Fälle realer Verzweigungspunkte. Abgesehen davon, daß sich die Jacobische Methode auch auf allgemeinere Fälle leicht erweitern läßt, kann man die Stellung dieser Methode als eines Mittelgliedes zwischen Cauchy (1825) und Cauchy (1846), Puiseux (1850), Riemann (1857) wie folgt präzisieren. Während Cauchy (1825) nur den Fall einer eindeutigen Funktion unter dem Integralzeichen behandelt hat, war Jacobi der erste, der 1835/1836 die Mehrdeutigkeit der durch ein Integral eines zweideutigen algebraischen Ausdruckes definierten Funktion aus der Integraldarstellung heraus erklärt hat. Er ist sogar insofern über den Standpunkt von Cauchy (1846) und Puiseux (1850) hinausgegangen und hat sich der Auffassungsweise Riemanns (1857) genähert, als er mit

1) Jacobi sagt (a. a. O. S. 217): „auf eine allgemein gültige, unzweideutige Weise“.
2) Siehe Gundelfinger, a. a. O. S. 221; 38. Vorlesung. 3) Siehe z. B. ebenda.

seinen Integrationswegen und mit dem Wechsel des Vorzeichens der Quadratwurzel beim Passieren der Verzweigungspunkte in Wirklichkeit unmittelbar auf geschlossenen Wegen in der Riemannschen Fläche integriert hat, während die lacets und die über dieselben erstreckten Elementarintegrale Puiseux', aus denen die Periodizitätsmoduln sich zusammensetzen lassen, sich auf nicht geschlossene Wege in der Riemannschen Fläche beziehen. Die Publikation der Jacobischen Methode durch Rosenhain (1851, eingereicht 1846) sichert Jacobi wenigstens die persönliche Priorität.

IV.

Ich möchte noch mit wenigen Worten auf die prinzipielle Bedeutung der Jacobischen Methode hinweisen. Wir sehen in der modernen Mathematik auf allen Seiten das Bestreben, das Minimum der Hilfsmittel scharf zu umgrenzen, die zur Behandlung einer bestimmten Frage, zur Herleitung eines bestimmten Resultats erforderlich sind. Die neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, der Arithmetik, der Mengenlehre können als Beispiele für diese Tendenz gelten. Man wird es im Sinne dieser Auffassung als Lücke empfinden müssen, daß reale Eigenschaften realer Funktionen, wie z. B. die Mehrdeutigkeit des arcussinus und arcustangens, sich aus der Integraldefinition dieser Funktionen nur auf dem Wege des Durchgangs durch das Komplexe sollen herleiten lassen. Die Jacobische Methode füllt diese Lücke aus. Über das rein logische Bedürfnis hinaus macht sich der Wunsch, den Durchgang durch das Komplexe zu vermeiden, namentlich dann geltend, wenn es sich um Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik handelt, wo der Natur der Sache nach nur von realen Verhältnissen die Rede ist. Man übersieht sofort, daß die Jacobische Methode auch für die Behandlung von realen Mehrdeutigkeiten der realen Lösungen von Differentialgleichungen nutzbar gemacht werden kann, und ich hoffe dies demnächst an anderer Stelle für den Fall der Gaussschen Differentialgleichung des näheren auseinandersetzen zu können. Aber noch mehr! Sollte wirklich einmal eine Zeit kommen, wo man auch im Gebiete der reinen Analysis von der farbenreichen Flächenmalerei der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln zu der praeraffaëlitischen Linienführung der realen Funktionen realer Variabeln zurückkehrte, wo das stolze Gebäude der komplexen Funktionentheorie — wie ein bekannter französischer Analyst sich ausdrückt — nur noch als „monument du passé“ erscheint, so wird die Jacobische Methode eines der Malzeichen sein, die von der Integralrechnung des XIX. Jahrhunderts in jene „reale“ Zeit hinüberragen.

Nachtrag.

Als ich Gundelfinger — wenige Wochen vor seinem Hinscheiden — das Manuskript der vorstehenden Note vorlegte, lenkte er meine Aufmerksamkeit auf eine Stelle der von Borchardt herrührenden Ausarbeitung der Jacobischen Vorlesung vom W.-S. 1839/40, die auch schon in einer Fußnote des Gundelfingerschen Aufsatzes[1]) erwähnt worden ist, und aus der mit besonderer Deutlichkeit hervorgeht, daß Jacobi die Verschiedenheit der Ursachen, die die Vieldeutigkeit eines Integrals bewirken können — nämlich das Auftreten von polaren Singularitäten einerseits und von Verzweigungspunkten anderseits — klar erkannt hat. Ich lasse die betreffende Stelle, die auch die Bestätigung einiger anderen von mir in dem vorstehenden Aufsatze ausgesprochenen Annahmen liefert, nach der mir von Frau Geheimrat Gundelfinger aus dem Nachlasse ihres Gemahls gütigst zur Verfügung gestellten Abschrift jener Borchardtschen Ausarbeitung, hier folgen.

„Obgleich diese Resultate[2]) nach den bisherigen Entwicklungen durchaus keinem Zweifel unterliegen, so bleibt uns doch der wahre Grund verborgen, weshalb Integrale von der Form

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}, \qquad \int_0^y \frac{dy\sqrt{1-k^2y^2}}{\sqrt{1-y^2}}$$

überhaupt zu der Eigenschaft der Vieldeutigkeit kommen. Cauchy hat diese Frage für andere Integrale untersucht, und für dieselben gefunden, daß die Vieldeutigkeit daher kommt, daß der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck für gewisse Werte unendlich wird. — Dergleichen findet z. B. bei $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$ statt; aber in unserem Falle würde man sehr irren, wenn man hierin den Grund der Vieldeutigkeit suchen würde. Um ein schlagendes Beispiel eines Integrals zu geben, welches vieldeutig ist, ohne daß die zu integrierende Funktion für irgend einen reellen oder imaginären Wert der Variabeln unendlich wird, betrachten wir das Integral $\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx = w$. Setzt man hierin $x = \sin\varphi$, so daß $dx = \cos\varphi\,d\varphi$, so wird

1) Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, S. 212.

2) Nämlich die Herleitung der unendlich vielen Werte der durch ein elliptisches Integral erster und zweiter Gattung definierten Funktionen mit Hilfe der Theorie der Thetafunktionen. Sch.

$$w = \int_0^{\varphi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi}(1 + \cos 2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2},$$

welcher Wert unendlich vieldeutig ist. Es ist also w ein vieldeutiges Integral, dessen konstituierende Funktion nie unendlich wird.

Es fragt sich nun, worin denn der Grund der Vieldeutigkeit zu suchen sei! Man kommt zunächst darauf, daß die Irrationalität des Ausdruckes daran Schuld sei. Wir wollen diesen Gedanken weiter verfolgen. Bezeichnen wir den Ausdruck unter dem Integralzeichen durch λ, so haben wir $w = \int \lambda dx$, $\lambda^2 = 1 - x^2$, also wenn wir $1 - x^2$ mit P^2 bezeichnen, $\lambda = \pm P = \pm\sqrt{1-x^2}$. λ ist also die Wurzel einer quadratischen Gleichung, und zwar einer reinen und als solche zweideutig. Welche der beiden Bedeutungen man zu nehmen hat, darüber ist durch den Begriff des Integrals nichts festgesetzt und bleibt also ganz unserer Willkür überlassen; nur muß man der einen, bei jeder Integration unerläßlichen Bedingung genügen, daß sich λ von einem Elemente zum anderen kontinuierlich ändere. Aber gerade diese Bedingung ist es, welche ein willkürliches Springen von dem einen Werte von λ zum andern verhindert. In der Tat, da $\lambda = \pm P$ ist, so werden wir für irgendein Element der Integration die Wahl haben $+P$ oder $-P$ zu nehmen; gesetzt wir hätten z. B $+P$ genommen, so haben wir für das folgende Element nicht mehr die Wahl zwischen $+(P + dP)$ und $-(P + dP)$, sondern wir können nur das erste nehmen, weil sonst ein endlicher Sprung um $2P$ stattfinden würde. So ist man also gezwungen, an ein positives Element lauter positive anzureihen, und es scheint durchaus kein Zweifel über den Fortschritt der Integration übrig zu bleiben. Aber es gibt dennoch gewisse Elemente, wo eine Zweideutigkeit übrig bleibt, nämlich diejenigen, für welche $P = 0$ wird. Denn hier fallen beide Werte von λ zusammen, und man kann nun von dem vorher positiven $+P$ zum negativen übergehen, ohne einen Sprung zu machen. Gerade diese Elemente sind es, welche die Vieldeutigkeit des Integrals w erzeugen. Da in unserem Falle $P = \sqrt{1-x^2}$ ist, so wird für $x = +1$ und $x = -1$, $P = 0$. Nun sei a die obere, 0 die untere Grenze von w, so daß man hat

$$w = \int_0^a \lambda dx = \int_0^a \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

so kann man w geometrisch als Fläche darstellen. Es sei nämlich[1]) $LNMK$ ein Kreis vom Radius $= 1$, OM die Abszissen, ON die Ordinaten-

1) Eine Figur findet sich in der mir vorliegenden Abschrift nicht; sie kann aber nach den Angaben des Textes ohne Mühe hergestellt werden. Scr.

achse, $OG = a$, so ist, wenn man x die Werte 0 bis a durchlaufen läßt, $w =$ Fläche $ONHG = w_0$. Aber es ist auch $w = \int_0^1 \lambda dx + \int_1^a \lambda dx$, also $= ONM - GHM$, welches $= w_0$ ist. Das liefert also keinen neuen Wert. Aber man kann auch

$$w = \int_0^1 \lambda dx + \int_1^{-1} \lambda dx + \int_{-1}^a \lambda dx = ONM - MKLO - LNHGO = \pi + w_0$$

setzen; wenn man auf diese Weise fortfährt, so bekommt man die Werte

$$w = w_0, = \pi + w_0, = 2\pi + w_0, \ldots, = m\pi + w_0.$$

Bis jetzt sind wir immer, indem wir x auf irgendeinem Wege von 0 bis a kommen ließen, in der Kreisperipherie in der Richtung $NMKL$ herumgegangen. Bewegen wir uns aber im umgekehrten Sinne, so wird $w = \int_0^{-1} \lambda dx + \int_{-1}^a \lambda dx = -LON + LOGHN$ oder $= -LON + LKJGO$, also $w = w_0$ oder $= -\frac{\pi}{2} - w_0$. Indem wir zwischen die beiden Integrale $\int_0^{-1} \lambda dx$ und $\int_{-}^{a} \lambda dx$ noch beliebig oft

$$\int_{-1}^{+1} \lambda dx - \int_{+1}^{-1} \lambda dx = -\pi$$

einschalten, erhalten wir auf dieselbe Weise $w = -\frac{\pi}{2} - w_0, = -\frac{3\pi}{2} - w_0, \ldots, = -\frac{2m+1}{2}\pi - w_0$. Sonach erhalten wir für w die beiden folgenden Reihen von Integralwerten

$$w_0, \quad w_0 + \pi, \quad w_0 + 2\pi, \quad w_0 + 3\pi, \ldots, \quad w_0 + m\pi, \ldots$$

$$-\left(w_0 + \tfrac{\pi}{2}\right), \quad -\left(w_0 + \tfrac{3\pi}{2}\right), \quad -\left(w_0 + \tfrac{5\pi}{2}\right), \ldots, -\left(w_0 + \tfrac{2m+1}{2}\pi\right), \ldots.$$

was ganz mit dem analytischen Resultate $w = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi$, $\sin\varphi = x$ übereinstimmt. . . . . Ganz ähnliche Betrachtungen gelten, wenn der Ausdruck unter dem Integralzeichen nicht zweideutig, wie in diesem Falle, sondern $n$deutig ist, so daß man ihn als Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades ansehen kann. Die Vieldeutigkeit entsteht alsdann durch diejenigen Elemente, für welche zwei Wurzeln einer Gleichung einander gleich werden."

Über den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie.

Von G. Valentin in Berlin.

Als ich vor elf Jahren in dieser Zeitschrift[1]) über die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie berichtete, glaubte ich nicht, daß noch mehr wie ein Jahrzehnt vergehen würde, um mit dem Sammeln der Literatur und der Bearbeitung des gesammelten Materials zum Abschluß zu kommen. Diese Bearbeitung jedoch erforderte viel mehr Zeit, als ich vorausgesetzt hatte und für die Vervollständigung der Literatur für die Jahre 1895—1900 mußte ich von neuem Bibliotheken, Zeitschriften und Bibliographien durchsehen. Da nämlich das von der „Royal Society“ in London ins Leben gerufene internationale Unternehmen mit der Veröffentlichung der naturwissenschaftlichen und mathematischen Schriften von 1901 an begann, hielt ich es, wie ich schon in meinem damaligen Aufsatz andeutete, für geboten, die mathematische Bibliographie meinerseits bis zum Jahre 1900 fortzuführen, damit die Mathematiker durch diese Bibliographie und die internationale naturwissenschaftlich-mathematische in der Tat einen lückenlosen Überblick über die gesamte mathematische Literatur von Erfindung der Buchdruckerkunst bis zur Jetztzeit gewinnen könnten.

Über den Plan des Werkes, wie über die Art des Sammelns der Literatur habe ich mich in dem früheren Artikel so hinreichend ausgesprochen, daß ein Hinweis auf diesen hier genügt. Auf einer zweiten Reise, die mich nach Rom und Florenz, London und Paris, Brüssel und Amsterdam, Kopenhagen und Lund, schließlich nach Wien, Pest und Bukarest führte, habe ich die ausländische Literatur noch erheblich ergänzt und für diese wie für die deutsche Literatur war, wenn ich so sagen darf, eine Reise durch Berliner Spezial-Bibliotheken außerordentlich

1) *Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie;* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 237 – 245.

ertragreich. Ich nenne, um nur einige anzuführen, die Bibliotheken des Patentamtes, der Sternwarte, Militärischer Institute, ferner die der Gesellschaft für Erdkunde, der Deutschen Geologischen Gesellschaft, des Deutschen Schulmuseums, des Vereins für Versicherungswissenschaft. Trotz all dieser Bemühungen und Nachforschungen verblieb doch noch ein Rest von Zeitschriften, die ihrem Titel nach mir eine Durchsicht erwünscht erscheinen ließen oder aus denen ich mathematische Aufsätze erwähnt gefunden hatte. Diese habe ich mir dann von auswärts, aus Deutschland, der Schweiz und Österreich schicken lassen, nachdem ich mit sehr vieler Mühe erst festgestellt hatte, in welcher Bibliothek sie vorhanden waren, wobei mir oft das Auskunftsbureau Deutscher Bibliotheken wertvolle Auskunft erteilte. Aber ich möchte hier doch betonen, daß das Herausfinden der Bibliothek, in welcher sich eine bestimmte gesuchte Zeitschrift befindet, mit zu den größten und oft zeitraubendsten Schwierigkeiten gehörte, die ich bei diesen Vorarbeiten zu überwinden hatte. Das trifft ganz besonders bei polnischen und russischen Zeitschriften zu, deren Verbreitung in den großen Landesbibliotheken Mittel- und Westeuropas geradezu minimal ist. Posen, Krakau und Lemberg haben mir für die polnische Literatur notdürftig ausgeholfen; russische Zeitschriften habe ich mir oft bändeweis bald hier, bald dort zusammensuchen müssen, selbst die Bibliothek des Britischen Museums bietet auf mathematischem Gebiete nur wenig, am reichhaltigsten war noch die Ausbeute da, wo man es am wenigsten erwartet — in der Bibliothek der Accademia dei Lincei in Rom. So ist es mir gelungen, wenigstens die hauptsächlichsten wissenschaftlichen Gesellschaftsschriften in polnischer und russischer Sprache durchsehen zu können, immerhin aber bleiben in diesen Literaturen noch die größten Lücken.

Das auf diese Weise neu gesammelte Material wurde mit dem alten vereinigt, die einzelnen Zettel durchgesehen und druckfertig hergestellt. Diese Arbeit erforderte, wie schon oben gesagt, außerordentlich viel mehr Zeit, als ich gedacht hatte. Aufsätze, die in mehreren Zeitschriften erschienen waren, sei es in voller Ausdehnung oder im Auszuge, mußten auf einen Zettel vereinigt werden, Übersetzungen dem Original beigefügt werden, bei Werken, die in sehr vielen Auflagen und Übersetzungen erschienen waren, mußten die vielen Notizen, die sich vorfanden, gesichtet, geprüft und geordnet, und endlich ein neuer zusammenfassender Zettel geschrieben werden. Man denke, was das z. B. bei Lacroixs *Éléments d'algèbre* und mit dem dazu gehörigen *Complément* mit einigen 20 Auflagen und italienischen, spanischen, portugiesischen, deutschen, englischen, holländischen, russischen, polnischen und griechischen Übersetzungen für Zeit kostet oder bei den 53 mir bekannt gewordenen Ausgaben von

Adam Rieses Rechenbüchern. Doch ist dieser Teil der Arbeit jetzt auch beendigt bis auf die griechischen und römischen Schriftsteller.

Während der langen Jahre der Vorarbeiten hatte ich das gesammelte Material alphabetisch nach den Verfassernamen geordnet aufbewahrt, weil diese Anordnung für die Einordnung des neu hinzukommenden Materials und für oft notwendiges Nachschlagen am bequemsten war. Davon bin ich nur abgewichen, wenn in dem Titel selbst der Name eines anderen Mathematikers genannt wurde; dann wurde der Zettel zu diesem Namen und nicht unter den Namen des Verfassers eingeordnet, so daß unter jenem Namen gleich ein großer Teil der einschlägigen Literatur vereinigt wurde; so findet sich unter dem Namen Taylor z. B. schon der größte Teil der Schriften beisammen, die den Taylorschen Satz behandeln, unter dem Namen Thomas die, welche über die Thomassche Rechenmaschine erschienen sind. Denn von Anfang an schwebte mir als das erstrebenswerteste Ziel für die Bibliographie vor Augen, sie in systematischer Ordnung zusammenzustellen. Ich verkenne nicht, daß es in gewissen Fällen einem Benutzer des Werkes lieber sein würde, auf einen Blick zu sehen, welche Schriften ein Mann veröffentlicht hat, und für diesen Benutzer würde die alphabetische Anordnung die bequemere sein, aber in der Mehrzahl der Fälle möchte doch der wissenschaftlich Arbeitende sich lieber so schnell als möglich über die Literatur eines bestimmten Gebietes unterrichten, z. B. über die Parallelentheorie, über quadratische Formen oder über die Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung, und diese Möglichkeit bietet doch nur eine systematische Anordnung. Der erste Benutzer würde ja auch in der Mehrheit der Fälle bei den vorhandenen guten Hilfsmitteln seinen Wunsch leicht anderweitig befriedigen können: der *Catalogue of scientific papers* und Poggendorffs *Biographisch-literarisches Handwörterbuch* werden im allgemeinen genügen, wenn ich auch glaube hoffen zu dürfen, daß in meiner Bibliographie die Literatur noch weit vollständiger verzeichnet ist. Außerdem habe ich mich auch immer mit dem Gedanken getragen, den systematischen Teilen einen Indexband in alphabetischer Anordnung folgen zu lassen.

Ich bin daher seit vorigem Frühjahr damit beschäftigt, die systematische Umordnung vorzubereiten, eine Arbeit freilich, die ich auf mindestens drei Jahre einschätzen muß, handelt es sich doch um rund 150 000 Zettel. Selbst wenn ich bei 300 Arbeitstagen im Durchschnitt täglich 5 Stunden (neben einer 6—7stündigen amtlichen Tätigkeit) mich der Arbeit widmen würde, so blieben für den Zettel noch nicht 2 Minuten zur Verfügung, was selbst für einfache und klare eindeutige Titel eine äußerst geringe Zeit ist, um den Zettel aus seinem bisherigen Fach herauszunehmen und in das neue einzuordnen, und wie viel neue gibt es

in der Systematik und wie vorsichtig muß man sich vor einem Versehen und Verlegen hüten. Und dann die große Schar von Titeln, die den Inhalt der Abhandlung nicht klar und eindeutig wiedergeben oder nicht wiedergeben können, da die Schrift in mehrere Abteilungen des Systems eingeordnet werden könnte, wie z. B. manche Abhandlungen, die sich mit zahlentheoretischen Folgerungen aus den elliptischen Funktionen befassen. Die Arbeit ist also recht zeitraubend und bisweilen auch sehr schwierig; ich täusche mich auch nicht darüber, daß bei dieser Neuordnung mancher Irrtum mit unterlaufen wird, besonders nach dem Urteile jemandes, der die betreffende Abhandlung ihrem Inhalte nach genau kennt, dennoch halte ich das Ziel für ein so lohnendes, daß ich nicht vor der mühevollen Arbeit zurückschrecke.

Was nun den Umfang des Werkes betrifft, so bin ich vorläufig nicht in der Lage genaue Zahlen darüber angeben zu können. Eine Probedruckseite, die hergestellt wurde, umfaßte den Inhalt von 33 Zetteln, wie ich glaubte mittleren Inhalts. Rechnet man nun vorsichtshalber nur 30 Zettel durchschnittlich für die Seite, so würden sich 5000 Seiten oder $312^1/_2$ Bogen ergeben. Später gab ich einen ganzen meiner 65 Zettelkästen zur Auszählung und Berechnung in zwei verschiedene Druckereien. In beiden Fällen bestand der Kasten zu zwei Dritteln aus denselben Zetteln, während das letzte Drittel aus zwei verschiedenen Zettelpaketen bestand. Das Resultat war in dem einen Fall, daß rund 250 Bogen, in dem andern Fall, daß rund 280 Bogen erforderlich sein würden, also erheblich weniger, als der Probedruck ergab; immerhin aber unter sich noch eine so große Differenz, daß offenbar der 65. Teil noch nicht genügt für ein sicheres Durchschnittsmaß. Nimmt man von jenen drei berechneten Zahlen die mittlere, also 280 Bogen, so würde das 7 Bände zu 40 Bogen, resp. 6 Bände zu 46—47 Bogen ergeben, wozu dann noch ein Indexband von rund 50 Bogen käme. Dabei ist natürlich zu bemerken, daß die Bände nicht gleichmäßig stark werden würden, da man die Bände nicht nach einer vorher bestimmten Bogenanzahl abbrechen kann, sondern sich mit dem Schluß der einzelnen Bände nach dem Schluß einer größeren, allenfalls auch einer kleineren Abteilung der Systematik richten muß. Den obigen Berechnungen, um dies auch zu erwähnen, ist ein Format in Großoktav, die Seite doppelspaltig, zugrunde gelegt.

Über die Systematik mich hier zu äußern, muß ich mir versagen; im großen und ganzen ist sie ja jetzt auch eine feststehende, wie sie z. B. von der „Commission permanente du répertoire“ für ihr *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* und von Herrn Wölffing für seinen *Mathematischen Bücherschatz* aufgestellt ist. Diese denke ich meiner Systematik im allgemeinen zugrunde zu legen, vorbehaltlich durch das

reichhaltigere Material bedingter spezielleren Gliederungen und einiger Änderungen und Umordnungen. Die Verteilung des Stoffes auf 6 Bände denke ich mir so, daß der erste das Allgemeine, der zweite die niedere Arithmetik und Algebra, der dritte die höhere Algebra und Analysis, der vierte die Geometrie und Geodäsie, der fünfte die Mechanik und Ballistik, endlich der sechste die Astronomie, Physik, Chemie usw. enthalten soll. Ob diese Verteilung genau so wird innegehalten werden können, hängt natürlich von der Fülle des Stoffes in den einzelnen Abteilungen ab, wie ich oben schon andeutete.

Um den Begriff „Allgemeines", den ich für den ersten Band soeben der Kürze wegen gewählt habe, klarzustellen, möchte ich hier aber doch die einzelnen Abteilungen dieses Bandes aufzählen: 1. Zeitschriften mit den angewandten Abkürzungen ihrer Titel und dem alphabetisch geordneten Schlüssel derselben; 2. Bibliographien (nur die allgemeinen, die speziellen dagegen bei den betreffenden Unterabteilungen, z. B. Literatur der Geodäsie bei Geodäsie); 3. Geschichte der Mathematik (hier auch nur die allgemeine, die einzelner Gebiete oder Probleme bei diesen); 4. Biographien; 5. Porträts; 6. Philosophie der Mathematik; 7. Terminologie; 8. Gesammelte Werke und Beiträge; 9. Alte Schriftsteller: Griechen, Römer, Orientalen; 10. Einleitung (Lob, Nutzen der Mathematik, Beziehung zu anderen Wissenschaften u. dgl.); 11. Studium, Pädagogik, Unterricht; 12. Lexika; 13. Enzyklopädische Lehrbücher.

Im vorstehenden habe ich ein Bild von dem gegenwärtigen Stande des Unternehmens und der noch zu leistenden Arbeit zu geben versucht, auch kurz angedeutet, wie sich das Werk im fertigen Zustande nach meinen Plänen darstellen würde. Wann die mühenreiche Arbeit von 30 Jahren, eines vollen Menschenalters, den Mathematikern durch den Druck zugänglich gemacht werden wird, beruht auf Umständen, die von meinem Willen unabhängig sind.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1³:12, 15, 22, siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 61. — **1³:33,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 307. — **1³:51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 61—64. — **1³:163—165,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1³:166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 64—65. — **1³:198, 201,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 237. — **1³:202,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 307—309. — **1³:203,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 65, 309. — **1³:206,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 237—238. — **1³:213, 225, 236,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 65. — **1³:244,** siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 341. — **1³:245,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 65. — **1³:252,** siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 164. — **1³:257,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 139. — **1³:270, 287, 297,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 66. — **1³:298,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 66; **10₃**, 1909/10, S. 53—54. — **1³:310,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 66. — **1³:335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 174—176. — **1³:351,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 66. — **1³:365, 368,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 177. — **1³:372,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 411—412; **9₃**, 1908/9, S. 238. — **1³:374, 376,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 412—413. — **1³:380,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 66—67. — **1³:383—384,** siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 164—165. — **1³:388,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 177. — **1³:394,** siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 165. — **1³:401—402,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 239. — **1³:406, 409,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 177—178. — **1³:409,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 239. — **1³:410,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 178. — **1³:429,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 67. — **1³:431,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 67; **9₃**, 1908/9, S. 139—140. — **1³:432,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1³:433,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 179. — **1³:447, 448,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 239—240. — **1³:452,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 179. — **1³:459,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 309—310. — **1³:464,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 179. — **1³:470,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 311. — **1³:471,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 413. — **1³:476,** siehe BM **9₃**, 1908, S. 71—72. — **1³:488,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 67. — **1³:498,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 180. — **1³:500,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 67; **9₃**, 1908/9, S. 321—322. — **1³:502,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 67. — **1³:503—504,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 180—181; **9₃**, 1908/9, S. 240—241. — **1³:509, 510,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 67. — **1³:512,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 140—141. — **1³:513, 515, 528, 545,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 68—69. — **1³:551,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 141—142. — **1³:556,** siehe BM **10₃**, 1909/10, S. 54. — **1³:563—564,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 69. — **1³:567,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 241. — **1³:576,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 69—70, 181; **9₃**, 1908/9, S. 142. — **1³:580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 70. — **1³:706,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 70, 181. — **1³:710,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 241. — **1³:713,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 70. — **1³:715,** siehe BM **9₃**, 1908/9, S. 241. — **1³:715—716,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1³:717,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1³:718,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 71; **9₃**, 1908/9, S. 242. — **1³:719,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 183—184. — **1³:720,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 71. — **1³:730,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1³:734,** siehe BM **8₃**, 1907/8, S. 71. —

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

1³ : 736, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1³ : 736—737,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1³ : 738,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1³ : 742,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1³ : 743, 748, 750,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1³ : 763,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1³ : 764,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185. — **1³ : 766,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143. — **1³ : 770,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185. — **1³ : 771,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S 143. — **1³ : 779,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1³ : 780, 781,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1³ : 792,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143—144. — **1³ : 794,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1³ : 795,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1³ : 798,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 144. — **1³ : 800,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73; **9**$_3$, 1908/9, S. 144—145. — **1³ : 801,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185—186; **9**$_3$, 1908/9, S. 145. — **1³ : 802,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1³ : 805—806,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73. — **1³ : 809—810,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1³ : 815,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73. — **1³ : 838,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 415. — **1³ : 842,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1³ : 854,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 55. — **1³ : 855,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73. — **1³ : 857,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73; **9**$_3$, 1908/9, S. 243—244. — **1³ : 859, 862, 863,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1³ : 867,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1³ : 869, 875—876, 877, 878,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74—76. — **1³ : 881,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 415—416. — **1³ : 882, 889, 893,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 77—78. — **1³ : 900,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1³ : 901,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 145—146; **10**$_3$, 1909/10, S. 261. — **1³ : 902,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78—79. — **1³ : 906,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 188—189; **9**$_3$, 1908/9, S. 244. — **1³ : 908,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79; **9**$_3$, 1908/9, S. 146—147. — **1³ : 909,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79. — **1³ : 910,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 416. — **1³ : 911,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79—80.

---

2 : 5, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286; **8**$_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2 : 9,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 147. — **2 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **9**$_3$, 1908/9, S. 147—148. — **2 : 11,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 14—15,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 17,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 20,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **3**$_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274; **9**$_3$, 1908/9, S. 148. — **2 : 26,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 244—245. — **2 : 30,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105; **10**$_3$, 1909/10, S. 166—167. — **2 : 31,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351—352; **3**$_3$, 1902, S. 239—240; **6**$_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **6**$_3$, 1905, S. 310; **8**$_3$, 1907/8, S. 190. — **2 : 37,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **9**$_3$, 1908/9, S. 148. — **2 : 39,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 209; **9**$_3$, 1908/9, S. 245. — **2 : 41,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **8**$_3$, 1907/8, S. 80—81; **9**$_3$, 1908/9, S. 72—73. — **2 : 45,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 148—150. — **2 : 46,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 51,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 106; **9**$_3$, 1908/9, S. 150. — **2 : 52,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 190—191. — **2 : 53,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208; **10**$_3$, 1909/10, S. 262. — **2 : 59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; **9**$_3$, 1908/9, S. 150. — **2 : 63,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2 : 65,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 151. — **2 : 67,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 77,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 152. — **2 : 82,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 87,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **9**$_3$, 1908/9, S. 323. — **2 : 88,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S. 395. — **2 : 89,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **9**$_3$, 1908/9, S. 245—246. — **2 : 90,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2 : 91—92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396; **8**$_3$, 1907/8, S. 191; **9**$_3$, 1908/9, S. 152. — **2 : 94, 96,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 167—168. — **2 : 97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107; **7**$_3$, 1906/7, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **8**$_3$, 1907/8, S. 81; **9**$_3$, 1908/9, S. 73—74. — **2 : 101,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325; **6**$_3$, 1905, S. 396; **9**$_3$, 1908/9, S. 152—153. — **2 : 103,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 262—263. — **2 : 104,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 168—169; **11**$_3$, 1910/11, S. 81 — **2 : 104—105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398; **9**$_3$, 1908/9, S. 153. — **2 : 106,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 380. — **2 : 111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 112,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 56. — **2 : 112—113,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 56—57. — **2 : 114,**

siehe BM 9_3, 1908/9, S. 153; 10_3, 1909/10, S. 57. — **2 : 116,** siehe BM 3_3, 1902, S. 406; 9_3, 1908/9, S. 153—154. — **2 : 117—118,** siehe BM 6_3, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM 1_3, 1900, S. 503—504; 6_3, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM 3_3, 1902, S. 406; 6_3, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM 3_3, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM 1_3, 1900, S. 504; 8_3, 1907/8, S. 191—192. — **2 : 129,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 287. — **2 : 132,** siehe BM 1_3, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2 : 144,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 381. — **2 : 145,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 287. — **2 : 148,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 381—382. — **2 : 150—151,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 288. — **2 : 155,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 323—325. — **2 : 155—156,** siehe BM 5_3, 1904, S. 410—411; 7_3, 1906/7, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM 2_3, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM 6_3, 1905, S. 311—312; 7_3, 1906/7, S. 87—88; 9_3, 1908/9, S. 154. — **2 : 163,** siehe BM 1_3, 1900, S. 504; 6_3, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM 6_3, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 382; 9_3, 1908/9, S. 246—247. — **2 : 166,** siehe BM 1_3, 1900, S. 504. — **2 : 171,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 58. — **2 : 175,** siehe BM 3_3, 1902, S. 140. — **2 : 178—179,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 192—193; 10_3, 1909/10, S. 58. — **2 : 206,** siehe BM 6_3, 1905, S. 313. — **2 : 208,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 247. — **2 : 210,** siehe BM 2_3, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM 4_3, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM 6_3, 1905, S. 397—398. — **2 : 224—226,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 155. — **2 : 228,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 193. — **2 : 229,** siehe BM 1_3, 1900, S. 504—505; 8_3, 1907/8, S. 194; 10_3, 1909/10, S. 263. — **2 : 230,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 195—196; 9_3, 1908/9, S. 155—157. — **2 : 232, 234, 237,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 196—198. — **2 : 238,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 198; 10_3, 1909/10, S. 59, 169. — **2 : 240,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 198—199; 10_3, 1909/10, S. 59. — **2 : 242,** siehe BM 1_3, 1900, S. 505; 8_3, 1907/8, S. 199—200. — **2 : 243,** siehe BM 1_3, 1900, S. 505; 6_3, 1905, S. 398; 7_3, 1906/7, S. 382; 8_3, 1907/8, S. 200. — **2 : 245,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 383. — **2 : 246,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 283; 8_3, 1907/8. S. 200. — **2 : 247,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 383—384; 9_3, 1908/9, S. 247. — **2 : 249,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 200—201. — **2 : 250,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 82. — **2 : 253,** siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2 : 272,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 247. — **2 : 273,** siehe BM 1_3, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM 3_3, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM 5_3, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM 1_3, 1900, S. 506; 2_3, 1901, S. 353—354. — **2 : 284,** siehe BM 1_3, 1900, S. 506; 9_3, 1908/9, S. 157—158.

---

2 : 284. Im dritten Briefe des Regiomontanus an Bianchini kommt eine Stelle vor, die für die Geschichte der algebraischen Terminologie von Interesse ist. Regiomontanus gibt nämlich an (Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **12**, 1902, S. 257), daß damals in Deutschland die sechs ersten Potenzen der Unbekannten die folgenden Benennungen hatten:

res, census, cubus, census de censu, cubus de censu, cubus cubi.

Die Terminologie stimmt also mit der des Leonardo Pisano überein (vgl. BM 6_3, 1905, S. 310), während bekanntlich Paciuolo ein anderes terminologisches Prinzip benutzte.

G. Enestrom.

---

2 : 286, 287, 289, 290, 291, siehe BM 1_3, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM 2_3, 1901, S. 354. — **2 : 304,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 201. — **2 : 305,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 88. — **2 : 306, 308,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 248. — **2 : 313,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2 : 314,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317,** siehe BM 5_3, 1904, S. 69; 7_3, 1906/7, S. 384. — **2 : 318,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 158. — **2 : 319,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 201—202. — **2 : 320,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 88—89; 9_3, 1908/9, S. 248. — **2 : 322,** siehe BM 6_3, 1905, S. 399; 8_3, 1907/8, S. 202—203. — **2 : 325,** siehe BM 6_3, 1905, S. 313—314. — **2 : 327,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 248—249. — **2 : 328,** siehe BM 3_3, 1902, S. 140; 4_3, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2 : 339,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 82. — **2 : 341, 343,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 170. — **2 : 351,** siehe BM 6_3, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507; 4_3, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM 6_3, 1905, S. 399—400. — **2 : 358,** siehe BM 4_3, 1903, S. 87; 8_3, 1907/8, S. 203. —

2 : 360, siehe BM 4_3, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM 6_3, 1905, S. 314. — **2 : 375,** siehe BM 9_3, 1908, S. 75. — **2 : 379,** siehe BM 6_3, 1905, S. 400; 7_3, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM 6_3, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2 : 382,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 60. — **2 : 385,** siehe BM 3_3, 1902, S. 81; 4_3, 1903, S. 207; 7_3, 1906/7, S. 289; 10_3, 1909/10, S. 170. — **2 : 386,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507; 5_3, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 289. — **2 : 392,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 82; 10_3, 1909/10, S. 171. — **2 : 395,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507—508. — **2 : 396,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 82. — **2 : 397,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 211. — **2 : 398,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 204; 9_3, 1908/9, S. 158—160. — **2 : 399,** siehe BM 6_3, 1905, S. 107—108; 8_3, 1907/8, S. 204—205; 10_3, 1909/10, S. 344—345. — **2 : 401, 405,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 89. — **2 : 413,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 205. — **2 : 419,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 205—206; 9_3, 1908/9, S. 249—250. — **2 : 420,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 83, 206; 10_3, 1909/10, S. 345. — **2 : 421, 422,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 206. — **2 : 423,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 345. — **2 : 425,** siehe BM 1_3, 1900, S. 507 — **2 : 426,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 207; 10_3, 1909/10, S. 60—61. — **2 : 427,** siehe BM 6_3, 1905, S. 314—315; 8_3, 1907/8, S 207. — **2 : 428,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 208; 9_3, 1908/9, S. 160. — **2 : 429,** siehe BM 5_3, 1904, S. 201—202; 8_3, 1907/8, S. 208—209. — **2 : 430,** siehe BM 2_3, 1901, S. 145. — **2 : 434,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 160—161. — **2 : 437—438,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 209—210. — **2 : 440,** siehe BM 4_3, 1903, S. 285. — **2 : 441,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 161. — **2 : 442,** siehe BM 3_3, 1902, S. 325. — **2 : 444,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 210. — **2 : 446,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 250. — **2 : 449,** siehe BM 3_3, 1902, S. 140; 10_3, 1909/10, S 171. — **2 : 452,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 210. — **2 : 454,** siehe BM 3_3, 1902, S. 242. — **2 : 457,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 250—251. — **2 : 471,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 161. — **2 : 474,** siehe BM 3_3, 1902, S. 140—141; 9_3, 1908/9, S. 161. 251. — **2 : 476.** siehe BM 9_3, 1908, S. 75. — **2 : 479—480,** siehe BM 3_3, 1902, S. 141; 7_3, 1906/7, S. 290 291, 385; 9_3, 1908, S. 75, 251. — **2 : 481,** siehe BM 1_3, 1900, S. 508; 8_3, 1907/8, S. 83. — **2 : 482,** siehe BM 1_3, 1900, S. 508; 2_3, 1901, S. 354; 3_3, 1902, S 240; 6_3, 1905, S. 401; 11_3, 1910/11, S. 81. — **2 : 483,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 291. — **2 : 484,** siehe BM 3_3, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489,** siehe BM 1_3, 1900, S. 509. — **2 : 490,** siehe BM 1_3, 1900, S. 509; 7_3, 1906/7, S. 385—386.

---

2 : 490. Die Angabe (Z. 5—6): „Erstens behauptet Tartaglia, $ax^2 = b + x^3$ besitze zwei oder vielleicht noch mehrere Auflösungen" ist nicht unrichtig, aber wertlos, weil sie keine wirkliche Auskunft über die Bedeutung der Behauptung Tartaglias bringt. Die von Herrn Cantor zitierte Seite enthält den Passus: „tutti tai capitoli riceueno due diuerse risposte, et forsi piu", und da die von Tartaglia am Anfange der Seite behandelte Gleichung von der Form $ax^2 = b + x^3$ war, hat Herr Cantor offenbar den Ausdruck „tutti tai capitoli" auf Gleichungen dieser Form bezogen. Aber wenn man die folgenden Ausführungen Tartaglias liest, so findet man, daß er als Beleg für seine Behauptung die Gleichung $x^3 + 3x = 14$ anführt; Tartaglia bemerkt, daß diese Gleichung offenbar die Wurzel $x = 2$ besitze, und daß anderseits die von ihm erfundene allgemeine Regel als Resultat $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{41}} - \sqrt[3]{7 - \sqrt{41}}$ gebe. Nun ist ja die letzte Behauptung falsch, denn die richtige Lösung ist $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$, und da $\sqrt[3]{7 \pm \sqrt{50}} = \pm\sqrt{2} + 1$, so wird die Wurzel der Gleichung $x^3 + 3x = 14$ in beiden Fällen 2. Tartaglia hat also nur nachgewiesen, daß man die Wurzel einer Gleichung dritten Grades auf zwei verschiedene Weisen darstellen kann, wenn diese Wurzel rational ist. Darum sagt er auch (S. 282 der Ausgabe 1606): „queste due uarie risposte se ritrouerà . . . doue accaschi la cosa esser rationale". Darum würde ein sach-

kundiger Verfasser die Angabe sicherlich nicht wie Herr Cantor formuliert haben, sondern etwa auf folgende Weise: „Erstens weist Tartaglia nach, daß eine Gleichung dritten Grades mit rationaler Wurzel zwei Auflösungen besitzt, deren Identität er auf Grund eines Rechenfehlers nicht entdecken konnte".

G. Eneström.

---

2 : 493, 494, siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 345—346. — **2 : 497,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 291, 386; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 81—82. — **2 : 503, 505,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292. — **2 : 506, 507,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 162—163. — **2 : 508,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 264—265.

---

2 : 508. Herr Cantor berichtet hier über die zweite Regel des 37. Kapitels der *Ars magna* und kennzeichnet diese auf folgende Weise: „Bahnbrechend für alle Zukunft wurde Cardanos Kühnheit, mit Quadratwurzeln aus Negativem zu rechnen". Für meinen Teil würde ich lieber mit Hankel von einem kleinen Schritt sprechen oder mit Tropfke „anregend" statt „bahnbrechend für alle Zukunft" setzen. Allein wenn man das Wort „bahnbrechend" benutzen will, sollte man meines Erachtens ausdrücklich hervorheben, daß Cardano selbst gar keinen Wert auf dieses Rechnen mit Quadratwurzeln aus Negativem gelegt hat. Sonst hätte er natürlich solche Quadratwurzeln benutzt, um die Lösung des „Casus irreducibilis" algebraisch anzugeben (siehe unten die Bemerkung zu **2** : 537).

Auch die dritte Regel des 37. Kapitels könnte vielleicht verdienen, in einer Geschichte der Mathematik erwähnt zu werden, freilich nicht weil sie bahnbrechend genannt werden kann, sondern weil sie für die Nachlässigkeit Cardanos kennzeichnend ist.

Das Kapitel („De regula falsum ponendi"; Ausgabe Basel 1570, S. 129—132) beginnt mit den Worten: „Haec regula triplex est, aut enim ponit *m*: aut quaerit *Rm*: aut quaerit quod non est", und die zwei ersten Regeln beziehen sich auf Gleichungen, deren Wurzeln negativ oder imaginär sind. In betreff der dritten Regel bemerkt Cardano: „Possumus veró uenari genus *m*: aliud, quod neque est purum *m*: neque *Rm*: sed res omnino falsa, & componitur haec regula quasi ex ambobus", und um diese dunkle Bemerkung zu erklären, gibt Cardano folgendes Beispiel: „Drei Zahlen in geometrischer Progression zu finden, von denen die erste minus ihrer Quadratwurzel gleich der zweiten, und die zweite minus ihrer Quadratwurzel gleich der dritten ist". Setzt man die erste Zahl gleich x^2, so sind die drei Zahlen offenbar x^2, $x^2 - x$, $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x}$, und da sie eine geometrische Progression bilden, wird $x^2 (x^2 - x - \sqrt{x^2 - x}) = (x^2 - x)^2$. Diese Gleichung wird natürlich durch $x = 0$ befriedigt, so daß 0, 0, 0 eine Lösung der Frage ist. Dividiert man ferner die Gleichung mit x^2, erhält man $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x} = (x - 1)^2$ oder $x^2 - x - (x - 1)^2 = \sqrt{x^2 - x}$, also $x - 1 = \sqrt{x^2 - x}$, und dieser Gleichung genügt ein einziger endlicher Wert von x, nämlich 1, so daß 1, 0, 0 eine andere Lösung der Frage ist. Nun könnte man ja vom Standpunkte Cardanos aus sagen, daß die beiden Lösungen falsch sind, weil Null keine Zahl ist, und dadurch ist der Ausdruck: „quaerit quod non est" befriedigend erklärt; anderseits versteht man nicht die Worte: „componitur haec regula quasi ex ambobus", und diese Worte deuten auf eine ganz andere Erklärung hin.

Nachdem Cardano die Gleichung, die in modernen Zeichen $x^2(x^2 - x - \sqrt{x^2 - x}) = (x^2 - x)^2$ lautet, hergeleitet hat, fährt er nämlich fort:

habebis quantitates ipsas operando ut uides, $\frac{1}{4} \mid m:\frac{1}{4} \mid m:\frac{1}{4}\, m : Rm:\frac{1}{4}$ & productum primi in tertium, est $m:\frac{1}{16}\, p : R\frac{1}{64}$, quod est $\frac{1}{8}\, m:\frac{1}{16}$ & tantum fit ducto secundo numero in se.

Nach Cardano sind also die drei Zahlen

$$\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{4} - \sqrt{-\tfrac{1}{4}},$$

und er behauptet überdies, daß

$$\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4} - \sqrt{-\tfrac{1}{4}}\right) = -\tfrac{1}{16} + \sqrt{\tfrac{1}{64}}.$$

Aber in Wirklichkeit ist ja

$$\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4} - \sqrt{-\tfrac{1}{4}}\right) = -\tfrac{1}{16} - \sqrt{-\tfrac{1}{64}},$$

und dieser imaginäre Ausdruck kann natürlich nicht $(-\frac{1}{4})^2$ sein, so daß die Lösung Cardanos falsch ist.

Nimmt man also an, daß Cardano seine dritte Regel nicht auf das richtige, sondern auf das falsche Resultat seiner Frage bezogen hat, so versteht man die Worte „componitur haec regula quasi ex ambobus", denn nach der Lösung Cardanos ist ja die dritte der gesuchten Zahlen die algebraische Summe einer negativen und einer imaginären Größe. G. Enestrøm.

---

2 : 509, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

---

2 : 515. Herr Cantor bemerkt (Z. 18—21): „Den sonstigen mathematischen Inhalt [der *Quesiti et inventioni diverse*] bildet ausschließlich die Geschichte der Entdeckung der Auflösung kubischer Gleichungen. Sie ist ... bereits ausführlich ... erzählt worden". Hier wäre es angebracht, „vorzugsweise" statt „ausschließlich" zu setzen, denn tatsächlich kommen in der Arbeit Tartaglias rein mathematische Stellen vor, die sich nicht direkt auf die Auflösung kubischer Gleichungen beziehen, und die Herr Cantor vermutlich aus diesem Grunde in seinem Berichte übergangen hat. Beispielsweise wird in den *Vorlesungen* nicht erwähnt, daß Tartaglia in seinem Kommentar zum 40. Quesito, also sieben Jahre vor Stifel, ein Verfahren veröffentlicht hat, um Kubikwurzeln aus Binomien auszuziehen. In seinem Brief vom 5 Januar 1540 hatte Cardano mitgeteilt, Giovanni da Coi besitze eine Methode für diesen Zweck, und diese Mitteilung veranlaßte Tartaglia sich mit der Frage zu beschäftigen. Das Verfahren (Ausgabe Venedig 1606 S. 276—277) lautet in moderner mathematischer Sprache: Sei $\pm a + \sqrt{b}$ das gegebene Binomium, und sei angenommen, daß $\sqrt[3]{\pm a + \sqrt{b}}$ auf die Form $\pm \alpha + \sqrt{\beta}$ gebracht werden könne, so wird

$$\pm a + \sqrt{b} = \pm(\alpha^3 + 3\alpha\beta) + (3\alpha^2 + \beta)\sqrt{\beta},$$

folglich ist $a = \alpha^3 + 3\alpha\beta$. Man muß also a in zwei Teile zerlegen, von denen der erste ein Kubus, der zweite ein Multiplum von 3 ist. Seien diese zwei Teile A^3 und $3B$, so ist offenbar $\alpha = A$, $\beta = \frac{B}{\alpha} = \frac{B}{A}$, also $\sqrt[3]{\pm a + \sqrt{b}} = \pm A + \sqrt{\frac{B}{A}}$, wenn das Problem durch ganze Zahlen lösbar ist.

Als Beispiel wählt Tartaglia $\sqrt[3]{\pm 10 + \sqrt{108}}$, und in diesem Falle findet man, daß $A = 1$, $B = 3$, also

$$\sqrt[3]{\pm 10 + \sqrt{108}} = \pm 1 + \sqrt{3}.$$

Vom methodischen Gesichtspunkte aus ist das Verfahren nicht besonders wertvoll, aber sobald a eine kleine Zahl ist, führt es schnell zum Ziele. Jedenfalls ist es das erste veröffentlichte Verfahren, Kubikwurzeln aus Binomien auszuziehen, und verdient wenigstens aus diesem Grunde erwähnt zu werden.

Ob Tartaglia, wie Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 373) annimmt, das Verfahren schon 1540 erfand, muß dahingestellt bleiben. G. Enestrom.

---

2 : 516, 517, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 524,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 90; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 171—172. — **2 : 525,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 172. — **2 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 529,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91. — **2 : 530,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 531,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212. — **2 : 532,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 163—164.

---

2 : 533. Die Angabe (Z. 25—27): „Die Sätze 159, 160, 161 [des *Opus novum de proportionibus*] stehen in innigem Zusammenhange und handeln von den Winkeln, welche Kreisbögen mit geraden Linien bilden" ist kaum mehr als zur Hälfte richtig. Der Satz 160 (Ausgabe 1570, S. 162) lautet: „Proposita linea tribusque in ea signis punctum inuenire, ex quo ductae tres lineae ad signa sint in proportionibus datis", d. h.: „Eine Gerade und drei Punkte A, B, C derselben sind gegeben; es wird verlangt, außerhalb der Geraden einen Punkt G zu bestimmen, so daß die drei Geraden AG, BG, CG in gegebenem Verhältnis zueinander sind". Weder das Problem noch die Behandlung desselben hat das geringste mit dem Satz 159 zu tun. Dasselbe könnte man von dem eigentlichen Satz 161 sagen, denn dieser Satz handelt von zwei geradlinigen Dreiecken, aber unmittelbar nachher folgt ein „Lemma", worin Cardano auf den Gegenstand des Satzes 159 zurückkommt, und dieses „Lemma" beginnt mit den Worten: „His demonstratis". Allerdings sieht man leicht, daß der Satz 161 nur scheinbar im Zusammenhange mit der Frage des Kontingenzwinkels steht, weil Cardano diesen Satz, der offenbar nur für geradlinige Dreiecke gilt, ohne weiteres auf krummlinige Dreiecke anwendet. Jedenfalls wäre es angebracht, die oben zitierte Angabe etwa auf folgende Weise zu modifizieren: „Der ganze Satz 159 und das „Lemma" des Satzes 161 gehören zusammen und handeln von den Winkeln, welche Kreisbögen mit geraden Linien oder mit anderen Kreisbögen bilden". G. Enestrom.

---

2 : 535, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 536,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387.

---

2 : 537. Es ist richtig, daß die von Herrn Cantor Z. 6—12 angegebenen Umstände das Verständnis der Schrift Cardanos *De regula Aliza* erheblich erschweren. Aber es gibt noch einen Umstand, der das Studium der Schrift besonders schwierig macht, nämlich das Vorkommen von groben Fehlern und

sinnlosen Ausführungen (vgl. die Bemerkung Cossalis S. 442 des 2. Bandes der Arbeit *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra,* Parma 1799), wodurch der Leser nicht selten unsicher wird, wie gewisse Behauptungen Cardanos verstanden werden sollen. Ich werde diese Schwierigkeit an einem Beispiel erörtern.

Am Ende des 22. Kapitels (S. 46 der Originalausgabe) sucht Cardano zu beweisen, daß $\frac{a}{-b}$ keine Größe sein kann, und für diesen Zweck bringt er erst einen vermeintlichen Beweis des Satzes, daß Minus mal Minus immer Minus macht. Er geht dabei von der Identität $(a-b)^2 = a^2 - 2(a-b)b - b^2$ aus, und folgert daraus unmittelbar, daß das letzte Glied der rechten Seite durch Multiplikation von $-b$ mit $-b$ entstanden ist; in Wirklichkeit setzt dies ja voraus, daß das zweite Glied der rechten Seite nicht $-2(a-b)b$ sondern $-2ab$ ist! Auf ganz dieselbe Weise setzt er

$$(a-b)(c-d) = ac - (a-b)d - b(c-d) - bd$$

und folgert daraus, daß $(-b)(-d) = -bd$! Dann sucht er auf andere Weise die Richtigkeit seines Satzes zu belegen; ob aber seine Ausführungen wirklich einen Sinn haben, bin ich nicht imstande ausfindig zu machen.

Ferner gibt Cardano auch einen Beweis des Satzes: „Plus mal Minus macht Minus", den ich hier wörtlich zum Abdruck bringe: „Nihil potest ultra uires suas, ergo p: potest quantum est ipsum, igitur cum ducitur extra ipsum, producit m: aliter posset plus producere quam potestate esset."

Nachdem Cardano also seiner eigenen Ansicht nach die Sätze $(-a)(-b) = -ab$, $(+a)(-b) = -ab$ bewiesen hat, ist es ihm leicht zu zeigen, daß $\frac{a}{-b}$ weder positiv noch negativ sein kann, also überhaupt keine Größe darstellt („diviso p: per m: nihil exit"), denn in keinem Falle kann die Multiplikation des Quotienten mit der negativen Größe $-b$ zu einem positiven Ergebnis führen.

Nun ist die Frage: „Wie soll man den Inhalt des fraglichen Kapitels deuten?" Legt man das Hauptgewicht auf den Satz, daß $\frac{a}{-b}$ keine endliche Größe ist, kann man ja Cardano als einen Vorgänger von Wallis bezeichnen (vgl. BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 329—330). Betrachtet man dagegen diesen Satz nur als eine unmittelbare Folge der vorhergehenden unrichtigen oder sinnlosen Ausführungen, ist der Inhalt des ganzen Kapitels vom historischen Gesichtspunkte aus wertlos.

G. Enestrom.

2:537. Die Angabe (Z. 1—5): „Den vorwiegend umfassendsten Theil des Buches *De regula Aliza* hat Cardano jedoch der Betrachtung derjenigen Fälle gewidmet, bei welchen die Formel Del Ferros unter der Kubikwurzel Ausdrücke auftreten läßt, welche selbst Quadratwurzeln aus Negativem enthalten" sollte modifiziert werden. Der Schluß der Angabe ist nicht direkt unrichtig aber auf eine Weise formuliert, die fast notwendig zu einem Mißverständnis veranlassen muß, besonders wenn der Leser sich erinnert, was Herr Cantor S. 508 über Cardanos Kühnheit, in der *Ars magna* mit Quadratwurzeln aus Negativem zu rechnen, gesagt hat. Daraus wird man nämlich verleitet, anzunehmen, daß Cardano im Traktat *De regula Aliza* wirklich bei Lösung des irreduziblen Falles Quadratwurzeln aus Negativem benutzt. Übrigens geben

auch gewisse Aussprüche Cossalis zu demselben Mißverständnis Anlaß, z. B. der folgende (*Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* **2**, Parma 1799, S. 482): „Cardano conobbe essere appunto nel caso della formola contaminata d'immaginarj, che l'equazione $x^3 - px - q = 0$ gode di tre radici reali". Höchstwahrscheinlich ist dies der Grund, warum J. Tropfke unrichtig behauptet (*Geschichte der Elementar-Mathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 277 Z. 5—6 und die dazu gehörende Fußnote 1102), daß Cardano besonders in der Abhandlung *De regula Aliza* mit imaginären Wurzeln zu rechnen sich unterfing.

In Wirklichkeit kommen in der Abhandlung *De regula Aliza* keine Formeln vor, die Quadratwurzeln aus Negativem enthalten. Als charakterisches Merkmal des irreduziblen Falles der Gleichung $x^3 = ax + b$ stellte Cardano schon in der *Ars magna* die Gleichung $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$ auf und wenn er in dem Traktat *De regula Aliza* Fälle dieser Art behandelt, versucht er gar nicht, die Wurzeln durch irgend eine Formel auszudrücken.

Den Anfang der oben zitierten Cantorschen Angabe möchte ich als entschieden ungenau bezeichnen. Es ist richtig, daß Cardano an verschiedenen Stellen des Traktates Gleichungen behandelt, die dem irreduziblen Fall gehören, aber diese Stellen bilden gar nicht zusammen „den vorwiegend umfassendsten Teil des Buches". Vielmehr kann man behaupten, daß in der Schrift *De regula Aliza* der irreduzible Fall eine durchaus untergeordnete Rolle spielt.

G. Eneström.

---

2 : 539, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 293; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 252. — **2 : 541,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 547,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84. — **2 : 548,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 549,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 554,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 322 — **2 : 558,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 561,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 566,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85. — **2 : 567, 568,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 569,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576.** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85—86; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 326—327. — **2 : 582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356.

---

2 : 584. Was Herr Cantor über den Inhalt der Abhandlung *Effectionum geometricarum canonica recensio* sagt, ist nicht unrichtig, aber ich verstehe eigentlich nicht, warum er stillschweigend übergeht, daß Viète in der Abhandlung lehrt, die Gleichung $x^2 \pm ax = \pm b^2$ geometrisch zu lösen. Aus den Worten des Herrn Cantor (Z. 27—28) „rechnerisch erhaltene Ausdrücke geometrisch zu ermitteln" wird man versucht anzunehmen, daß Viète nur Ausdrücke aber nicht Gleichungen geometrisch behandelt.

G. Eneström.

---

2 : 585, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 593,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 594,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 211. — **2 : 605,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86. — **2 : 610,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 388. — **2 : 611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$,

1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 612—613,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 214, 389; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86—87; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 77. — **2 : 622,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87. — **2 : 623,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 639,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 77. — **2 : 641,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 253. — **2 : 642,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643.** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391 — **2 : 644,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 652,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 347. — **2 : 655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 265—266. — **2 : 656,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 666,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 88—89; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 164—165. — **2 : 667,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 669,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 328. — **2 : 687,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 253. — **2 : 693,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394—395. — **2 : 699,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 165—166. — **2 : 700, 701,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 703,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—272; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 272—273. — **2 : 712,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212—213. — **2 : 713,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 254. — **2 : 714,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 715,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 726,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90. — **2 : 727,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 753—754, 758,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 254—255. — **2 : 763,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S 166. — **2 : 765,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 773,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 213; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 167. — **2 : 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 780,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 78, 167. — **2 : 783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 255; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 62—63. — **2 : 791,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 63—64. — **2 : 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S 208. — **2 : 802—803,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909 10, S. 367—368. — — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 815,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 64. — **2 : 817,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 174. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 827, 830,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 256—257. — **2 : 832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 851, 852,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 174—175. — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511.

---

2 : 884. Der Bericht über die Methode Torricellis, an einen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen, ist mißlungen. Herr Cantor behauptet freilich, die Darstellung Torricellis, „wenn auch nicht dem Wortlaute nach,

doch dem Gedankeninhalte nach", wiedergegeben zu haben. Indessen sieht man leicht, wie wenig richtig diese Behauptung ist, wenn man beobachtet, wie Herr Cantor die Worte Torricellis: „estque progressivi impetus ad lateralem ratio ut ad ad bf, per praecedentem Proposit." wiedergibt. Torricelli sagt also, daß die zwei Bewegungen des Punktes a sich wie $ad : bf$ verhalten, und diesen Satz hatte schon Galilei (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* Giornata quarta; Opere 8, Firenze 1898, S. 285, 290) bewiesen. Aber die entsprechende Stelle bei Herrn Cantor lautet:

> Wäre der Weg von b nach a ein geradliniger gewesen, so hätte er die geradlinige Diagonale des Parallelogrammes der beiden genannten Bewegungen dargestellt, und es wäre auch weiter diese Diagonale eingehalten worden, die Entfernung jedes folgenden Punktes der Diagonale von der Achse cd hätte sich nach dem Verhältnisse $da : fb$ gerichtet.

Ob dieser Passus wirklich einen Sinn hat, will ich dahingestellt lassen (wie kann man das Verhältnis $da : fb$ auf die Entfernung von der Achse beziehen?), aber jedenfalls gibt er nicht den Gedankengang Torricellis wieder. Für diesen ist der Punkt b lediglich der Endpunkt der Geraden fb, und Torricelli hatte also keinen Anlaß, zu untersuchen, wie sich die Bewegung gestalten würde, wenn der Weg von b nach a ein geradliniger gewesen wäre.

Auch eine folgende Stelle des Cantorschen Berichtes sollte modifiziert werden, nämlich die folgende (Z. 19—24):

> Wenn, setzt Torricelli hinzu, dieser Beweis ein besonderer für die Parabel ist, so kann man ihn doch für jeden Kegelschnitt verallgemeinern, indem man gleiche Bewegungen eines Punktes beachtet, der in gleicher Weise auf jeder vom Brennpunkte aus gezogenen Linie — Torricelli meint damit offenbar die Ordinate bf des Brennpunktes — sich bewegt.

Die entsprechende Stelle bei Torricelli lautet: „Haec demonstratio peculiaris est pro parabola; sed et universalem habemus pro qualibet sectione conica, consideratis aequalibus velocitatibus unius puncti, quod aequaliter movetur in utraque linea quae ex focis procedit." Torricelli sagt also nicht, daß die zweite Methode eine Verallgemeinerung der ersten sei, und was Torricelli selbst über jene Methode mitteilt, kann man nicht aus dem Cantorschen Berichte erraten. Höchst auffällig ist der Cantorsche Zusatz: „Torricelli meint damit offenbar die Ordinate bf des Brennpunktes", denn der Sinn der Worte Torricellis wird sofort klar, wenn man die von Herrn Cantor S. 881 mitgeteilten Figuren Robervals einsieht.

G. Enestrom.

---

2 : 891, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 175—176. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 902,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 329—330; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 64. — **2 : 911,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 78—79. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204.

---

2 : 922. Die erste Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen* schließt (S. 844) mit folgenden Worten:

> Jedenfalls ist es England und Deutschland, wo inzwischen die Männer der Zukunft heranwuchsen, für welche das Jahr 1668 und das darauf folgende 1669 Wendepunkte ihres Lebens bilden. 1668 erschien

in Leipzig die Doktordissertation von Gottfried Wilhelm Leibniz. 1669 wurde Isaac Newton Professor der Mathematik in Cambridge.

Indessen wurde die Aufmerksamkeit des Herrn Cantor recht bald darauf gelenkt, daß die Doktordissertation von Leibniz nicht 1668, sondern schon 1666 erschien, und es erwies sich darum nötig, bei der Bearbeitung der zweiten Auflage die Schlußworte zu modifizieren. Das einfachste wäre wohl gewesen, statt 1668 das richtige Jahr 1666 zu setzen und die Worte: „und das darauf folgende 1669" ein wenig zu ändern. Vom stilistischen Gesichtspunkte aus hätte vielleicht der Ausspruch dadurch ein wenig verloren, aber andererseits könnte man darauf hinweisen, daß Herr Cantor selbst früher die Lehrertätigkeit Newtons auf folgende Weise charakterisiert hatte (Nord und Süd **16**, 1881, S. 114):

> Newton war ein Gelehrter, kein Lehrer. Ihm fehlte die mündliche Darstellungsgabe, und überdies war, was er lehrte, für die Bildungsstufe seiner Schüler zu fein. Wir wissen, daß kaum drei oder vier Zuhörer ihm zu folgen imstande waren, daß er leeren Wänden die Geisteskörner zuwarf.

Man könnte also unter Berufung auf Moritz Cantor sagen, daß Newtons Ernennung zum Professor in Cambridge ein Umstand war, der für die Geschichte der Mathematik wenig Bedeutung hatte, und daß jedenfalls dieser Umstand bei der notwendigen stilistischen Änderung des Cantorschen Ausspruches keine wichtigere Rolle spielen sollte.

Indessen scheint Herr Cantor bei der Bearbeitung der zweiten Auflage der *Vorlesungen* einer anderen Ansicht gewesen zu sein, denn er hat die Worte, die sich auf Newton beziehen, wörtlich zum Abdruck gebracht, und für Leibniz mußte er also das Jahr 1668 als „Wendepunkt seines Lebens" auf eine neue Weise motivieren. Dies erzielte er dadurch, daß er in dem Passus: „1668 erschien in Leipzig die Doktordissertation von Gottfried Wilhelm Leibniz" die Jahreszahl „1668" in „1666" verbesserte und dann hinzufügte: „1668 knüpfte er Beziehungen zu einflußreichen Persönlichkeiten an verschiedenen Orten an, welche für seine Laufbahn von größter Bedeutung wurden". Will man indessen aus den Cantorschen *Vorlesungen* erfahren, welches diese hochwichtigen Beziehungen waren, so bekommt man, soweit meine Nachforschungen sich erstreckt haben, gar keine Auskunft. Im dritten Bande der *Vorlesungen* (1. Aufl. S. 27, 2. Aufl. S. 29—30) erwähnt Herr Cantor nur das Jahr 1667 und dann die Jahre 1670—1672 als für Leibniz bedeutungsvoll.

Nun könnte man ja meinen, daß die Frage, die ich hier berührt habe, rein stilistisch und darum von durchaus untergeordnetem Interesse sei. Aber in Wirklichkeit liegt die Sache ganz anders. Der Passus der *Vorlesungen*, um den es sich handelt, ist nämlich meines Wissens der einzige, der motiviert, warum Herr Cantor mit dem Jahre 1668 eine neue Periode der Geschichte der Mathematik beginnt, und das Ergebnis der vorangehenden Ausführungen ist also:

> Herr Cantor beginnt in der zweiten Auflage der *Vorlesungen* eine neue Periode der Geschichte der Mathematik mit den Jahren 1668 und 1669, weil diese Jahre für Leibniz und Newton angebliche „Wendepunkte ihres Lebens" waren. Allein, wenn er die biographischen Notizen über Leibniz bringt, legt er auf den „Wendepunkt seines Lebens" so wenig

Wert, daß er ihn nicht einmal erwähnt, und für Newton betrachtet er als „Wendepunkt seines Lebens", daß dieser ein Amt erhielt, für das er nicht paßte. G. Enestrom.

---

2 : VIII (Vorwort), siehe BM 3_3, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM 1_3, 1900, S. 511—512.

---

3 : 1, siehe BM 10_3, 1909/10, S. 268. — **3 : 4,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 65—67. — **3 : 5,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 269. — **3 : 5—6,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 269—270. — **3 : 9,** siehe BM 2_1, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM 1_3, 1900, S. 518; 6_3, 1905, S. 211; 7_3, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM 4_3, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 15, 16,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 270—272. — **3 : 17,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512. — **3 : 18,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 168. — **3 : 19,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 67—68. — **3 : 22,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512; 4_3, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 297—298; 8_3, 1907/8, S. 91. — **3 : 24,** siehe BM 4_3, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM 4_3, 1903, S. 209, 399; 9_3, 1908/9, S. 168. — **3 : 26,** siehe BM 2_1, 1901, S. 359; 7_3, 1906/7, S. 394. — **3 : 29,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 331. — **3 : 37,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM 6_3, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM 1_3, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 58,** siehe BM **10**, 1909/10, S. 272—273. — **3 : 62,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 177. — **3 : 63,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 299; 9_3, 1908/9, S. 257—258. — **3 : 69,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 69. — **3 : 70,** siehe BM 2_3, 1901, S. 360; 9_3, 1908/9, S. 258. — **3 : 78,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 92. — **3 : 79,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 69—71. — **3 : 82,** siehe BM 5_3, 1904, S. 308. — **3 : 85,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 273—274. — **3 : 97,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 394. — **3 : 100,** siehe BM 2_3, 1901, S. 149; 7_3, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM 6_3, 1905, S. 318; 7_3, 1906/7, S. 300; 9_3, 1908/9, S. 169. — **3 : 104,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 331.

---

3 : 110. Herr Cantor bemerkt (Z. 32—35): „In diesem Aufsatze *(Compendium quadraturae arithmeticae)* dürfte Leibniz zum ersten Male Stellenzeiger oder Indices angewandt haben, um Punkte derselben Gattung mit gleichen Buchstaben benennen zu können." Er hat also die bestimmte Form der Angabe des zweiten Bandes der *Vorlesungen* (S. 751): „erst Leibniz hat Buchstaben mit Stellenzeigern in die Mathematik einzuführen gewußt" ein wenig modifiziert, und eigentlich sollte er dabei weit länger gegangen sein, wie aus dem Folgenden hervorgehen dürfte.

Meint man mit Stellenzeigern Zahlen, die gewissen anderen Zeichen hinzugefügt werden, um Größen derselben Gattung mit demselben Hauptzeichen benennen zu können, so ist Leibniz ganz gewiß nicht der erste, der ein solches Verfahren angewandt hat, denn schon in der ersten lateinischen Ausgabe der Geometrie von Descartes durch F. van Schooten (1649) kommt eine solche Bezeichnungsweise vor, nämlich S. 112, wo es sich darum handelt, eine gewisse Kurve punktweise zu konstruieren. In der Figur sind drei solche Punkte ersichtlich, und sie werden durch C, $2C$, $3C$ bezeichnet; ebenso gibt es in der Figur Punkte $2S$, $3S$, $2T$, $3T$, $2V$, $3V$. Dieselbe Bezeichnungsweise kommt nicht nur vielfach in den Acta eruditorum (s. z. B. Jahrg. 1682 Tafel IV; Jahrg. 1684, S. 322), sondern auch in den Newtonschen *Principia* (siehe Ausg. 1687, S. 481—482) vor, und jedenfalls rührt sie nicht von Leibniz her.

Meint man dagegen mit Stellenzeigern Zahlen, die unten (links oder rechts) gesetzt werden, so wird die Frage verwickelter. Wenn der Abdruck der Leibnizschen

Manuskripte in der Ausgabe von GERHARDT durchaus korrekt ist, so dürfte LEIBNIZ wirklich der erste sein, der Stellenzeiger angewandt hat. Indessen möchte ich bis auf weiteres die Genauigkeit des Abdruckes bei GERHARDT als verdächtig bezeichnen, denn im Originaldrucke der Abhandlung *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum quae centrum habent* (Acta erud. 1691, S. 178—182) stehen die Stellenzeiger nicht unten, sondern ganz wie an der zitierten Stelle bei SCHOOTEN. Ebenso stehen Seite 646 des 3. Bandes der *Opera* von J. WALLIS die Stellenzeiger links neben den Buchstaben, obgleich GERHARDT in seinem Abdrucke die Ziffern unten gesetzt hat. Die Frage kann also erst durch eine genaue Untersuchung der Handschriften LEIBNIZens entschieden werden.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 112, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3 : 113,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 258—259. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 259—260.

---

3 : 117. Daß LEIBNIZ schon 1676 glaubte, im Besitze einer Methode zu sein, Gleichungen 5. Grades zu lösen, geht aus dem (vielleicht nicht abgegangenen?) Schreiben an MAGLIABECCHI hervor, das GERHARDT im 7. Bande von *LEIBNIZens Mathematischen Schriften* (Halle 1863, S. 303—316) veröffentlichte. Am Ende (a. a. O. S. 316) dieses Schreibens bemerkt LEIBNIZ nämlich:

> Neque quisquam hactenus generalem pro altiori aliqua aequatione radicis formulam dedit, quanquam ego aditum ad eam rem reperisse mihi videar, cujus et specimina habeo, sed prolixi calculi necessarium taedium devorare nondum vacavit.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 118, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3 : 122,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326.

---

3 : 156. Z. 13—14 soll „Reihenentwicklungen" statt „den binomischen Lehrsatz bei beliebiger Annahme des Exponenten" gesetzt werden (vgl. BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 69). Vermutlich ist Herr CANTOR durch seine eigene Darstellung an der von ihm Z. 13 zitierten Stelle irre geführt worden. Warum NEWTON in der *Analysis* absichtlich vermied, den binomischen Lehrsatz bei beliebiger Annahme des Exponenten anzuwenden, weiß man aus seinem eigenen Berichte in dem Briefe an OLDENBURG vom 24. Oktober 1676: „Quod . . . me manuduxit ad tentandum e converso, num hae series, quas sic constitit esse radices quantitatis $1 - xx$, non possent inde extrahi more arithmetico. Et res bene successit . . . His perspectis neglexi penitus interpolationem serierum". Was NEWTON hier Reiheninterpolation nennt, ist eben der allgemeine binomische Lehrsatz.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 157, siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 348—349. — **3 : 166,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 332. — **3 : 167,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400.

---

3 : 168. Es gibt zwei verschiedene englische Übersetzungen der *Methodus fluxionum*, und merkwürdigerweise erschienen diese etwa gleichzeitig. Die erste Übersetzung ist die von Herrn Cantor erwähnte, und der Übersetzer Colson hat einen ausführlichen Kommentar hinzugefügt. Die zweite Übersetzung, die anonym ist, hat das Druckjahr 1737 und der Titel lautet: *A treatise of the method of fluxions and infinite series, with its application to the geometry of curve lines. Translated from the latin original not yet published. Designed by the author for the use of learners.* London, Woodman and Millan MDCCXXXVII [XIV + (2) + 180 + (1) S. + 4 Tabellen]. Nähere Auskunft über die zwei Ausgaben gibt G. J. Gray, *A bibliography of the works of Isaac Newton* (2d ed., Cambridge 1907, S. 46—48). G. Eneström.

---

3 : 171. Der Passus (Z. 24—25): „Freilich ist das nur ein Notbehelf, aber wir sind weit entfernt davon, Newton diese kleine Lücke als Verbrechen(!) anrechnen zu wollen" sollte gestrichen werden. In der ersten Auflage der *Vorlesungen* (**3**, S. 165) glaubte Herr Cantor nach H. Weissenborn einen angeblichen Fehler der „Solutio peculiaris" Newtons nachgewiesen zu haben, nämlich, daß das Verfahren in gewissen Fällen zu einem falschen Ergebnis führe. Auf Grund dieses vermeintlichen Nachweises fügte Herr Cantor in der ersten Auflage die Bemerkung hinzu: „Wir sind weit entfernt, diesen und andere Fehler, welche in den Newtonschen Integrationsregeln vorkommen, ihm als Verbrechen anrechnen zu wollen." Indessen machten H. G. Zeuthen (*Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton*; Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 263—264) und E. Tischer (*Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz*, Leipzig 1896, S. 35—36) etwa gleichzeitig darauf aufmerksam, daß Newton selbst die beschränkte Anwendbarkeit des Verfahrens ausdrücklich hervorgehoben hat. Dadurch wurde ja die Weissenborn-Cantorsche Behauptung durchaus hinfällig, aber dennoch hat Herr Cantor in der zweiten Auflage der *Vorlesungen* seine Ausstellung gegen Newton nicht vollständig gestrichen, sondern nur modifiziert. Was Herr Cantor mit den Ausdrücken „Notbehelf" und „kleine Lücke" meint, ist mir nicht näher bekannt, aber jedenfalls ist es sinnlos, hier das Wort „Verbrechen" zu benutzen, auch wenn man mit „wir sind weit entfernt" beginnt. Wenn man mit „kleiner Lücke" meint, daß die vorgelegte Differentialgleichung zuweilen integriert werden kann, obgleich die „Solutio peculiaris" nicht zum Ziele führt, so hat man natürlich recht, aber eine Ausstellung gegen Newton kann nicht durch diesen Umstand motiviert werden. Vermutlich meint Herr Cantor etwas anderes, denn er sagt „diese kleine Lücke", während er den fraglichen Umstand nicht erwähnt. G. Eneström.

---

3 : 171—172. Die zwei Absätze: „Eine große Unklarheit ... vornehme" und „Was soll ... wie er es tat?" sollten meines Erachtens auf andere Weise redigiert werden. Ebensowenig wie H. G. Zeuthen (*Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 206) und E. Tischer (*Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz*, Leipzig 1896, S. 37—39) habe ich die angebliche „große Unklarheit" bei Newton entdecken können. Die

Gleichung $\dot{x} + x\dot{x}\dot{y} - ax^2$ zeigt ja sofort, daß eine gewisse Größe als unabhängige Veränderliche betrachtet worden ist, und diese Größe ist weder x noch y, weil sonst entweder $\dot{x}$ oder $\dot{y}$ gleich 1 angesetzt gewesen wäre. Nennt man nun diese unabhängige Veränderliche z, und will man aus irgendeinem Grunde, z. B um eine andere Größe als unabhängige Veränderliche zu wählen, auf die ursprüngliche Gleichung zurückgehen, so muß diese offenbar $\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}\dot{y} - ax^2\dot{z}^2 = 0$ lauten, weil die Fluxionen als Geschwindigkeiten betrachtet werden, und die Gleichung folglich in betreff der Fluxionen homogen sein muß. Die ursprüngliche Gleichung ist also in Wirklichkeit eine totale Differentialgleichung mit drei Veränderlichen, obgleich nur zwei derselben zum Vorschein kommen.

Die Frage (S. 172 Z. 8—9): „Durfte er schon oben bei der ersten Aufgabe z und u als bloße Abkürzungen einführen?“ ist ohne weiteres zu streichen; z und u sind ja neue Veränderliche, die von Newton für einen ganz bestimmten Zweck eingeführt wurden.

Dagegen könnte man von rein formellem Gesichtspunkte aus eine andere Bemerkung Newtons beanstanden, nämlich (*Opuscula* 1, S. 63 Z. 17—18): „Haud aliter in aequatione $x\dot{y} = yy$ concipi debet $\dot{x}$ esse Unitatem, per quam terminus yy multiplicandus est“, denn aus der Gleichung sieht man ja nur, daß y nicht unabhängige Veränderliche ist. Daß dagegen x und nicht eine dritte Größe die unabhängige Veränderliche ist, geht aus der Gleichung selbst nicht hervor.

G. Enestrom.

---

3 : 172—173, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 174, 181,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 71—73. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S 241. — **3 : 195,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 311, 332—333; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 73 — **3 : 196,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 333 — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 260—262. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 221,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 333. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 333—334. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 334—335 — **3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514.

---

3 : 253. Der Bericht über das zweite Integrationsverfahren Newtons ist nicht ganz befriedigend. Zeile 6—7 sagt Herr Cantor: „und ist $\lambda = 0$, so findet man $k = d$, d. h. man findet $y = d + p$, wo p neuerdings unbekannt ist“, und der aufmerksame Leser muß fragen: „Hat Newton den Wert $\lambda = 0$ durch ein methodisches Verfahren hergeleitet und kann λ nach Newton auch andere Werte haben?“ Auf diese Frage gibt der Bericht keine Antwort. In Wirklichkeit leitet Newton den Wert der Zahl, die Herr Cantor λ, Newton selbst aber ν nennt, methodisch her, und zwar auf folgende Weise. Sei kz^λ das Glied der gegebenen Gleichung, das weder y noch $\dot{y}$ enthält und dessen Exponent der niedrigste ist (also in diesem Falle Null, weil es ein Glied $= d^2$ gibt), und seien die übrigen Glieder von der Form $lz^\mu y^\alpha \dot{y}^\beta$. Nun berechnet man alle Zahlen $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$, die größte dieser Zahlen nennt man ν, und dann ist das erste Glied der Reihenentwicklung az^ν, wo die Größe a durch Substitution

bestimmt wird. In der vorliegenden Gleichung $y^2 - z^2\dot{y} - d^2 + dz = 0$ ist, wie schon gesagt, $\lambda = 0$, und ferner für das Glied y^2 $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, für das Glied $z^2\dot{y}$ $\mu = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Die Zahl $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ ist also für das erste Glied $= 0$, für das zweite Glied $- 1$, folglich $\nu = 0$, d h. $y = a$ und durch Substitution dieses Wertes in die gegebene Gleichung wird $a^2 - d^2 + dz = 0$; hieraus sieht man sofort, daß das von z unabhängige Glied der Reihenentwicklung d sein muß.

Es mag sein, daß die Newtonsche Herleitung des Wertes von ν zu lang ist, um in den *Vorlesungen* mitgeteilt zu werden, aber statt: „und ist $\lambda = 0$" sollte Herr Cantor wenigstens etwa: „und durch ein methodisches Verfahren findet Newton, daß der Exponent des ersten Gliedes $= 0$ ist" gesetzt haben.

Auf ähnliche Weise leitet Newton her, daß der Exponent des zweiten Teiles der Reihenentwicklung 1 ist; statt diese Herleitung anzugeben oder wenigstens anzudeuten, sagt Herr Cantor (Z. 10): „Sie setzt voraus, daß dz gegen $2dp$ sich aufhebe". G. Enestrom.

---

3 : 253, 254, 258, 260, siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 73—76. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 279,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 335—336. — **3 : 286,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 76. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 310, 310—311,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 82—83 — **3 : 327,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 77; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 83—84. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 350,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 336. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 366,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S 274—275 — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319.

---

3 : 394. Der Schluß der Bemerkung (Z. 26—28): „Ob Newton seine Einwilligung zur Veröffentlichung [der *Arithmetica universalis*] gab, wissen wir nicht. Jedenfalls hat Whiston es in seiner Vorrede zu dem Drucke von 1707 behauptet" ist vielleicht nicht ganz genau. Herr Cantor gibt selbst an, daß er die Leidener Auflage von 1732 der *Arithmetica universalis* benutzt hat, und dort ist die Vorrede zur ersten Auflage richtig abgedruckt (ich besitze selber die zwei Auflagen und habe den Abdruck verglichen). Aber in dieser Vorrede steht gar nichts über Newtons Einwilligung. Allerdings sagt Whiston am Ende der Vorrede:

> Cum autem summo viro hisce minutiis postmodo vacare minime placuerit, defectum hunc aliunde supplere volui; atque eum in finem generalem planeque egregiam Cl. Halleii aequationum radices extrahendi methodum ex Actis nostris Philosophicis, exorata prius utrobique venia, huc transferendum judicavi.

Vermutlich hat Herr Cantor angenommen, daß sich das Wort „utrobique" auf Newton und Halley bezieht, aber es liegt wohl am nächsten anzunehmen, daß Whiston dabei Halley und die Redaktion der Philosophical transactions gemeint hat. Denn warum sollte Whiston, der gar nicht erwähnt, daß die *Arithmetica universalis* selbst mit Genehmigung des Verfassers veröffentlicht wurde, ausdrücklich hervorheben, daß er von Newton die Erlaubnis bekommen hatte, einen Anhang hinzuzufügen? Daß auch nicht Gravesande das Wort

„utrobique“ auf Newton bezogen hat, sieht man aus dem Anfang seiner Vorrede: „Liber hicce prima vice, inscio Autore, et ipso hoc aegre ferente, editus fuit Cantabrigiae anno 1707“ Freilich bemerkt W. W. R. Ball (*Account of the history of mathematics*, ed. 4, London 1908, S. 330): „Whiston extracted a somewhat reluctant permission from Newton to print it“ [d. h. das Manuskript der *Arithmetica universalis*], aber die Quelle dieser unbelegten Angabe ist mir unbekannt.

G. Enestrom.

---

3 : 397, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3 : 399,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 77—78.

---

3 : 403. Hier sollten etwa 3 Zeilen (Z. 2—5): „und auch räumlich . . . nachfolgen“ gestrichen werden. Die räumliche Trennung, von der Herr Cantor spricht, hat gar nichts mit dem Inhalt der Probleme zu tun, und es ist unrichtig, daß etwa eine halbe Seite freigelassen ist. In Wirklichkeit beträgt der freie Raum weniger als $\frac{1}{5}$ Seite; die Seiten enthalten 35 Zeilen und aus rein typographischen Gründen hat der Setzer S. 170 ganz wie S. 151 und 159 die letzten 6 Zeilen freigelassen. In der Ausgabe 1707 sind die vier von Herrn Cantor erwähnten Aufgaben nicht von den übrigen getrennt; sie haben übrigens dort die Nummern 54—57, und die Nummern 58—61 dieser Auflage sind die Nummern 51—54 der Ausgabe 1732.

Warum Z. 1 das Wort „eingekleideten“ steht, habe ich nicht erraten können. Vielleicht handelt es sich nur um einen einfachen Satzfehler statt „geometrischen“?

G. Enestrom.

---

3 : 403. Der Passus (Z. 34—36): „offenbar mit Rücksicht darauf, daß weiter oben der Gleichung n^{ten} Grades nicht wirklich n Wurzeln, sondern höchstens n Wurzeln zugesprochen wird“ sollte gestrichen werden. Man hat nämlich nicht den geringsten Anlaß anzunehmen, daß Newton auf Grund des fraglichen Umstandes die Zeichenregel nicht genau wie Descartes ausgedrückt hat. Sonst hätte Newton gewiß nicht gesagt, daß wegen der Zeichenregel drei der Wurzeln der Gleichung $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$ positiv sind, und folglich die vierte negativ ist („adeoque quartam esse negativam“).

G. Enestrom.

---

3 : 406, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 262; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 84. — **3 : 408,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S 306. — **3 : 427,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 169. — **3 : 447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 461,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 337. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 475,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 79—80. — **3 : 476,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S 169—170, 476. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95 — **3 : 481,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 79. — **3 : 482,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 178. — **3 : 496,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 337—338. — **3 : 497, 498,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 500,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 84—87. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 507—509, 509,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 338—339. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 550,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 87. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321.

---

3 : 562. Die Behauptung (Z. 21—22): „die Schriftsteller dieses Kapitels gebrauchten ausschließlich das Wort *imaginär*“ ist nicht ganz genau. Gerade in dem ersten Briefe Maclaurins, worüber Herr Cantor hier berichtet, werden die nicht reellen Wurzeln überall „impossible roots“ (in der lateinischen Übersetzung „radices impossibiles“), genannt; übrigens lautet ja der Titel des Briefes: „*Letter . . . concerning equations with impossible roots*“. Im zweiten Briefe Maclaurins kommt auch zuweilen diese Benennung vor, aber gewöhnlich werden die nicht reellen Wurzeln imaginär genannt. G. Enestrom.

---

3 : 565, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327.

---

3 : 566. Aus den lateinischen Zitaten der zwei Fußnoten muß der Leser schließen, daß der Aufsatz Campbells lateinisch geschrieben ist. Dies ist indessen nicht der Fall; der Titel lautet: *A method for determining the number of impossible roots in adfected equations* und der ganze Aufsatz ist in englischer Sprache verfaßt. Sicherlich hat Herr Cantor bei dem Berichte über Campbells Aufsatz die Leidener Ausgabe 1732 der *Arithmetica universalis* benutzt, an deren Ende (S. 333—344) eine lateinische Übersetzung des Aufsatzes sich befindet, und wo die von Herrn Cantor zitierten Stellen S. 333 Z. 9 und S. 339 Z. 3—5 stehen. Die Übersetzung rührt von J. P. Bernard her.

G. Enestrom.

---

3 : 571, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 170. — **3 : 575,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3 : 583,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 80.

---

3 : 583. Die Angabe (Z 24): „Der Beweis beruht auf zwei Voraussetzungen“ sollte meines Erachtens auf andere Weise ausgedrückt werden. Erstens ist es wohl kaum angebracht, den fast selbstklaren Satz, daß der Punkt $x = 0$ der Kurve $y = x^n + px^{n-1} + \ldots + u$ (u positiv) oberhalb der Abszissenachse liegt, eine „Voraussetzung“ zu nennen. Zweitens sollte wenigstens „drei“ statt „zwei“ gesetzt werden, denn ebenso wichtig wie die zweite „Voraussetzung“ ist offenbar der Satz, daß der Punkt $x = \infty$ für beliebiges n oberhalb der Abszissenachse liegt und daß der Punkt $x = -\infty$ bei $\frac{\text{geradem}}{\text{ungeradem}}$ n $\frac{\text{oberhalb}}{\text{unterhalb}}$ der Abszissenachse liegt. Dieser Satz wird tatsächlich von Kästner als „propositio III“ ausgesprochen und bewiesen, während die zweite Cantorsche „Voraussetzung“ nur im „cor. 7“ dieses Satzes erwähnt wird.

Auch an anderen Stellen des Cantorschen Berichtes wäre meiner Ansicht nach eine Umarbeitung zu empfehlen. Beispielsweise sagt Herr Cantor Z. 13—16: „Es könne y bei n reellen Werten von x zu Null werden, z bei $n - 1$ reellen Werten von x, und seien $y = 0$ und $z = 0$ Gleichungen in x mit lauter reellen Wurzeln“. Allein Kästner selbst bemerkt, daß er immer, sofern nicht das Gegenteil ausdrücklich angegeben wird, nur Gleichungen, deren alle Wurzeln reell sind, in Betracht zieht (prop. I), und nimmt ohne weiteres als bewiesen an, daß jede Gleichung m^{ten} Grades m Wurzeln hat (prop. III). Will man den

Gedankengang Kästners möglichst genau wiedergeben, wäre es also besser, ganz einfach zu sagen:

> Kästner nimmt als bewiesen an, daß jede Gleichung m^{ten} Grades m Wurzeln hat, und beschränkt sich bei dem Beweise des „Theorema Harrioti" auf Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln. Daß die Gleichung $z = 0$ in diesem Falle auch lauter reelle Wurzeln hat, scheint er unmittelbar aus der Figur seines 3. Satzes zu folgern.

Beiläufig bemerke ich, daß Kästner selbst nicht, wie Herr Cantor S. 584 angibt, von der Gleichung ersten Grades, sondern von der Gleichung zweiten Grades (prop. I) ausgeht. Dieser Umstand ist ja eigentlich recht belanglos, aber dadurch wird jedenfalls klar hervorgehoben, daß Kästners Beweis nur für Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln gilt. G. Enestrom.

---

3 : 586, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 587, 590—591,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 88—89. — **3 : 593,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 214.

---

3 : 599. Was Herr Cantor (Z. 14) „die sehr allgemein gehaltene Vorschrift" nennt, ist genau der Satz, daß jede rationale symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung als eine rationale Funktion der Koeffizienten ausgedrückt werden kann („par ces valeurs P, Q, R, S &c. on est en état d'exprimer toutes les expressions, dans lesquelles entrent toutes les racines également, par des formules rationnelles composées de P, Q, R, S &c."). Dieser Umstand scheint bisher wenig beachtet worden zu sein; beispielsweise bemerken Brill und Nöther an der von Herrn Cantor S. 608 (Fußnote 4) zitierten Stelle, daß Cramer zuerst die Frage nach der Darstellung allgemeiner symmetrischer Funktionen durch die Koeffizienten der Gleichung aufgeworfen hat. Allein die Abhandlung Eulers wurde nach C. G. J. Jacobi schon Anfang 1748 der Berliner Akademie vorgelegt und erschien etwa gleichzeitig mit der Arbeit Cramers; Euler hat also unabhängig von diesem die Frage in Betracht gezogen.

Einen durchgeführten Beweis des Satzes hat Euler allerdings nicht gebracht, aber daß er 1748 einen solchen Beweis bringen konnte, scheint mir kaum in Abrede zu stellen zu sein. Schon in einer 1747 verfaßten Abhandlung hatte Euler den Satz speziell für die Potenzsummen der Wurzeln bewiesen (siehe Opuscula varii argumenti **2**, Berlin 1750, S. 108—120) und man weiß, daß der allgemeine Satz sehr leicht auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden kann (siehe z. B. J. A. Serret, *Cours d'algèbre supérieure,* 2e édition, Paris 1854, S. 11—14). Daß Euler selbst dieses Vorgehen kannte, scheint mir aus S. 247—248 der Abhandlung der Berliner Mémoires für das Jahr 1748 hervorzugehen, und aus diesem Grunde sollte meines Erachtens der Passus des Herrn Cantor (Z. 18—21): „Es ist klar . . . zu gelten," gestrichen werden. Jedenfalls ist man nicht berechtigt, in die von Herrn Cantor zitierten Worte Eulers ein „Eingeständnis eines noch nicht ganz einwandfreien Beweises" hineinzulesen.

Z. 15 soll „zwei bestimmten Beispielen" statt „einem bestimmten Beispiele" gesetzt werden. Das erste Beispiel bezieht sich auf zwei Gleichungen 2. Grades, das zweite Beispiel auf zwei Gleichungen 3. Grades. G. Enestrom.

---

3 : 600—601. Der Bericht über die Abhandlung von J. S. König gibt keine Auskunft über den wesentlichen Inhalt derselben und das wenige,

das Herr Cantor mitteilt, ist eher verwirrend als belehrend. Wie Herr Cantor Z. 22—23 nach dem Titel der Abhandlung angibt, handelt es sich um den wirklichen Grund der Unzulänglichkeit der allgemeinen Lösung der kubischen Gleichung im irreduziblen Falle. Dieser Grund ist nach König, daß man bei der Herleitung der Lösung unrichtig verfahren ist. Man führt nämlich, um die Gleichung $x^3 - q\,x \pm r = 0$ zu lösen, eine neue Unbekannte z ein, die der Bedingung $x = z + \frac{q}{3z}$ genügt, und da $\sqrt{\frac{4}{3}q}$ offenbar der kleinste numerische Wert von $z + \frac{q}{3z}$ ist, muß das Verfahren unsinnig werden, wenn eine Wurzel der vorgelegten Gleichung numerisch kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}q}$ ist. Die Behauptung Königs besagt also, daß im fraglichen Falle z keine reelle Größe sein kann, und in diesem Sinne ist sie natürlich richtig. Andererseits kommt dieselbe Bemerkung im wesentlichen schon bei Cardano in der Abhandlung *De regula Aliza* (Kap. 1; Ausg. Basel 1570, S. 1—4) vor und die Abhandlung von König enthält folglich eigentlich nichts Neues.

Bei der Anfertigung seines Berichtes scheint Herr Cantor nur die Einleitung der Königschen Abhandlung gelesen zu haben, und wenn er S. 601 Z. 1—3 bemerkt: „und nun folgt eine ausführliche Erörterung der Größebeziehungen zwischen a und c, welche stattfinden müssen, damit C. die erwähnten drei reellen Wurzeln besitze", so kann dies nur als eine an sich sehr unwahrscheinliche Mutmaßung des Herrn Cantor betrachtet werden. Ich sage „sehr unwahrscheinlich", denn die fragliche äußerst einfache Größebeziehung kann kaum zu einer ausführlichen Erörterung Anlaß geben. In Wirklichkeit beschränkt sich diese angebliche „ausführliche Erörterung" auf die einfache Bemerkung, daß die Gleichung $x^3 - 3a^2x \pm 2a^2c = 0$ für $c \leqq a$ drei reelle Wurzeln hat, von denen für $c = a$ zwei gleich werden.

Die Redaktion der wenigen Zeilen des Cantorschen Berichtes sollte übrigens auch an ein paar anderen Stellen verbessert werden. Das Wort „sonach" am Ende der Seite 600 bezieht sich natürlich nicht auf den unmittelbar vorhergehenden Passus: „Das Fehlen . . . besitzt", sondern auf das früher Gesagte und der Ausspruch (Z. 31): „läßt A. immer auf zwei komplexe Wurzeln schließen" ist ungenau. König selbst sagt nämlich nicht, daß man aus der Form $x^3 + qx - r = 0$ auf die Natur der Wurzeln schließen kann, sondern nur: „on sçait que la forme A renferme toujours deux racines imaginaires." Die Frage, ob man aus der Form $x^3 + qx - r = 0$ etwas über die Zahl der imaginären Wurzeln schließen kann, berührt König nicht.

G. Enestrom.

---

3 : 609, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 339—340. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308.

---

3 : 615. Herr Cantor bemerkt (Z. 31—40): „Euler wandte sich ab von der zunächst undankbaren Aufgabe [es handelt sich um den Satz, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ in zwei Quadrate zerlegt werden kann]. Wir meinen nicht, als ob er jetzt erst begonnen hätte, sich mit Gegenständen aus anderen mathematischen Gebieten zu beschäftigen . . . aber innerhalb seines zahlentheoretischen Denkens wechselte er mit dem Stoffe. Er warf sich auf

eine . . . Aufgabe: ein rationales, wenn auch nicht ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daß jede der beiden Katheten um den Dreiecksinhalt vermindert eine Quadratzahl gebe".

Aus dieser Bemerkung muß der nicht sachkundige Leser die Auffassung bekommen, daß Herr CANTOR mit dem „zahlentheoretischen Denken" EULERS sehr vertraut ist. Allein in Wahrheit findet gerade das Gegenteil statt, wie man aus den folgenden Auseinandersetzungen ersieht.

Der einzige Beleg, den man möglicherweise für die CANTORsche Bemerkung bieten könnte, ist der Umstand, daß EULER im 1. Bande („ad annum 1747 et 1748") der Novi comment. acad. sc. Petrop. den Satz über Zerlegung in zwei Quadrate unvollständig behandelte, dann im 2. Bande („ad annum 1749") derselben Sammlung sich nicht mit diesem, sondern mit einem anderen zahlentheoretischen Gegenstand (ein gewisses rationales rechtwinkliges Dreieck zu finden) beschäftigte und endlich in zwei Abhandlungen des 4. („ad annum 1752 et 1753") und 5. („ad annum 1754 et 1755") Bandes der Novi commentarii die Frage über Zerlegung von Primzahlen in zwei Quadrate erledigte. Vermutlich hat Herr CANTOR aus den angeführten Jahreszahlen geschlossen, daß sich EULER während der Jahre 1749—1751 (oder möglicherweise 1748—1752) von der „undankbaren Aufgabe" abwandte. Aber in Wirklichkeit hatte EULER diese Aufgabe 1749 (oder vielleicht schon 1748) erledigt. In einer früheren Bemerkung (BM 7_3, 1906/7, S. 308) habe ich darauf hingewiesen, daß EULER spätestens Anfang 1745 gewisse Sätze der Abhandlung des Bandes „ad annum 1747 et 1748" gefunden hatte. Ferner ersieht man aus seinem Briefe an GOLDBACH vom 6. Mai 1747 (FUSS, *Corresp. mathém.* **1**, St. Pétersbourg 1843, S. 415—419), daß er damals zu den Ergebnissen der Abhandlung des Bandes „ad annum 1752 et 1753" gelangt war. Endlich stimmt die Abhandlung des Bandes „ad annum 1754 et 1755" wesentlich mit dem Inhalt des Briefes von EULER an GOLDBACH vom 12. April 1749 (a. a. O. S. 493—495) überein.

Beiläufig bemerke ich, daß die Abhandlung über das rationale rechtwinklige Dreieck gleichzeitig mit den *Theoremata circa divisores numerorum*, nämlich schon am 2. September 1748, der Petersburger Akademie vorgelegt wurde. Schon dieser Umstand genügt, um die Zuverlässigkeit des CANTORschen Ausspruches: „EULER wandte sich ab . . . Er warf sich auf . . . eine Aufgabe" zu charakterisieren.

G. ENESTRÖM.

3 : 616, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 617,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 80—81. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 655,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S 275—276. — **3 : 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 666,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 179. — **3 : 667,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 675,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 340—341. — **3 : 682,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 688,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 341; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 276. — **3 : 689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 692,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 693,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S 341. — **3 : 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 700,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 171, 342. — **3 : 702,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S 171. — **3 : 703, 705,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 342—343. — **3 : 722,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3 : 726—728,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 343—344. — **3 : 736,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 749,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3 : 750,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 753,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172—174. — **3 : 754,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 344—345. — **3 : 758,** siehe BM $\mathbf{2}_3$,

1901, S. 446; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 345—346. — **3 : 759,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 762,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 346.

---

3 : 763. Im 2. Kapitel des 2. Teiles seiner Differentialrechnung beschäftigt sich Euler mit einer Reihe, die von einem gewissen Gesichtspunkte aus verdient, besonders erwähnt zu werden, nämlich (siehe Ausg. 1755, S. 318) die Reihe

$$\operatorname{arctg} y = \frac{y}{1+y^2} + \frac{2y^3}{3(1+y^2)^2} + \frac{2\cdot 4y^5}{3\cdot 5(1+y^2)^3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot y^7}{3\cdot 5\cdot 7(1+y^2)^4} + \cdots$$

Dieselbe Reihe hat Euler später zweimal behandelt, nämlich teils in der Abhandlung *Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accommodatae* (Nova acta acad. sc. Petrop. **11** (1793), gedruckt 1798, S. 133—149) teils in der Abhandlung *Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime invenienda* (Opera postuma **1**, St. Petersburg 1862, S. 288—298). Die erste Abhandlung wurde am 7. Juni 1779 der Petersburger Akademie vorgelegt (wann die zweite verfaßt wurde, ist unbekannt), und darin nennt Euler mehrmals die fragliche Reihe neu (siehe z. B. S. 136: „Incidi nuper in modum prorsus singularem", S. 137: „ad hanc novam seriem primum methodo longe alia sim perductus", S. 139: „hanc novam seriem"). Darum gibt man gewöhnlich an, daß die Reihe zuerst 1798 veröffentlicht wurde (siehe z. B. A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* **2**, Leipzig 1903, S. 115). Erst vor drei Jahren wies Braunmühl (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* herausgegeben von M. Cantor **4**, Leipzig 1908, S. 443) nach, daß die Reihe schon in den *Institutiones calculi differentialis* vorkommt, ein Umstand, den Euler selbst offenbar 1779 vergessen hatte. G. Eneström.

---

3 : 766, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 773,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 174—175, 346—347. — **3 : 774,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 792,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 347. — **3 : 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

---

3 : 813. Die Angabe, daß das 17. Kapitel des 2. Bandes der *Introductio* „soweit wir [Cantor] uns entsinnen können, die erste geschichtlich bekannte umfassende Behandlung von Kurven, die keine Spirale sind, mittels Polarkoordinaten" enthält, ist mit empfehlenswerter Vorsicht formuliert. Da indessen nach dem Register die einzigen früheren Stellen der *Vorlesungen*, wo Polarkoordinaten genannt werden, die Seiten 482 (Jakob Bernoulli) und 780 (Clairaut) sind, mache ich darauf aufmerksam, daß 1735 eine besondere Abhandlung über Polarkoordinaten von J. Hermann veröffentlicht wurde, nämlich *Consideratio curvarum in punctum positione datum projectarum, et de affectionibus earum inde pendentibus* (Comm. acad. sc. Petrop. **4** (1729), 1735, S. 37—46). „Curvam in punctum projicere" bedeutet bei Hermann: eine Kurve auf einen gegebenen Punkt als Pol beziehen; den Radiusvektor nennt er „radius" und den Polarwinkel „angulus projectionis". In den Formeln kommt freilich nicht dieser Winkel selbst vor, sondern Sinus und Cosinus desselben, die er bzw. durch m und n bezeichnet, während der Radiusvektor z heißt. Die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ wird also in diesen Polarkoordinaten

$$m^2z^2 = npz - ap,$$

wenn der Pol auf der Abszissenachse liegt und a der Abstand des Poles von dem Anfangspunkt des rechtwinkligen Koordinatsystems ist.

Da die ganze Abhandlung von HERMANN nur 10 Druckseiten umfaßt und sich ungeachtet des Titels nur teilweise auf die Behandlung von Kurven mittels Polarkoordinaten bezieht, braucht die CANTORsche Angabe nicht wegen meiner Bemerkung modifiziert zu werden. G. ENESTRÖM.

---

3 : 813, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 348. — **3 : 819,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 870—871,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 81—82.

---

3 : 877—878. Es ist mir nicht klar, warum Herr CANTOR so ausführlich über das Verfahren, das J. HERMANN in der Abhandlung *De calculo integrali* auseinandergesetzt hat, berichtet. Aus dem Anfang der Seite 877 könnte man vielleicht glauben, daß Herr CANTOR in erster Linie den Bericht gebracht hat, um seine Behauptung, daß das Integrieren von Differentialgleichungen auch im Zeitraum 1727—1758 als an und für sich erforschungswürdig betrachtet wurde, zu belegen. Aber für diesen Zweck war natürlich eine solche Ausführlichkeit nicht nötig. Meint Herr CANTOR, daß das Verfahren verdient, der Vergessenheit entrissen zu werden (vgl. S. 880 Z. 26—27), so kann ich nicht mit ihm einig sein. Vom mathematischen Gesichtspunkte aus hat ja das Verfahren kaum irgendeinen Wert, da es nur für solche Gleichungen von der Form $du = Pdx + Qdy$, die der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ genügen, paßt, und da es für diesen Zweck unnötig ist, ein so verwickeltes Verfahren zu wählen. In dem von Herrn CANTOR angeführten Beispiel sieht man sofort, daß die Division durch x^5 unnütz ist, und daß man ohne weiteres $R = x$, $\lambda = 0$ setzen kann, so daß $du = dK = d(Mx)$ und $M = Axy^2 + Bx^3y + Cx^5 + N$. Daraus erhält man auf dem von HERMANN angegebenen Wege $A = -3a^2$, $B = 3a$, $C = -1$, $d(xN) = 3a^3y^2dy$, also $xN = a^3y^3$ und folglich

$$u = -3a^2x^2y^2 + 3ax^4y - x^6 + a^3y^3.$$

Allein auch nach dieser Vereinfachung ist das Verfahren wertlos, weil es nur auf einem Umwege dasselbe leistet, das man sofort durch Integration von P in bezug auf x und Bestimmung der dabei auftretenden Funktion von y erhält.

Fast ebenso wertlos ist das HERMANNsche Verfahren vom mathematisch-historischen Gesichtspunkte aus, denn NEWTON hatte ja schon 1671 in der *Methodus fluxionum* (probl. II; *Opuscula*, Lausannae & Genevae 1744, I S. 62) gelehrt, wie man die Integration der vorgelegten Gleichung direkt ausführen soll. Allerdings wurde die *Methodus fluxionum* erst 1736 veröffentlicht, und dieser Umstand ist eigentlich der einzige, der eine Erwähnung des HERMANNschen Verfahrens motivieren könnte. G. ENESTRÖM.

---

3 : 880, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 264—265; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 83. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 348—349. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 265. — **3 : 894,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 349—350; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 89—90 — **3 : 897,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 83. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Kronecker and the Galois theory of equations. On page 323 of volume $\mathbf{10}_3$ of the Bibliotheca Mathematica I stated that Kronecker may have first become acquainted with the Galois theory of equations "during his visit to Paris in 1853 as he mentions Galois' name in a letter to Dirichlet in 1856". This was quoted from J. Pierpont (Bulletin of the Americ. mathem soc. $\mathbf{4}_2$, 1898, p. 340). Pierpont had apparently based his statement on the following definite assertion by H. Weber: „Galois wird von Kronecker zuerst in einem Brief an Dirichlet vom 3. März 1856 und in der Arbeit, die am 14. April 1856 von Kummer der Berliner Akademie vorgelegt wurde, erwähnt, so daß die Vermutung nahe liegt, daß er erst während seines Pariser Aufenthalts im Jahre 1853, wo er mit den bedeutendsten französischen Mathematikern, namentlich mit Hermite und Bertrand, enge Beziehungen anknüpfte, mit Galois' Arbeiten bekannt wurde" (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **2**, 1893, p. 10; Mathematische Annalen **43**, 1893, p. 6). Contrary to this statement by H Weber, the name of Galois and the Galois theory of equations are mentioned by Kronecker in his article *Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen* (Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1853, p. 365). According to H. Weber (Mathematische Annalen **43**, 1893, p. 5), Kronecker handed this article to Dirichlet in May 1853, while he stopped at Berlin on his way to Paris. Dirichlet presented the article to the Berlin Academy on June 20th, 1853. This proves that Kronecker was acquainted with the work of Galois before his residence in Paris in 1853.

Urbana, Illinois. G. A. Miller.

Anfragen.

149. Über die Geschichte der ersten algebraischen Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. Es ist bekannt, daß die erste algebraische Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades von Cardano im 39. Kapitel der *Ars magna* (1545) veröffentlicht wurde, und daß Cardano die Entdeckung seinem Schüler Ludovico Ferrari zuwies („alia est regula ... Ludouici de Ferrarijs, qui eam me rogante inuenit"). Die Glaubwürdigkeit dieser Angabe hat man keinen Grund zu bezweifeln, und aus dem erwähnten Kapitel der *Ars magna* kann man mit großer Wahrscheinlichkeit schließen, daß Cardano durch eine von Giovanno da Coi gestellte Aufgabe den Anlaß bekam, sich mit dieser Frage zu beschäftigen (siehe *Ars magna*, Ausgabe Basel 1570, S. 146: „Fac ex 10 tres partes in continua proportione, ex quarum ductu primae in secundam, producantur 6. Hanc proponebat Ioannes Colla, et dicebat solui non posse, ego uero dicebam, eam posse solui, modum tamen ignorabam, donec Ferrarius eum inuenit").

Ob da Coi selbst Probleme, die auf Gleichungen vierten Grades führen, lösen konnte, weiß man nicht. Nach der soeben zitierten Stelle der *Ars magna* hielt da Coi ein Problem dieser Art für unlösbar, aber nach einem Briefe

Cardanos an Tartaglia vom 5. Januar 1540 (siehe Tartaglia, *Quesiti et inventioni*, Ausgabe Venedig 1606, S. 275) behauptete da Coi, er könne ein Problem lösen, das auf die Gleichung $100x = 8(1 + x + x^2)^2$ führt, und er wisse, daß ein Problem, das auf die Gleichung $100x = 7(1 + x^2)^2$ führt, lösbar sei.

Es wäre erwünscht, nähere Auskunft über die mathematischen Kenntnisse da Cois zu bekommen. Wer war der „Messer Phileno da Bologna", der nach dem oben zitierten Briefe Cardanos ein Lehrer Da Cois gewesen war? Und deuten die mathematischen Kenntnisse Da Cois darauf hin, daß Gleichungen vierten Grades schon vor Ferrari (durch Scipione del Ferro?) algebraisch gelöst worden sind?

G. Enestrom.

---

150. Über die älteste Geschichte der sogenannten Simpsonschen Annäherungsformel. Bekanntlich hat J. Gregory in seinen *Exercitationes geometricae* (London 1668, S 25—26) eine Formel angegeben, die mit der sogenannten Simpsonschen Annäherungsformel für die Fläche eines von drei Geraden und einer Kurve begrenzten Vierecks identisch ist. Nach R. Baltzer (*Die Elemente der Mathematik*, Band 2, siehe z. B. die 2. Auflage, Leipzig 1867, S. 246) ist diese Formel noch älteren Ursprungs; Perelli soll nämlich im Anhang zu Guido Grandi, *Instituzioni delle sezioni coniche* (Firenze 1744) auf eine Stelle bei Torricelli hingewiesen haben, wo sich eine Regel für die Berechnung des Volumens eines Umdrehungskörpers finde, welche Regel durchaus mit der Simpsonschen Formel übereinstimme. Indessen ist diese Angabe meines Wissens noch nicht durch einen genauen Beleg bestätigt worden. Auch nicht A. Aubry, der sich besonders mit der Geschichte der angeblichen Torricellischen Regel beschäftigt hat (siehe *Notice historique sur la géométrie de la mesure*, Journ. des mathém. élém. **21**, 1897) ist in der Lage gewesen, bei Torricelli selbst die betreffende Stelle aufzufinden.

Kommt wirklich bei Torricelli eine Regel vor, die mit der Simpsonschen Formel übereinstimmt?

G. Enestrom.

Rezensionen.

Stadtbibliothek Frankfurt am Main. Katalog der mathematischen Abteilung. Frankfurt a. M. 1909. X + 327 S. 8^0.

Im Vorwort des Kataloges wird über die Geschichte der mathematischen Abteilung der Bibliothek kurz berichtet. Schon 1817 hatte die Bibliothek durch ein Legat eine sehr wertvolle Sammlung älterer mathematischer Werke bekommen, aber seit dem Jahre 1830 wurden eigentlich keine mathematischen Bücher gekauft. Allerdings erhielt die Bibliothek 1896 durch das Geschenk der „Gustav Freytag-Bibliothek" eine größere Zahl von älteren, zum Teil sehr seltenen astronomischen und mathematischen Schriften, allein erst 1905—1908 konnte die eigentliche Begründung der mathematischen Abteilung beginnen, nachdem die städtischen Behörden für diesen Zweck eine Summe von 60000 M. bewilligt hatten. Die Auswahl der Anschaffungen sowie die Bearbeitung des seit zwei Jahren im Druck vorliegenden Kataloges ist von Bibliothekar P. Hohenemser besorgt worden.

Für die Frankfurter Mathematiker sind natürlich die neuen Anschaffungen das Wichtigste, und sie können damit zufrieden sein, denn die moderne mathematische Literatur ist in der Bibliothek recht gut vertreten; besonders hervorzuheben ist die große Sammlung von mathematischen Zeitschriften. Auch die wichtigsten der älteren mathematischen Werke sind vorhanden, so daß ein Frankfurter Historiker der Mathematik im allgemeinen die Schriften, die er braucht, in der Bibliothek zur Verfügung bekommen kann. Selbstverständlich werden sowohl die Mathematiker wie die Historiker die Veröffentlichung des Kataloges mit Freuden begrüßen.

Allein auch für die Historiker der Mathematik, die zu weit von Frankfurt a. M. wohnen, um die Bibliothek benutzen zu können, ist der Druck des Kataloges sehr willkommen, denn sie finden darin wertvolle Notizen über sonst unbekannte oder wenig bekannte mathematische Bücher, vorzugsweise aus dem 16. Jahrhundert. Als Beleg verzeichne ich hier unten die vor 1600 erschienenen Rechenbücher, die nicht von D. E. Smith in seinen *Rara arithmetica* (1908) erwähnt werden, aber in der Frankfurter Stadtbibliothek vorhanden sind. Da Smith alle ihm zugänglichen Notizen über Rechenbücher aus dem 16. Jahrhundert mit großem Fleiß gesammelt hat, müssen die hier unten verzeichneten Schriften als sehr selten bezeichnet werden.

J. Furst, *Compendiosa ars numerandi.* Wien 1520. [Smith erwähnt nach ungenannter Quelle einen „Novus algorithmus" desselben Verfassers aus dem Jahre 1512.]

J. Schlichtung, *Rechnung mit der Federen und uff der Linien uff die Reinströmisch und Schilling in Gold, Müntz, uff allerley Kauffmanns Händel mit der falschen Regelen.* Straßburg 1536.

Ch. Stiltz, *Eyn neu Rechenbuch . . . itzunt von newem zusamen getragen.* Straßburg 1542.

M Hoff, *Ein kunstlich Rechenbiechlin mit der Ziffer und Zallpfenningen.* Freiburg im Breisgau 1543.

G. Stichel, *Arithmetica, wolgegründte Rechnung mit schöner forteiliger Anweisung zusamenbracht.* Leipzig 1551.

M Stötter, *Ein schön nutzlich Rechenbüchlin auff allerlei Kauffmans Rechnung.* Tübingen 1552.

D. Schedel, *Ein nutzbar new Rechen und Exempel Büchlein, darinnen all jetz gebreuchig Kauffmans Rechnungen, Vergleichung mancherley Landt und Stett, Eln Mass, Mintz und Gewicht gantz klar und verstendtlich. Sampt einer zu ruck darauff nachfolgenden Erklärung, wie man die Keuff hierinnen verstehen und machen soll.* Nürnberg 1552.

N. Henning, *Gerechnet Rechenbüchlein von aller handt fürnembsten Gewerben und Kauffmans Waren.* Frankfurt am Main 1565.

J. Kaltenbrunner, *Ein newgestellt künstlich Rechenbüchlein, darinnen alle yetztgebreuchiche Kauffmans, auch andere Rechnungen . . . begriffen.* Nürnberg 1565.

N. Werner, *RechenBuch von allerley Kauffmannschlag auff sonderlichen Vorthel der Regel Detri gantz verständiglich und mit gnugsamer Erklärung bey jedem Exempel.* Frankfurt am Main 1569.

Auch inbetreff der von Smith aufgeführten Rechenbücher kann man aus dem Katalog wertvolle ergänzende Notizen bekommen. So z. B. besitzt die Frankfurter Bibliothek folgende von Smith nicht erwähnte Auflagen.

J. Albert, *Rechenbüchlein auff der Federn . . . inn Gantzen und Gebrochen, neben angehefftem, unlangst ausgelassnem Büchlein auf den Linien.* Wittenberg 1546. [Smith erwähnt keine Auflage zwischen 1541 und 1553.]

J. Segkerwitz, *Rechenbüchlein auff allerley Hanthierung. Auffs new gebessert.* Leipzig 1548. [Smith erwähnt nach ungenannter Quelle eine einzige Auflage (von 1574); in der Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 268, 278 habe ich frühere Auflagen von 1547 und 1557 zitiert.]

H. Gülfferich, *Ein new kurtz Rechenbüchlein auff der Linien und Federn, den angehenden Rechnern unnd allen Kauffshendelern zu gut und nutz . . . . zum anderen mal gemehret unnd gebessert.* Frankfurt am Main 1561. [Smith erwähnt keine Auflage zwischen 1559 und 1568.]

A. Lonicer, *Arithmetices brevis introductio ab autore de integro recognita.* Francoforti 1563. [Smith erwähnt keine Auflage zwischen 1551 und 1568.]

B. Salignac, *Tractatus arithmetici partium et alligationis.* Frankfurt a M. 1575. [Smith erwähnt die erste Auflage unter 1577 und betrachtet die Auflage 1575 als verdächtig.]

L. Lossius, *Arithmetices erotemata puerilia . . . jam vero diligenter recognita et aucta.* Francoforti 1563; Francoforti 1589. [Smith erwähnt keine Auflage zwischen 1562 und 1568, und die späteste von ihm zitierte Auflage ist vom Jahre 1585.]

Der Katalog hat 12 Hauptabteilungen, nämlich: I. Enzyklopädie, Geschichte und allgemeine Literatur der exakten Wissenschaften. II. Mathematische Zeitschriften. III. Gesammelte Werke von Mathematikern. IV. Enzyklopädie, Geschichte und allgemeine Literatur der Mathematik. V. Elementarmathematik. VI. Arithmetik und Algebra. VII. Höhere Analysis. VIII. Höhere Geometrie.

IX. Angewandte Mathematik. X. Physik und theoretische Mechanik. XI. Technische Mechanik. XII. Astronomie Die meisten Hauptabteilungen sind weiter eingeteilt. Am Ende befindet sich ein Nominalkatalog mit gekürzten Titeln (90 zweispaltige Druckseiten).

Gegen das Einteilungssystem habe ich nichts Wesentliches zu bemerken, sofern man sich auf die moderne mathematische Literatur beschränkt. Dagegen bezweifle ich, daß das System für die ältere Literatur das passendste ist. Beispielsweise muß man die älteren Rechenbücher teils S. 53—63 („Elementarmathematik. 2—3. Lehrbücher der niederen Arithmetik und Algebra"), teils S. 113—116 („Angewandte Mathematik. 1. Kaufmännische Arithmetik") suchen, obgleich es unmöglich ist, eine solche Einteilung konsequent durchzuführen. Als Beleg für diese Behauptung verweise ich auf das Rechenbuch von J. Widman, das S. 116 unter „Kaufmännische Arithmetik" steht, und zwar nicht ganz mit Unrecht; anderseits ist dies Buch ebensosehr ein gewöhnliches Rechenbuch und als solches von großem historischen Interesse. Überhaupt bin ich der Ansicht, daß die ältere Literatur besonders verzeichnet werden sollte, wenn sie so wertvoll wie die der Stadtbibliothek in Frankfurt am Main ist, und wenn der Katalog, wie hier der Fall ist, mit einem alphabetischen Nominalverzeichnis versehen ist. Wie diese Literatur eingeteilt werden sollte, will ich an dieser Stelle nicht auseinandersetzen, sondern begnüge mich, zu bemerken, daß meiner Ansicht nach die ganze reine Mathematik eine einzige Abteilung bilden könnte, und daß eine chronologische Anordnung vielleicht zu empfehlen wäre.

Auf die Klassifikation der Werke werde ich auch nicht näher eingehen. Wie schwierig es ist, ein an sich gutes System in der Praxis anzuwenden, weiß jeder Bibliograph der Mathematik, und weitere Belege kann man ohne Mühe im Kataloge der Stadtbibliothek in Frankfurt am Main finden. Ein wenig auffällig ist es jedenfalls, wie schwierig es zuweilen gewesen zu sein scheint, in gleichartigen Fällen ein und dasselbe Prinzip durchzuführen. Beispielsweise steht die Originalausgabe (1745) des Briefwechsels zwischen Leibniz und Johann Bernoulli S. 28 unter „Gesammelte Werke von Mathematikern", während der von Gerhardt 1899 herausgegebene 1. Band des *Briefwechsels von Leibniz mit Mathematikern,* dessen Fortsetzung selbstverständlich den Briefwechsel mit Bernoulli enthalten haben würde, S 42 unter „Enzyklopädie, Geschichte und allgemeine Literatur der Mathematik. 2. Geschichte und Biographisches" zu suchen ist. Ebenso stehen die *Récréations mathématiques et physiques* Ozanams S. 13 unter „Allgemeine Literatur der exakten Wissenschaften", obgleich es S. 49—50 eine besondere Abteilung für „Vermischte Unterhaltungen und Spiele" gibt. Beruht dies vielleicht auf den Worten „et physiques" des Titels? Aber die Abteilung S. 49—50 enthält ja eine Schrift mit dem Titel: Physicarum meditationum ... lib. V".

Stockholm. G. Enestrom.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ahrens, 100.
Amodeo, 50.
André, 98.
Archibald, 11, 67.
Archimedes, 25.
Batelli, 16.
Biedenkapp, 74.
Billy, 55.
Bjelopolskij, 90.
Bosmans, 39, 41, 52, 64, 102.
Böttcher, 10.
Boutroux, 37.
Braytzeff, 97.
Buchka, 2.
Cabreira, 78.
Cajori, 16, 48.
Cantor, 8.
Castelnuovo, 6.
Ceretti, 28.
Dannemann, 17.
Decourdemanche, 18.
Duhem, 32, 34.
El-Biruni, 30.
Eneström, 3, 7, 33, 63.
Favaro, 42, 44, 45.
Frankland, 12.
Galilei, 44.
Galitzin, 86.
Gambioli, 14, 16.
Geer, 56.
Gerbert, 29.
Gravelaar, 47.
Guimarães, 20.
Günther, 43.
Hammer, 40.
Heath, 26.
Heiberg, 25.
Hensel, 75—77.
Heriger von Lobbes, 29.
Isely, 62.
Jolles, 95.
Jouguet, 15.
Klug, 46.
Korda, 72.
Krazer, 61.
Krienelke, 66.
Kucharzewski, 58, 59.
Kummer, 76.
Lampe, 5.
Lebon, 80—82.
Lind, 53.
Löffler, 21.
Lorey, 99.
Loria, 4, 13.
Lüroth, 95.
Mach, 14.
Maire, 54.
Mansion, 70, 73.
Mascart, 19.
Mikami, 60, 69.
Milloševich, 90.
Milone, 92.
Müller, Felix, 36.
Nitz, 13.
Omont, 29.
Poincaré, 83.
Possé, 87.
Ratti, 35.
Rivaud, 57.
Rosselet, 85.
Rudio, 102.
Russell, 49.
Schaewen, 55.
Schultz, 22, 23.
Schütte, 13.
Smith, 38.
Stäckel, 65
Stadler, 2.
Stamper, 9.
Strunz, 27.
Sudhoff, 2.
Suter, 30.
Szabó, 71.
Torelli, 84.
Weinmeister, Paul, 96.
Whittaker, 51.
Wiedemann, 31.
Zeuthen, 24.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
29 (1910). — Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers. — [Rezension des Heftes 28:] Arch. der Mathem. 17_2, 1910, 223—224. (K. Knopp.)

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von Buchka, H. Stadler, K Sudhoff. Leipzig. 8°. [2
3 (1910/11): 1.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [3
11_3 (1910/11): 1.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [4
12 (1910): 3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [5
39 (1908): 1. — Die Seiten 1—55 enthalten Referate der im Jahre 1908 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 6—11 Aprile 1908). Pubblicati per cura di G. Castelnuovo (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 45. (E. Jahnke.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 12 (1910), 84—85. (G. L.) [6

Eneström, G., Über Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung. [7
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 1—10.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 81—82. (G. Eneström.) — 3^3 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 83—90. (G. Eneström.) [8

Stamper, A. W., A history of elementary geometry (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 59—60. (H. Wieleitner.) [9

Böttcher, J. E., Beweise für die Heronsformel aus zwei Jahrtausenden (1909) [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 62. (W. Weber.) [10

Archibald, R. C., Discussion and history of certain geometrical problems of Heraclitus and Apollonius. [11
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings 28, 1909/10, 152—178.

***Frankland, W. B.,** Theories of parallelism. An historical critique. Cambridge, University press 1910. [12
8°. XVII + 70 S. — [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 37. (F. Engel.)

Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. Schütte. Aufl. 2. I (1910). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 224—225. (H. Wieleitner.) [13

***Mach, E.,** I principii della meccanica esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo. Traduzione di D. Gam-

BIOLI. Roma, Soc. ed. Dante Alighieri 1909. [14
8°. — [6 lire] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 85—87. (G. VAILATI.)

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. II (1909). [Rezension] Revue génér. d. sc. **20**, 1909, 926. [15

***Cajori, F.,** Storia della fisica elementare con l'evoluzione dei laboratori fisici. Tradotto in italiano da D. GAMBIOLI. Con tre appendici: sull' Accademia del Cimento, sui fisici matematici e sui fisici italiani dei tempi recenti. Riveduta da A. BATELLI. Bologna, Zanichelli 1909. [16
8°, VIII + 480 S. — [12 lire] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 88. (G. L.)

Dannemann, F., Aus der Werkstatt großer Forscher. Aufl. 3 (1908). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 215. (P. B. FISCHER.) [17

Decourdemanche, J. A., Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 221—222. (E. HOPPE.) [18

Mascart, J., La détermination des longitudes et l'histoires des chronomètres. [19
L'horloger 1910. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 654—659. (H. BOSMANS.)

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal. Ed. 2 (1909). [Rezension] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief 9_2, 1910, 316—317. (S^e.) [20

b) Geschichte des Altertums.

Löffler, E., Die arithmetischen Kenntnisse der Babylonier und das Sexagesimalsystem. [21
Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 135—144.

Schultz, W., Das Zahlen- und Maßsystem der Babylonier. [22
Österreichische polytechnische Zeitschr. 1910, 186—191.

Schultz, W., Angewandte Mathematik im hellenischen Altertume. [23
Österreichische polytechnische Zeitschr. 1910. 20 S. 8°.

Zeuthen, H. G., Notes sur l'histoire des mathématiques. VIII. Sur la constitution des livres arithmétiques des éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité. [24
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1910, 395—435.

Archimedis Opera omnia. Iterum edidit J. L. HEIBERG. I (1910). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 235—236. (E. HOPPE.) — Mathesis 10_3, 1910, 240. (P. M.) [25

Heath, Th. L., Diophantus of Alexandria. A study in the history of greek algebra. Second edition. With a supplement containing an account of Fermats theorems and problems connected with Diophantine Analysis and some solutions of Diophantine problems by Euler. Cambridge, University press 1910. [26
8°, VI + (1) + 387 S. — [12½ Sh.]

c) Geschichte des Mittelalters.

Strunz, F., Geschichte der Naturwissenschaften im Mittelalter (1910). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau **25**, 1910, 543. (F. M.) [27

Ceretti, U., Intorno allo zero. [28
Udine, Accademia, Atti 14_3, 1908.

Omont, H., Opuscules mathématiques de Gerbert et de Hériger de Lobbes (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 648—649. (H. BOSMANS.) [29

Suter, H., Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abū'l-Raihan Muh. el-Bīrūnī. Übersetzt und mit Kommentar versehen. [30
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 11—78.

Wiedemann, E., Zu Ibn el Haitams Optik. [31
Archiv für die Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik **3**, 1910/11, 1—53.

Duhem, P., La physique néoplatonicienne au moyen-âge. [32
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 10—60, 385—430.

Eneström, G., Sätze über ebene gemischtlinige Figuren im Mittelalter. [33
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 90. — Anfrage.

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. II (1909). [Rezension] L'enseignement mathém. **12**, 1910, 536—539. (A. BERNOUD.) [34

Ratti, A., L'applicazione del pendolo al meccanismo degli orologi nei disegni di Leonardo da Vinci. [35
Raccolta Vinciana (Milano) **6**, 1910, 131—133.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Müller, Felix, Über die ältesten mathematischen Druckwerke (1482—1550) in der Stadtbibliothek zu Frankfurt am Main. (Schluß.) [36
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **19**, 1910, *197—225*, *253*.

Boutroux, P., Les origines du calcul des probabilités (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 95. [37

Smith, D. E., A note on Johannes Schonerus. [38
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 79—80.

Bosmans, H., L'algèbre de Pedro Nuñez (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 96. [39

Hammer, E., Pedro Nuñes. [40
Zeitschr. für Vermessungswesen **38**, 1909, 177—184. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 651—653.

Bosmans, H., La „Practicqve om te leeren cypheren" de Nicolas Petri de Deventer (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 95—96. [41

Favaro, A., Per la storia del compasso di proporzione (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 95. [42

Günther, L., Die Mechanik des Weltalls. Eine volkstümliche Darstellung der Lebensarbeit Johannes Keplers (1909). [Rezension:] Zeitschr. für Mathem. **58**, 1909/10, 208. [43

Le opere di Galileo Galilei. XX (1909). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 91—93. (G. Enestrom.) [44

Favaro, A., Galileo Galilei. Pensieri, motti e sentenze (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **31**, 1910, 3149. (J. Klug.) [45

Klug, J., Die Galilei-Ausgaben. [46
Deutsche Literaturz. **31**, 1910, 3013—3022.

Gravelaar, N. L. W. A., Over den oorsprong van ons maalteeken (×). [47
Wiskundig tijdschrift **6**, 1910, 1—25. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_2, 1910, 649—651. (H. Bosmans)

Cajori, F., A history of the logarithmic slide rule and allied instruments (1909). [Rezension:] Science 32_2, 1910, 666—668. (L. C. Karpinski.) [48

Russell, A., The invention of the slide rule. Nature **82**, 1909, 307—308. [49

Amodeo, F., Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche (1909). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 94—95. [50

***Whittaker, E. T.,** A history of the theories of aether and electricity from the age of Descartes to the close of the nineteenth century. London, Longmans 1910. 8°. — [12½ sh.] [51

Bosmans, H., La carte lunaire de Michel-Florent van Langren, conservée à l'observatoire de Paris. [52
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 653—654.

Lind, B., Über das letzte Fermatsche Theorem (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **31**, 1910, 2742—2743. (E. Netto.) [53

Maire, A., Essai d'introduction à la bibliographie des trauvaux scientifiques de Blaise Pascal, de leur critique et de leur jugement. [54
Assoc. franç pour l'avancement des sciences, Comptes rendus 38 (congrès de Lille), 1909, 71—79.

Schaewen, P. von, Jacobi de Billy, Doctrinae analyticae inventum novum (1910). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 222—223. (E. Hoppe.) [55

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. VIII. [56
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 9_3, 1910, 201—230.

Rivaud, A., La préparation du catalogue critique et chronologique des œuvres de Leibniz. [57
Journ. des savants 1906, 370—389, 431—441.

Kucharzewski, F., Statyka Kochańskiego. [58
Sprawozdania z posiedzeń towarzystwa naukowego Warszawskiego 1910, 321—339.

Kucharzewski, F., De momentis gravium. Une question de statique débattue au XVIIe siècle. [59
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 584—590.

Mikami, Y., On the dutch art of surveying as studied in Japan. [60
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 9_3, 1910, 301—304.

Krazer, A., Zur Geschichte des Umkehrsproblemes der Integrale (1909). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 94. [61

Isely, L., Léonard Euler. [62
Neuchatel, Soc. d. sc., Bulletin **36**, 1908/9, 57—65.

Eneström, G., Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. I (1910). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 36—37. (W. Ahrens.) — *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 663—664. (H. Bosmans.) [63

Bosmans, H., Sur une tentative d'édition des oeuvres complètes de L. Euler faite à Bruxelles en 1859 (1909). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 94. [64

Stäckel, P., Johann Albrecht Euler (1910). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 664—666. (H. Bosmans) [65

Krienelke, K., J. H. Lamberts Philosophie der Mathematik (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 65. (F. Weiss.) [66

Archibald, R. C., Historical note on Wallace's line. [67
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings **28**, 1909/10, 64, 179.

Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. I. Pure mathematics (1908). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 232—233. (E. Lampe.) [68

Mikami, Y., On a japanese astronomical treatise based on dutch works. [69
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 9_3, 1910, 231—234.

Mansion, P., Gauss contre Kant sur la géométrie non Euclidienne (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 95. [70

Szabó, P., [Johann Bolyais Jugend]. [71
Mathematikai eś physikai lapok (Budapest) **19**, 1910, 135—164. — Ungarisch.

Korda, D., [Die Gedächtnisfeier Evariste Galois']. [72
Mathematikai eś physikai lapok (Budapest) **19**, 1910, 183—191. — Ungarisch.

Mansion, P., Sur la légende de Galois. [73
Bruxelles, Soc. scient., Annales **34**: 1, 1910, 104—105.

Biedenkapp, G., Sophie Germain (1910). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 48. (E. Jahnke.) [74

Hensel, K., Gedächtnisrede auf Ernst Eduard Kummer. [75
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **29**, 1910, 1—37 + Porträt.

Hensel, K., Briefe Ernst Eduard Kummers an seine Mutter und an Leopold Kronecker. [76
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **29**, 1910, 39—103.

Hensel, K., Ernst Eduard Kummer und der große Fermatsche Satz. Marburg, Elwert 1910. [77
Marburger akademische Reden Nr. 23.

Cabreira, A., Les mathématiques en Portugal. Deuxième réponse (1910). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 84—85. (W. Ahrens.) [78

Emil Lampe. [79
Arch. der Mathem. 17_3, 1910, Heft 2/3. — Nur Porträt.

Lebon, E., Gaston Darboux (1910). [Rezension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief 9_3, 1910, 319. (S[e].) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 82. (G. L.) — Deutsche Literaturz. **31**, 1910, 2892—2893. (E. Lampe.) [80

Lebon, E., Emile Picard (1910). [Rezension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief 9_3, 1910, 320—321. (Kl.) — Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 48. (E. Jahnke.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 82—83. (G. L.) — Deutsche Literaturz. **31**, 1910, 2892—2893. (E. Lampe.) — L'enseignement mathém. **12**, 1910, 541. [81

Lebon, E., Henri Poincaré (1909). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 81—82. (G. L.) — Deutsche Literaturz. **31**, 1910, 2892—2893. (E. Lampe.) — Revue génér. d. sc. **21**, 1910, 73. [82

e) Nekrologe.

Anatole **Bouquet de la Grye** (1827—1909). [83
Paris, Bureau des longitudes, Annuaire 1911, C 1—13. (H. Poincaré.)

Alfredo **Capelli** (1855—1910). [84
Il bollettino di matematica **9**, 1910, 1—10. (G. Torelli.)

Henri **Dufour** (1852—1910). [85
Schweizerische naturf. Ges., Verhandl. **93** (1910), Nekrologe 1—15 [mit Porträt und Schriftenverzeichnis]. (A. Rosselet.)

Friedrich **Kohlrauch** (1840—1910). [86
St. Petersburg, Acad. d. sc., Bulletin 1910, 187—188. (B. Galitzin.)

Alexander **Korkin** (1837—1908). [87
Moskwa, Matem. obchtch., Sbornik **27**, 1909, 1—27. (K. A. Possé.)

Maurice **Lévy** (1838—1910). [88
L'enseignement mathém. **12**, 1910, 531—532. — Nature **84**, 1910, 502.

Jakob **Lüroth** (1844—1910). [89
L'enseignement mathém. **12**, 1910, 532.

Simon **Newcomb** (1835—1909). [90
Roma, Accad. d. Lincei, Rendic. 18_5 : 2, 1909, 409—414. (E. Millosevich.) — *St. Petersburg*, Acad. d. sc., Bulletin 1909, 1013—1014. (A. A. Bjelopolskij.) — Americ. journ. of science **28**, 1909, 290—292.

Eugène **Rouché** (1832—1910). [91
Mathesis 10_3, 1910, 241—242.

Francesco **Siacci** (1839—1907). [92
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti **39**, 1909. 10 S. (F. Milone.)

Washington Irving **Stringham** (1857—1909). [93
In memoriam Irving Stringham. Berkeley 1910.

Thorvald Nicolai **Thiele** (1838—1910). [94
Nature **84**, 1910, 503.

Julius **Weingarten** (1836—1910). [95
Berlin, Mathem. Ges., Sitzungsber. **10**, 1910, 8—14 [mit Schriftenverzeichnis]. (St. Jolles.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 65—70. (J. Lüroth.)

Philipp **Weinmeister** (1848—1910). [96
Zeitschr. für mathem. Unterr. **41**, 1910, 618—623 [mit Porträt]. (Paul Weinmeister.)

Georgij **Woronoj** (1868—1908). [97
Warszawa, [Naturwiss. Ges., Berichte] 1909, 1—18. (I. Braytzeff.)

f) Aktuelle Fragen.

André, D., Des notations mathématiques (1909). [Rezension.] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 85—86. (W. Ahrens.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 78—81. (G. L.) [98

Lorey, W., Die mathematischen Wissenschaften und die Frauen (1909). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1910, 69. (E. Kullrich.) [99

Ahrens, W., Latein oder Deutsch? Die „Sprachenfrage" bei der Herausgabe der Werke Leonhard Eulers (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1910, 83—84. (G. L.) [100

Bericht der Schweizerischen Euler-Kommission für das Jahr 1909/10. [101
Schweizerische naturf. Gesellsch., Verhandl. **93** (1910) : 2, 46—51. — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **19**, 1910, *194—196*.

[Die Euler Ausgabe]. [102
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 18_3, 1910, 659—663. (H. Bosmans.) — Schweizerische naturf. Gesellsch., Verhandl. **93** (1910) : 1, 349—351. (F. Rudio.)

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Königsberg 1910.] [103
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **19**, 1910, *245—252*. — L'enseignement mathém. **12**, 1910, 519—522. — Naturwiss. Rundschau **25**, 1910, 581—583. (K. Nitz.)

[Englische Mathematiker-Versammlung in Sheffield 1910.] [104
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1910, 105—106. — L'enseignement mathém. **12**, 1910, 516—518. — Nature **84**, 1910, 513—517.

[Französische Mathematiker-Versammlung in Toulouse 1910.] [105
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1910, 106—107.

[Schweizerische Mathematiker-Versammlung in Basel 1910.] [106
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **19**, 1910, *225—226*. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1910, 155—156. — L'enseignement mathém. **12**, 1910, 522—528.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor R. J. Aley in Bloomington zum Präsidenten der Universität von Maine.

— Dr. H. Batemann in Cambridge (England) zum Professor der Mathematik am „Bryn Mawr college".

— „Instructor" W. H. Bates in Lafayette zum Professor der Mathematik an der „Purdue university" daselbst.

— Privatdozent O. von Baeyer in Berlin zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor H. A. Converse in Elkins, W. Va., zum Professor der Mathematik am „Baltimore polytechnic institute".

— Professor A. Einstein in Zürich zum Professor der mathematischen Physik an der deutschen Universität in Prag.

— Privatdozent P. Eversheim in Bonn zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor J. B. Faught in Marquette zum Professor der Mathematik an der „State normal school" in Kalamazoo, Mich.

— D. V. Guthrie in Charlotteville zum Professor der Physik an der Universität von Virginia daselbst.

— Professor L. Heffter in Kiel zum Professor der Mathematik an der Universität in Freiburg i. Br.

— Dr. F. T. H'Doubler zum Professor der Mathematik an der „Miami university".

— Professor F. H. Hodge in Fairfield zum Professor der Mathematik am „Franklin college" in Franklin, Ind.

— Ingenieur J. Jouguet zum Professor der Mathematik an der „Ecole nationale des mines" in Paris.

— Privatdozent P. Köbe in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Universität in Leipzig.

— Professor H. Liebmann in Leipzig zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in München.

— Dr. A. C. Lunn in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— „Instructor" E. B. Lytle in Urbana zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois daselbst.

— Professor E. Mathias in Toulouse zum Professor der Physik an der Universität in Clermont.

— Professor J. F. Messick in Ashland, Va., zum Professor der Mathematik an der Universität von Georgia.

— „Instructor" W. J. Risley in Cambridge (Mass) zum Professor der Mathematik an der „Milliken university".

— Observator E. Rosenthal in Tiflis zum Professor der Geophysik an der Universität in Warschau.

— Professor R. A. Sampson in Durham zum Professor der Astronomie an der Universität in Edinburg und „Astronomer Royal for Scotland".

— Konservator A. Schaum in München zum Direktor der Meteorologischen Zentralanstalt daselbst.

— Miß Ida M. Schottenfels in Chicago zum Professor der Mathematik an der „Toledo university".

— Dr. E. W. Sheldon in New Haven zum Professor der Mathematik an der Universität von Alberta.

— Privatdozent H. Tietze in Wien zum Professor der Mathematik an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

— Dr. J. N. van der Vries in Lawrence zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas daselbst.

— Privatdozent G. Wallenberg in Berlin zum Dozenten an der Technischen Hochschule daselbst.

Todesfälle.

— Robert Geigel, Professor der Physik und Geodäsie an der Forstlichen Hochschule in Aschaffenburg, geboren in Würzburg den 13. März 1856, gestorben im Oktober 1910.

— Désiré Jean Baptiste Gernez, Emeritierter Professor der Physik an der „Ecole centrale des arts et manufactures" in Paris, geboren in Valenciennes den 24. April 1834, gestorben im November (?) 1910.

— Siegmund Gundelfinger, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Darmstadt, geboren in Kirchberg an d. Jaxt den 17. Januar 1846, gestorben in Darmstadt den 12. Dezember 1910.

— Jules Tannery, Subdirektor der „Ecole normale" in Paris, geboren in Mantes den 24. März 1848, gestorben in Paris den 11. November 1910.

— Domenico Tessari, Professor der Mechanik am „Reale museo industriale" in Turin, geboren in Triest den 5. August 1837, gestorben in Turin den 28. November 1909.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Ann Arbor hat Professor L. C. Karpinski für das akademische Jahr 1910/11 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Istituto Lombardo di scienze e lettere in Milano.* Premio di fondazione Cagnola 1911. Esposizione storico-critica dei fatti sperimentali, sui quali si basa la moderna teoria della costituzione della materia.

Mathematikerversammlungen im Jahre 1910.

— *Deutsche Mathematikervereinigung.* Die Jahresversammlung fand zu Königsberg 18.—22. September statt. Vorträge historischen Inhalts wurden gehalten von J. Sommer („Bessel als Mathematiker"), A. Wangerin („Franz Neumann als Mathematiker") und A. Witting („Mitteilungen über einige Manuskripte Newtons"). Andere Vorträge wurden gehalten von R. Fueter, D. Hilbert, A. Haar, P. Köbe, E. Müller, F. Meyer, H. Liebmann, L. Bieberbach, F. Engel, E. Papperitz, A. Schönflies, O Töplitz, H Weyl und A. Sommerfeld. In der Geschäftssitzung wurde wie gewöhnlich über die literarischen Unternehmungen der Vereinigung berichtet.

Vermischtes.

— In Calcutta ist kürzlich eine mathematische Gesellschaft gegründet worden. Die Gesellschaft hat schon begonnen, ein Bulletin of the Calcutta mathematical society herauszugeben.

Eine arabische Schrift über die Parabel und parabolische Hohlspiegel.

Von J. L. Heiberg in Kjöbenhavn und E. Wiedemann in Erlangen.

In einem 1548 von Gogava publizierten und zu Löwen gedruckten Werk ist ein Teil einer Schrift über die parabolischen Hohlspiegel enthalten. Das Buch ist ziemlich selten, den Bemühungen des verstorbenen Professor Delsaulx in Löwen verdanken wir die Auffindung eines Exemplares in der dortigen Stadtbibliothek, das uns dann in liebenswürdigster Weise zur Benützung zur Verfügung gestellt wurde. Ein weiteres Exemplar besitzt die Kgl. Bibliothek zu Berlin.

Der vollständige Titel lautet:

CL. PTOLEMAEI | Pelusiensis Mathematici | OPERIS QUADRIPARTI- | TI, IN LATINUM SERMONEM | TRADUCTIO: | Adiectis libris posterioribus, | ANTONIO GOGAVA GRAVIENS. | INTERPRETE. | Ad Clarissimum Principem MAXIMILIANVM | Comitem BVRENS | Item, DE SECTIONE CONICA, | Orthogona, quae parabola dicitur: Deque Speculo | Vstorio, Libelli duo, hactenus desiderati: | restituti ab ANTONIO GOGAVA | GRAVIENSI. | Cum praefatione D. Gemmae Frisii, Medici | & Mathematici clariss. | CVM GRATIA ET PRIVIL: | LOVANII | Apud Petrum Phalesium, ac Martinum Rotarium | Anno M. D. XLVIII | Mense Octobri.

Dem Werk ist eine Empfehlung von dem Arzte Gemma Frisius[1]) vorausgeschickt, die sich zunächst auf die Übersetzung des *Opus quadripartitum* bezieht, das erst jetzt teils durch die Bemühungen von Camerarius, teils durch diejenigen von Antonius Gogava Graviensis ins Lateinische vollständig übersetzt sei. Weiter meint er, würde es dem Leser nicht weniger angenehm sein, die hinzugefügten und sorgfältigen Werke, die nicht nur eine nützliche und angenehme, sondern, da die „Elementa conica“

1) Zu Gemma Frisius (geb. 1508 zu Dokum in Friesland und gest 1555 zu Löwen) vgl. M. Cantor, *Gesch. der Math.*, 2. Aufl., Bd. 2, S. 410. Gemmas Hauptverdienst ist, die ersten Vorschriften zu einer wirklichen Triangulation gegeben zu haben.

von Apollonius nicht vorhanden sind, auch eine zurzeit für die Optik notwendige Erörterung enthalten.

Daran schließt sich die an Maximilian de Egmont[1]) gerichtete allgemeine Vorrede Gogavas, in der er unter anderem berichtet, daß Camerarius wegen besonderer Schwierigkeiten die letzten Bücher des *Opus quadripartitum* nicht übersetzt habe. Er selbst habe dies getan. Außer zweien habe er die älteren Übersetzungen nicht benützen können, da sie nicht nach dem Griechischen, sondern nach dem Arabischen gemacht seien. Er habe die Sache so gut als möglich ausgeführt; auch habe seine Arbeit der Mathematiker und Arzt Dr. Gemma Frisius sowie Adrianus Hegius, der in dieser vielseitigen Lehre von den „Apotelesmata" ergraut sei, gebilligt. Er habe noch kleine Schriften über die Kegelschnitte, nämlich die Parabel und den Brennspiegel, beigefügt, die sicher den emsigen und gelehrten Mathematikern Vergnügen bereiten würden, und die, da zurzeit die „conica elementa" von Apollonius nicht vorhanden seien, nötig seien usw.

Hieran reiht sich ein kurzes Lobgedicht auf Gogava von Carolus Langius.

Das Werk enthält, wie aus dem Titel hervorgeht, 1. eine lateinische Übersetzung des *Opus quadripartitum* von Cl. Ptolemaeus von Gogava; 2. und 3. eine Schrift über den rechtwinkligen Kegelschnitt, die Parabel und eine Schrift über den Brennspiegel[2]), zwei Werke, die bisher gefehlt hatten, und die Gogava wieder hergestellt hat.

Im folgenden soll zunächst die Vorrede von Gogava auszugsweise mitgeteilt werden: Es ist interessant, aus ihr zu sehen, wie tief Gogava R. Bacos Leistungen einschätzt und daß er auf die Entlehnungen von Vitellio aus unserer Schrift aufmerksam macht. Er sagt unter anderem:

Die Namen der Verfasser können wir nicht angeben, da sie sich nicht in unserem Exemplar finden. Einige meinten, es sei Roger Baco, da dieser über diesen Gegenstand geschrieben hat. Doch ergibt sich aus mehreren Gründen, daß dies nicht der Fall ist. Denn Roger zitiert den Verfasser der zweiten Schrift sehr oft als den Verfasser der Schrift über den Brennspiegel, wie in seinem Buch „de multiplicatione specierum" und in dem wortreichen Brief an den Papst Clemens, und zwar kurz nach der Mitte, wo er einige Elemente der Optik wiederholt. Zu beachten ist, daß in allen Werken Rogers sich keine Spur des Geistes der Geometer und des mathematischen Scharfsinnes zeigt, die man in diesen Schriftchen

1) Wohl Maximilian von Egmont, Graf von Büren, der den schmalkaldischen Krieg mit seinem kühnen Zug mit der niederländischen Armee quer durch Deutschland und zugunsten Karls V. entschied und als Generalkapitän von Friesland 23. Dezember 1598 starb.

2) Vgl. hierzu J. L. Heiberg und E. Wiedemann, Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 205—231.

erkennen kann. Alles, was er in der Optik und sonst geschrieben hat, das besitze teils ich selbst, teils unsere Freunde. Daraus ergibt sich, wie ich glaube, sicher, daß man keine der beiden Schriften Roger zuschreiben kann. Der Verfasser der zweiten Schrift ist sehr alt und gehört zu den ersten, die über diesen Gegenstand etwas schrieben, wie sich aus seiner Vorrede ergibt. Ferner klingt der Stil etwas arabisch, so daß ich glaube, daß die Schrift aus dieser Sprache uns übersetzt worden ist, und daß aus der Übersetzung Vitellio Propositionen entnommen und in sein Werk übertragen hat. Der Verfasser des ersten Werkes scheint jünger zu sein und zur Zeit von Roger gelebt zu haben, um das Jahr 1270; zu der Zeit, als auch Vitellio jenes große Werk über die Perspektive (die Optik) schuf. Sicher ist, daß man sich damals von den mathematischen Problemen besonders häufig mit Optik beschäftigte; denn wie bei anderen Dingen, so findet auch hier ein Wechsel statt. Wie wichtiges aber das von mir mitgeteilte bringt, dafür sprechen die Schriften selbst. Solange nämlich die Elemente des Apollonius nicht veröffentlicht sind, können wir dieser Entwicklungen vor allem in der Optik nicht entbehren, wie im neunten Buch des Vitellio bei der 39. Proposition und folgenden. Wir haben das aus einem fehlerhaften Exemplar entnommen, berichtigt und das Fehlende ergänzt.

Soweit Gogava. Dann folgt die Schrift über die Parabel (ohne Titel vorn, aber über den Seiten steht *De section. parabola*). Sie ist auch erhalten in dem Cod. 206 der Biblioteca Capitolare zu Verona (16. Jahrh.). Da aber diese junge Hs. sehr schlecht ist und Gogava eigenmächtig den Text formell und sprachlich umgestaltet hat, würde ein vollständiger Abdruck des lateinischen Textes keinen Zweck haben. Wir geben 1 (Wiedemann) eine Übersetzung der Propositionen unter Weglassung der Beweise und 2. (Heiberg) zur Probe einige Stücke von Gogavas Text mit den Varianten des cod. Veronensis (ganz dumme Schreibfehler sind meist nicht angeführt).

Daß die Schrift auf arabische Quellen zurückgeht, beweist das Wort *muniani*, eine Verunstaltung des arabischen *munhanija*, gekrümmt.[1]) Als „gekrümmte Linien" werden besonders die Kegelschnitte bezeichnet Ferner hat der cod. Veron. *muchesi* für Parabel, d. h. *muchefi* = arab. *mukâfi*, wofür Gogava *parabola* eingesetzt hat. Auch die Bezeichnung der Hyperbel als *sectio addita* und der Ellipse als *sectio diminuta* entspricht den arabischen Ausdrücken *zâid*, „überschüssig, zuviel" und *nâqis*, „vermindert, defekt".

I. Übersetzung der Vorrede und der Propositionen.

Der Verfasser der Schrift „de sectione conica" schickt eine Vorrede voraus, in der er etwa sagt:

1) Vgl. hierzu E. Wiedemann, Sitzungsber. der phys.-mediz. Sozietät in Erlangen **37**, 1905, S. 394.

Ich sah, daß alle, die etwas über die Optik schrieben, da, wo sie von den Spiegeln, die in einer bestimmten Entfernung brennen, handeln, zwei Sätze von Apollonius von Perga annehmen, und zwar von vornherein und ohne sie zu beweisen; auf diese stützt sich alles übrige; so verfährt auch Vitellio, der doch ein besonderes Buch vorausschickt, in dem er alle Sätze, die er benutzt, beweist. Daher habe ich mich bemüht, die Beweise zu liefern, und will ich sie veröffentlichen, außerdem die Methode, wie man einen Brennspiegel herstellt, der in einem bestimmten Abstand brennt.

Hieran schließen sich dann die Definitionen und die Propositionen, von denen wir eine Übersetzung unter Fortlassung der Beweise geben.

Definitionen.

Eine runde Pyramide ist der Ort [transitus] eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine seiner den rechten Winkel einschließenden Seiten festgehalten und das Dreieck gedreht wird, bis es zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt. Ist die festgehaltene Seite gleich der bewegten, so ist die Pyramide rechtwinklig, ist sie länger, spitzwinklig, ist sie kürzer, stumpfwinklig. Dies ergibt sich aus dem Anfang des 11. Buches von Euklids Elementen [XI Def. 18].

In jeder runden rechtwinkligen Pyramide, die von einer Ebene geschnitten wird, die nicht durch die Spitze geht und nicht parallel zur Basis ist, heißt deren gemeinsame Schnittlinie „sectio“, die die arabisch „muniani“ genannte Linie einschließt. Diese Beschreibung ist dem Apollonius entnommen [vgl. Apollonios Con. I, 9]. Man schneidet eine rechtwinklige runde Pyramide durch 2 Ebenen, die eine soll durch die Spitze und die Mitte der Basis gehen, dann schneidet sie die Pyramide, wie nachher [Prop. I] sich ergeben wird, in einem Dreieck; die andere geht nicht durch die Spitze, sie schneidet die Pyramide in einer Fläche, die die Linie „muniani“ einschließt. Ist dann die eine der beiden Ebenen senkrecht auf der anderen, so schneidet die Schnittlinie derselben *entweder* die eine der beiden Seiten des Dreiecks und verläuft parallel zu der anderen, dann heißt die „sectio“ Parabel [vgl. Apollonios Con. I, 11], *oder* sie schneidet die eine Seite des Dreiecks und trifft die andere in die Unendlichkeit verlängert; das kann wieder in zweierlei Weise geschehen, entweder nach der Seite des Kegels zu, dann heißt die „sectio“, welche die Linie „muniani“ umschließt, „sectio addita“ oder Hyperbel [vgl. Apollonios Con. I, 12]; im anderen Falle findet das Schneiden nach der Seite der Basis hin statt, innerhalb oder außerhalb, dann heißt sie, wenn sie nicht ein Kreis ist, „sectio diminuta“ oder Ellipse [vgl. Apollonios Con. I, 13]. Die gemeinsame Schnittlinie der beiden Flächen, von denen die eine die

Parabel ist, heißt Achse oder Pfeil der Parabel; ihr Ende nach dem Kegel der Pyramide zu heißt Haupt (Scheitel) der Parabel und Scheitel der Linie „muniani". Alle senkrecht zum Pfeil von der einen Seite der Linie „muniani" zur anderen gezogenen Linien sind parallel und werden in zwei gleiche Teile geteilt. Die einzelnen so gezogenen Linien heißen die „lineae ordinis". Alle diese Ausdrücke sind dem Apollonius entnommen [Con. I Def. 4]. Man kann nun drei Arten von Schnitten unter den Schnitten, die nicht durch die Spitze der Pyramide gehen, beschreiben, wir bedürfen aber an diesem Orte nur der Parabel, wie sich zeigen wird. Man könnte nun in der Parabel jede Linie „basis recta" oder „latus rectum" nennen, die zwischen der erwähnten Ordinate und dem Scheitel der Parabel gelegen ist. Sie wird aber nicht so von Apollonius genannt, sondern nur die, die folgendermaßen beschrieben wird [vgl. Apollonios Con. I, 11].

Zieht man von dem Scheitel der Parabel deren Achse, bis sie nach der Seite der Basis mit der Achse der Pyramide zusammentrifft, so heißt die von dem Mittelpunkt dieses Pfeiles gezogene Ordinate das „latus rectum" zur Parabel, wie lang oder kurz auch jene Parabel nach der Seite der Basis zu sein mag. Hieraus ergibt sich für jede Parabel, daß, welche Stücke dieser Parabel zwischen irgendeiner Ordinate und dem Scheitel der Parabel oder zwischen Stücken der „linea muniani" liegen mögen, daß alle diese einzelnen Stücke Parabeln sind und daß alle *dasselbe* latus rectum haben. Notwendigerweise[1]) wird jenes latus rectum doppelt so groß sein als die Achse der Parabel, die vom Scheitel bis zur Achse der Pyramide gezogen ist, wie mit der Gunst Gottes in der ersten Conclusio (Propositio) bewiesen werden soll.

Nach Vorausschickung jener vier Beschreibungen (descriptiones) folgen die Schlüsse[2]) (conclusiones).

Propositio I. In jedem rechtwinkligen Kegel, der durch eine durch die Spitze und den Mittelpunkt der Basis gehende Ebene in zwei gleiche Teile geschnitten wird, ist die gemeinsame Schnittlinie des Kegels und der schneidenden Ebene ein geradliniges Dreieck, dessen Basis der Durchmesser der Basis des Kegels ist [vgl. Apollonios Con. I, 3].

Propositio II. Verbindet man zwei auf der Oberfläche eines Kegels gelegene Punkte durch eine gerade Linie, und berührt sie in die Unendlichkeit verlängert nicht den Kegel, so liegt diese Linie im Innern des Kegels [vgl. Apollonios Con. I, 2].

---

1) Daß diese Ordinate gleich dem Parameter ist, ergibt sich leicht, wenn man durch den Schnittpunkt der Achse der Parabel mit derjenigen des Kegels den der Basis parallelen Kreis legt. Vgl. Archimedis *Opera* ed. Heiberg I², S. 272, 16—17.

2) In Gogavas Druck heißen die Überschriften stets „propositio", in der Veroneser Handschrift „conclusio".

Propositio III. In jedem rechtwinkligen Kegel ist die Schnittlinie einer zur Basis parallelen Ebene eine Linie, die einen Kreis umgibt; sein Mittelpunkt liegt in der Achse des Kegels [vgl. Apollonios Con. I, 4].

Propositio IV. In jeder Parabel ist das latus rectum doppelt so groß als der Pfeil. Das latus rectum verhält sich zu jedem Lot (y), das von dem Pfeil zu der gekrümmten Seite des Schnittes ausgeht, wie jenes Lot (y) zu dem Stück (x) der Achse zwischen dem Lot und dem Scheitel der Parabel[1]) [Apollonios Con. I, 11].

Propositio V. Zieht man in einer Parabel irgendeine Ordinate zwischen dem latus rectum und dem Scheitel und legt einen Kreis durch den Scheitel und die Endpunkte der Ordinate, so liegt dessen Mittelpunkt notwendigerweise auf der Achse und des Stück (s) seines Durchmessers zwischen der betreffenden Ordinate und dem nach der Basis zu gelegenen Umkreis ist gleich dem latus rectum.[2])

Propositio VI. Verlängert man in einer Parabel die Achse, zieht die Tangente, bis sie die Achse schneidet, zieht man dann vom Berührungspunkt der Tangente zwei Linien, von denen die eine senkrecht zur Achse, die andere senkrecht zur Tangente steht, so ist das Verhältnis des latus rectum ($2p$) zu dem Stück der Achse (a) zwischen den beiden Loten gleich dem Verhältnis der Strecke (b) zwischen dem näheren Lot und dem Schnittpunkt der Tangente zu dem Stück (d) der Achse zwischen demselben Lot und dem Scheitel der Parabel.[3])

Propositio VII. Verlängert man die Tangente an eine Parabel bis sie die über den Scheitel verlängerte Achse schneidet, und fällt man vom Berührungspunkt ein Lot auf die Achse, so ist der Abstand des Fußpunktes des Lotes vom Scheitel unbedingt gleich dem Abstand des Schnittpunktes der Tangente vom Scheitel [vgl. Apollonios Con. I, 33].[4])

Propositio VIII. Bezeichnet man in irgendeiner Parabel einen Punkt (P) in der Mitte ihrer Achse, der zugleich auf der Mitte des latus rectum liegt, läßt dann von irgendeinem Punkte (P_1) der Krümmung eine Linie parallel zu der Achse nach der Basis zu verlaufen, und zieht man ferner in dem Punkt (P_1) zwei Linien, von denen die eine die Parabel in P_1 berührt, die andere nach P der Achse geht, so entstehen zwei gleiche Winkel, der eine zwischen der Tangente nach dem Scheitel der Parabel und der nach dem Punkte P gezogenen Linie, der andere zwischen

1) Es ist ja $y^2 = 2px$.

2) Ist die betreffende halbe Ordinate y, die Abszisse x, so ist $y^2 = 2px$; anderseits ist in dem Kreis $x : y = y : s$, also $y^2 = xs$ oder $s = 2p$.

3) Es ist $2p : a = b : d$, denn es ist $ab = y^2 = 2px$ und $x = d$.

4) Die Subtangente wird durch den Scheitel halbiert.

der parallel zur Achse gezogenen Linie und der Tangente nach der Seite der Basis.

Propositio IX. In einem parabolischen Hohlspiegel strahlen alle parallel der Achse auffallenden Strahlen nach ein und demselben Punkt zurück, einem Punkt, der sowohl in der Mitte des Pfeiles wie des latus rectum liegt.

Dies ergibt sich klar aus den Praemissen und dem gewöhnlichen Prinzip der Optik, nämlich daß die Winkel des Einfalls und der Reflexion gleich sind.

Propositio X. Ein Instrument aus Stahl oder einem anderen harten Stoff herzustellen, mit dem man die feste Substanz eines Brennspiegels nach einer parabolischen Höhlung aushöhlen kann.

Soll der Spiegel im Abstand von 20 Fuß brennen, so muß man[1]) eine Meßstange (pertica) oder -latte (virga) von 40 Fuß haben, mit der man als Halbmesser (Radius) einen Teil eines Kreises zeichnen kann. Man muß auch zwei ebene viereckige eherne oder eiserne Platten (regulas) haben; ihre Länge muß gleich der gewünschten Breite des Spiegels sein ihre Breite so, daß man auf ihnen vom einen Ende zum andern einen Teil eines Kreises entsprechend dem oben erwähnten Halbmesser zeichnen kann Auf deren einer zeichnet man [Fig. 1] den Teil *abc* entsprechend der angegebenen Größe des Halbmessers, auf der anderen den Teil *def* entsprechend einem etwas, etwa nur einen Fuß kleineren Halbmesser. Dann feilt man von beiden Platten mit einer Feile das fort, was außerhalb der Wölbung der gezeichneten Teile sich befindet. Dann legt man auf die horizontale Ebene einen länglichen viereckigen rechtwinkligen Körper (K) mit parallelen Basen und Seiten, dessen Länge gleich der des Bleches *abc* ist, etwa gleich 8 Fuß[2]) Dann zieht man auf seiner oberen Seite eine der Linie *gh* parallele Linie, die von ihr um 1 Fuß absteht, d. h. entsprechend der Größe, um die der Halbmesser des Kreises *def* kleiner ist als der von *abc*. Die Mitte jener Linie sei *e*. Dann legt man *def* auf die obere Seite des Körpers K, so daß der Mittelpunkt der Krümmung *def* in *e* die zu *gh* parallele Linie berührt und zieht auf der oberen Seite von K entsprechend *def* eine Linie. Dieser Bogen heiße *def*. Durch *e* zieht man eine Linie xx_1[3]) parallel zu den Querkanten von K, und da, wo

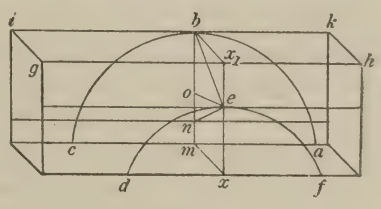


Fig. 1.

1) Statt der dritten Person hat der Text die zweite.

2) Die Dicke ist nicht angegeben, nach dem späteren ist sie gleich dem Unterschied der beiden Halbmesser.

3) Die Buchstaben xx_1 fehlen im Original.

sie die Längskanten trifft, auf den Seitenflächen zwei Linien $x_1 b$ und xm und endlich die Linie bm. Man kehrt nun den Körper um, so daß er auf der entgegengesetzten Seite aufsteht, legt abc auf die Seite ik, so daß der Mittelpunkt der Krümmung abc die Linie ik im Punkt b berührt; entsprechend der Krümmung von abc wird dann die Kurve abc gezogen. Wir haben also zwei Kurven auf den einander gegenüberstehenden Seiten, nämlich abc und def, Teile zweier Kreise, deren Mittelpunkte einander gerade gegenüberliegen, so daß deren Verbindungslinie auf beiden Kreisen senkrecht steht. Mittelst eines Instrumentes, dessen scharfe Kante (acies) eine gerade Linie ist, wird von der Seitenwand (costa lateralis) das, was außerhalb der Kurven $abcdef$ gelegen ist, entfernt. Es bleibt ein Gewölbe (fornix) $defabc$ übrig, das einen Teil der gekrümmten Oberfläche eines rechtwinkligen Kegels zwischen zwei parallelen Kreisen bildet. Daß sie ein Teil eines Kegels ist, ist klar, da die Mittelpunkte der beiden Kreise auf der auf beiden Kreisen Senkrechten liegen. Daß sie rechtwinklig ist, wird folgendermaßen bewiesen: Der Körper liegt auf der ersten Basis, so daß abc unten liegt. Von dem Punkte e denken wir uns ein Lot auf die Basis gezogen, das notwendigerweise auf die transversale Linie bm fällt, etwa auf den Punkt o. Da eo gleich einem Fuß ist, wir haben ja die Höhe von K so gewählt, und da auch bo ein Fuß ist, da e von gh nach der Annahme um einen Fuß absteht, so wird in $\triangle eob$ $eo = ob$ und $\sphericalangle o = 90^0$, daher sind die beiden andern gleich 45^0. Daraus folgt, daß unser Kegel ein rechtwinkliger Kegel ist und $abcdef$ ein Teil eines solchen. Auf der Verlängerung von bo falle nun ein Punkt n, so daß $bo = on$ ist. Auf der Basis $ikac$ zieht man nun eine Linie, die durch n geht und ibk parallel ist. Durch den Punkt e legen wir eine Ebene, die, was außerhalb jener Oberfläche nach der Seite von b zu liegt, abschneidet. Die Schnittlinie der ebenen und krummen Oberfläche ist eine Parabel. Man zieht nun ein ebenes Dreieck, das durch den Kegel und den Mittelpunkt der Basis und durch die Linie bom geht. Die Seiten des Dreiecks schneiden den Kegel zweimal. en ist parallel der andern Seite des erwähnten Dreiecks. bn bildet verlängert an der betreffenden Seite einen Winkel von 45^0, da bn ferner parallel mit dem Durchmesser der Basis ist, so ist eno 45^0, also ist en nach der 29. Proposition des ersten Buches [von Euklid] der erwähnten Seite parallel. Man erhält also eine Ebene mit Seiten, die einer Parabel entsprechen. Ihr paßt man eine Stahlplatte an, deren Rand man so schärft, daß er der Krümmung der Parabel entspricht. Mit einem Instrument höhlt man eine andere stählerne oder eiserne Platte aus und poliert diese; dann hat man einen Brennspiegel, der zum mindesten so weit brennt als dem halben Durchmesser des Kreises entspricht, mit dem der Kreis auf der ersten Platte abc gezeichnet wurde, wie sich aus

der neunten Proposition des vorliegenden Werkes ergibt. Genauer findet [Fig. 2] man aber dies Intervall folgendermaßen: Man macht bx[1]) (den Radius des größeren Kreises) 40, $eo = 1$, dann ist auch $ob = 1$[2]), dann ist $nx = 38$, ferner ist $nx = xq$, daher ist $qn = \sqrt{2888}$, dies ist nur eine halbe Einheit größer als 53 (genau 53,74), daher ist das ganze $eq = [qn + en]$[3]) ein wenig größer als 54, dessen Hälfte etwas größer als 27 ist. Ist also der Halbkreis (sic) 40, so ist der Intervall 27 Fuß und ein wenig mehr.

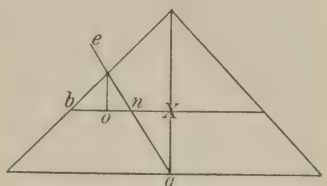


Fig. 2.

Ebenso sei $bx = 5$, dann ist $nx = 3$, $eo = 1$, ebenso $ob = 1$, nq ist $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 + 3^2}$ [$= 4{,}24$], ne ist $\sqrt{2}$ [$= 1{,}41$]. Danach wird $eq = \sqrt{32}$, dessen Hälfte $= \sqrt{8}$ ist.[4])

In einem solchen Zwischenraum findet unter jenen Voraussetzungen das Brennen statt.

Hieran schließt sich noch eine besondere Proposition über Asymptoten mit den Worten:

Es folgt ein auf den ersten Anblick wunderbarer Schluß, der freilich dem vorliegenden Zweck nicht dient (zugehört), aber doch aus dem Kegelschnitt, der Hyperbel[5]), zu folgen scheint.

Propositio XI. Es können zwei Linien, von denen die eine gerade, die andere gekrümmt ist, oder die beide in ähnlicher Weise gekrümmt sind, gezogen werden, die, je weiter sie verlängert werden, sich immer mehr nähern, aber doch niemals zusammentreffen, selbst wenn sie ins Unendliche verlängert werden [vgl. Apollonios Con. II, 1].

II. Stücke des lateinischen Texts.

1. Die Vorrede.

Gogava.

Praefatio auctoris.

Cum uiderem omnes qui in Perspectiua aliquid scripserunt, ubi de Speculis ad certam distan-

Cod. Veronens.

Quia uniuersos, quos de speculis concauis ad certam distantiam comburentibus tractare perpendi, seu quorum in scriptis uidi tractatus, omnes et singuli

1) Die Konstruktion soll die Länge der Achse der Parabel aus dem Radius des größeren Kreises und dem Unterschied beider Radien liefern.

2) e entspricht also einem Kreis, der einen um 1 kleineren Radius als bx hat.

3) Es ist $en = \sqrt{2} = 1{,}41$, also $eq = 53{,}4 + 1{,}41 = 55{,}1$.

4) Statt die Werte anzugeben, werden noch aus Freude an den Wurzeln diese gegeben. Es ist $eq = 4{,}24 + 1{,}41 = 5{,}65$. $\sqrt{32} = 5{,}657$. Die Hälfte ist 2,828, und $\sqrt{8}$ ist ebenso 2,828.

5) Cod. Veronensis hat „muchesi“ statt „hyperbola“.

tiam comburentibus disputant, duas conclusiones ab Apollonio Pergæo allegatas præsupponere, quibus reliqua omnia innituntur, adeo ut etiam ipse Vitellio, cum peculiarem librum præmittat, ubi omnes propositiones illi necessarias, omniaque lemmatia quibus post utitur demonstrat, ut opus uniuersum seipso contentum esset, prædictas tamen conclusiones supponat tanquam necessarias, minime uero demonstrat: nulla inquirendi defatigatione reiectus fui, quin ad ueram intelligentiam unius earum, ac tandem ad utriusque cognitionem per demonstrationem peruenirem. Ne igitur hoc labore meo mihi soli profuisse uidear, decreui cogitationes has meas mandare literis, earumque interuentu ac aliorum quæ subnectam Speculum ustorium ad quantam libet distantiam qua ratione fabricandum sit demonstrare.

Primum uero a definitionibus exordiamur.

composuerunt duas concauationes de Apollonio pergeo allegatas, super quibus tota eorum intentio fundabatur, in tantum ut etiam ipse Vitello auctor perspectiuæ unum librum premittit, in quo demonstrare nititur omnes concauationes, que sibi uidentur necessarie atque preambule ad suum propositum, ita ut totus liber suus sufficeret sibi ipsi. dictus tamen Uitello duas concauationes Apollonii predictas in perspectiua sua supponit, quas non probat, sed utitur eis tamquam necessariis. et licet ueritatis earum notitia latuit ualde non obstante, quod adhiberem diligentiam magnam pro demonstratione obtinenda earundem, tamen finaliter et tedio et labore ad unum uerum intellectum alterius earum deueni, cuius probatio et quia influente[1]) mihi satis faciliter occurrebat. unius ergo probatione inuenta et in scriptis redacta circa probationem alterius, dōnec deo id monente inuenirem, insistere non tardaui. probationibus itaque istarum duarum questionum scitis et scriptis, ne tam solicitus labor meus perderetur, propono mediantibus istis et aliis, infra prout docetur[2]), docere facere unum speculum comburens, ad quantam libuerit distantiam, quod potest esse dimidium diametri speculi cuiuscunque, cuius alicuius[3]) portio quantumcunque magna seu modica poterit instrumentaliter lineari. et erit huius tractatus intentio propinata, ad quam intentionem perficiendam pariter et probandam quasdam concauationes[4]) et descriptiones premittam, quarum prima est:

1) Lies intuenti; quia ist verschrieben.
2) Lies dicetur. 3) Lies aliqua.
4) d. h. conclusiones.

2. Anfang der Schrift.

Definitiones.

Pyramis rotunda est transitus trianguli rectanguli, altero suorum laterum rectum angulum continentium fixo, et triangulo ipso donec ad locum unde moueri cepit, redeat circumducto. Si tunc latus fixum lateri circumducto fuerit æquale, erit pyramis rectangula. Si uero longius acutangula. Et si breuius obtusangula. Hoc satis patet in principio undecimi elementorum Euclidis [Fig. 3].

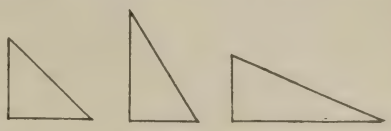


Fig. 3.

In omni rotunda pyramide Orthogona secta per superficiem planam non transeuntem per caput pyramidis nec æquedistantem basi differentia communis dictæ superficiei et dictæ pyramidi uocatur sectio quam continet linea Arabice dicta muniani. Hæc descriptio ab Apollonio allegatur. Quando secatur pyramis rotunda et rectangula duabus superficiebus planis, quarum una per caput et per centrum basis transit, secans pyramidem secundum triangulum, ut infra patebit, et altera non transit per caput, imo secat eam cum superficie quam continet linea muniani iuxta descriptionem præmissam [Fig. 4], sic quod una dictarum superficierum planarum secantium stet super alteram secundum rectos angulos, tunc linea recta quæ est differentia communis dictis duabus superficiebus secantibus necessario uel secabit unum duorum laterum trianguli et æquedistabit alteri, et tunc uocatur sectio parabola, uel secabit unum latus trianguli et concurret cum altero latere in infinitum protracto, quod contingere potest dupliciter [Fig. 5], uel ex parte coni, et tunc, sectio quam continet linea muniani, uocatur sectio addita siue hyperbola, uel secabit ex parte basis, intra uel extra, et tunc si non sit circulus uocatur sectio diminuta siue Ellipsis.

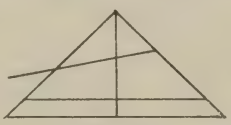


Fig. 4.

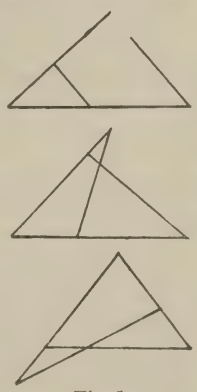


Fig. 5.

1. Definitiones] *om. Veron.* 2. rectanguli] *om.* 4. cepit] ceperit. tunc] autem. 6. longius] longius erit. *Figg. om.* 10. Secunda *add.* Orthogona] orthogonia. 12. communis] correspondens. pyramidi] pyramidis. quam—13. descriptio] *om. Fig. om.* 14. Tercia *add.* secatur] secatum est. 15. et] orthogonia. duabus] cum duabus. 16. per *(alt.)*] *om.* 18. caput] caput eius. 19. linea muniani] lineam miniani. 21. rectos angulos] angulos rectos. 22. differentia communis] circumferentia consequens. 25. parabola] muksi. latus] laterum. concurret] concurrit. *Figg. om.* 28. muniani] miniani. uocatur] uocabitur. 29. siue hyperbola] *om.* 31. siue Ellipsis] *om.*

Iterum dicta linea quæ est differentia communis dictis superficiebus, quarum altera est sectio parabola uocatur axis, siue sagitta parabolæ, cuius extremitas uersus conum pyramidis, uocatur caput sectionis parabolæ, et caput lineæ muniani.

Et omnes lineæ protractæ orthogonaliter super dictam sagittam, ab uno latere lineæ muniani, usque ad alterum eius latus erunt mutuo æquedistantes, et diuiduntur per dictam sagittam in duo æqualia, et uocantur singulæ lineæ sic protractæ, lineæ ordinis illius sagittæ. Omnes isti termini ab Apollonio sumuntur. Et licet triplex sectio inter sectiones non transeuntes per caput pyramidis describatur, non tamen eis hoc loco indigebimus, nisi sectione parabola, ut patebit.

Licet in sectione parabola, quæcunque linea possit uocari basis recta seu latus rectum sectionis parabolæ, interceptæ inter dictam lineam ordinis et caput sectionis: Non tamen ab Apollonio sic uocatur, sed quæ sic describitur. Sectionis parabolæ cuius tantum descenderit sagitta a capite sectionis quousque ex parte basis cum axe pyramidis concurrerit linea ordinis transiens per punctum medium dictæ sagittæ uocatur latus erectum illius sectionis parabolæ quantumcunque illa sectio ex parte basis longa fuerit siue curta. Vnde patet ex hoc de omni sectione parabolæ, quod illa sectio quæcunque eius pars intercepta inter aliquam lineam ordinis et caput sectionis, ac inter partes lineæ muniani, singulæ tales partes sunt sectiones parabolæ, et omnes tales idem obtinent latus erectum. Et erit illud latus erectum necessario duplum ad sagittam sectionis parabolæ protensam a capite illius sectionis, quousque concurrat cum axe pyramidis, ut in quarta conclusione Deo fauente, probabitur. Istis quatuor descriptionibus præmissis, sequuntur conclusiones.

---

1. communis] correspondens. 2. parabola] muksi. siue] sicut. parabolæ] muksi. 3. extremitas] extremum. parabolæ] muksi. 4. muniani] miniani. 6. muniani] miniani. eius latus] latus eius. mutuo] *om.* 7. diuiduntur] diuiditur. 8. singulæ] *om.* 9. termini] tres. sumuntur] sic describuntur. Et — sectio] et notandum quod inter interstitiones. 10. describatur] triplex sectio describatur. hoc loco] *om.* 11. nisi] ad propositum nostrum principale nisi. parabola] muksi. *Add.* et inferius et ultimum notandum est quod sectio rectangula parabolla et muksi idem sunt, item sectio ampligonia iperbolea et muksi addita idem sunt, item sectio oxigonia eclipsis et muksi dimidiata idem sunt secundum auctores. 12. parabola] muksi. linea] linea ordinis. 13. parabolæ] muksi. 14. sed — 15. describitur] imo hec est descriptio uera eius. 15. parabolæ] muksi. cuius] cum. 16. pyramidis] pyramidi. 18. parabolæ] muksi. longa fuerit] fuerit longa. 19. parabolæ] muksi. 20. quæcunque] quantumcunque. 21. muniani] miniani. 22. sunt] sint. parabolæ] muksi. obtinent] retinent. 23. sectionis parabolæ] secantem muksi. 25. conclusione] propositione. Deo fauente] *om.* probabitur] probabitur deo dante.

Propositio prima.

In omni rotunda pyramide orthogona secta in duo æqualia cum superficie plana transeunte per caput pyramidis et centrum basis, differentia communis pyramidi et dictæ superficiei secanti, erit triangulus rectilineus, cuius basis erit dyameter basis pyramidis ita sectæ.

Ista conclusio statim se offert intellectui ex prima scilicet descriptione pyramidis per triangulum circumductum. Et sic patet ueritas illius quod descriptio tertia supponit, et uocantur latera dicti trianguli hypotenusæ pyramidis, ut per primam conclusionem de curuis superficiebus patet.

3. Satz IV.

Propositio IIII.

In omni sectione parabola latus erectum duplum est ad sagittam: idque latus erectum ad omnem perpendicularem exeuntem a sagitta usque ad curuum latus sectionis se habebit, sicut illa perpendicularis se habet ad partem sagittæ interceptam inter dictam perpendicularem et caput propositæ sectionis.

In pyramide *adb* [Fig. 6] secta sectione parabolæ, sectio parabolæ sit *pcf*, cuius sagitta *fo* concurrat in puncto *o* cum axe pyramidis *ao*. Per *h* medium sagittæ transeat linea ordinis *pghg* orthogonalis super sagittam, quæ quidem linea ordinis uocatur latus erectum dictæ sectionis per quartam descriptionem. dico quod linea *pg* est dupla ad sagittam *fo*, et quod *pg* se habet ad perpendic. *mn* exeuntem a sagitta ad latus curuum sectionis, sicut eadem perpendicularis *mn* se habet ad *mf* partem sagittæ interceptam inter dictam perpendicularem et caput sectionis. Secet triangulus *adb* propositam pyramidem in duo media transiens per caput eius

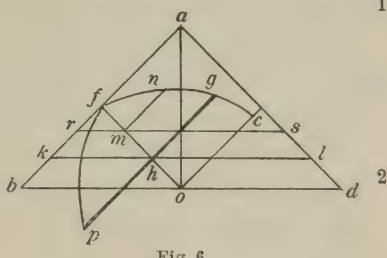


Fig. 6.

1. Propositio prima] quarum prima est. 2 rotunda pyramide orthogona] pyramide rotunda orthogoniam. cum] atque. 3. centrum] per centrum sue. differentia communis] conclusionis dicte. 4. rectilineus] rectelinearis. 5. dyameter] diameter. ita] iam. 6. se] sic. intellectui] intellectum. 7. per triangulum circumductum] rectum ductum. sic] *om.* 8. hypotenusæ] ypotemisi. 9. de curuis] *om.* 10. Propositio IIII] quarta conclusio. 11. parabola] muksi. erectum — est] est erectum duplex necessario. sagittam] sectum. 12. exeuntem] existentem. 15. sectionis] sectionis uirge. 16. *adb*] *abd*. 17. parabolæ] muksi. sectio — *pcf*] que fit (leg. sit) *pfc*. 19. per *h*] et per punctum. 20 *pghg*] per *gh*. orthogonalis] orthogonaliter. 21. sagittam] sagittas. 23. dico] tunc dico. *pg* est] *pgc*. 24. *mn*] in *n*. 25. eadem] illa. *mn*] in *n*. *mf* partem] *fm* parte. In fig. *g* in axe, *p* in basi est. 26. Ante Secet ins.: probatio. 27. *adb*] *abd*.

et per eius centrum: sic quod iste triangulus stet super sectionem parabolæ secundum angulos rectos, prout uult tertia descriptio. Cum igitur in proposito linea *pg* necessario stabit perpendiculariter super dictum triangulum imaginabor circulum transiisse per puncta *g* et *d* (lies *p*), diuidentem pyramidem æquedistanter basi pyramidis, cuius diameter sit *khl*, ergo quadratum lineæ *hg* erit æquale quadrangulo, quod fit per *kh* m (lies in) *hl* per trigesimam 3. et octauam sexti Euclidis. Cum ergo quadratum *oc* linea quæ est semidia. basis pyramidis erecta orthogonaliter super diametrum *bd* resultet eadem ratione ex ductu *bo* in *od*, et lineæ *hl* et *od* sint æquales per trigesimam quartam primi: ergo quadratum *oc* fit ex ductu *hl* in *bo* et quia quadratum *gh* resultat ex *hl* in *kh* productorum autem et producentium eadem est propositio (lies proportio), ut elici potest ex prima sexti in quantitatibus continuis erit proportio *bo* ad *kh*, sicut quadrati *oc* ad quadratum *hg*, sed *bo* ad *kh* est, sicut *fo* ad *fh* ex quarta sexti, ergo proportio quadrati *oc* ad quadratum *hg* est, sicut proportio *fo* ad *fh*. Et consimiliter potest probari de omnibus duabus perpendicular. exeuntibus a duobus punctis sagittae usque ad latus curuum figuræ parabolæ, quod linea sagittæ intercepta inter perpendicularem remotiorem et uerticem figuræ parabolæ se habet ad lineam sagittæ interceptam inter perpendicularem propinquiorem uertici, sicut quadratum perpendicularis remotioris ad quadratum perpendicularis propinquioris. Cum igitur ex præmissis *of* ad *hf* sit sicut quadratum *oc* ad quadratum *hg*, *of* autem est dupla ad *hf* ex hypothesi, ergo quadratum lineæ *oc* erit duplum ad quadratum lineæ *gh*, igitur per correlarium decimæ septimæ sexti *oc* se habet ad *hg* in medietate duplæ proportionis, *oc* autem et *od* sunt æquales, cum sint semid. eiusdem

---

1. iste] ille. parabolæ] muksi. 2. rectos] *om.* igitur] ergo. 3. linea — perpendiculariter] necessario stabit linea *pg* perpendicularis. 4. imaginabor] imaginor. transiisse] transire. *d*] per *p*. 5. æquedistanter — pyramidis] equedistanti pyramidis basi. ergo] erit. 6. *hg* erit] *gh*. quod — 3.] contento ex *kh* m. (leg. in) *lh* per tertiam tertii. 8. *bd* resultet] *db* resultat. 9. in] m. per] cum sint equidistantes et inter (*hl* del.) *ho* et *ld* equidistantes per. 10. primi] primi Euclidis. quadratum] quantum. fit] resultat. in *bo*] m. *ob*. quia] *om.* 11. *hl* — autem] ductu eque (leg. eius que) *hl* m (leg. in) *hb*, sed productorum. 12. ut] ut probat decima octaua septimi Euclidis in numeris et ut. elici] dici. ex] a. sexti] quinti Euclidis. continuis] ergo eadem. 13. quadrati — *hg*] quarti *oc* ad quartum *gh*. sed] sed proportio. 14. ex — sexti] per quartam sexti Euclidis. 15. potest probari] probari potest. 17. parabolæ] muksi. 18. parabolæ] muksi. 19. ad lineam] a linea, deinde del. figure. interceptam] intercepta. 20. uertici] ex uertice. 22. *of* autem] et *of*. ex hypothesi] cum ex ypothesi sit punctus medius *tf*. 23. quadratum] quartum (sic saepius). erit] est. *gh*, igitur] *hg*, ergo. 24. correlarium] correspondentiam. *oc*] Euclidis, linea *oc*. *hg* in medietate] lineam *gh* immediate. 25. *oc* — *od*] linee autem *oc* et *cd*. semid.] semidiameter.

circuli, igitur *od* ad *hg* se habet in medietate duplæ. Similiter *ad* se habet ad *od* in medietate duplæ, per quadragesimam sextam primi, et correlarium 17. sexti. ergo *ad* est dupla ad *hg*. Sed et eadem *ad* est dupla ad *fo*, eo quod *ad* ad *fo* sicut *bd* ad *bo* per quartam sexti, et *bd* dupla ad *bo*. quare per septimam quinti *hg* et *fo* sunt æquales, *pg* autem est dupla ad *hg*, ergo *pg* est dupla ad *fo*. Patet igitur prima pars conclusionis propositæ, cum *pg* sit latus erectum sectionis, et *fo* eius sagitta. Et ex consequenti sequitur quod latus erectum sectionis necessario sit quadruplum ad medietatem sagittæ, scilicet *pg* quadrupla, sit ad *fh*. Nunc ad secundam partem conclusionis probandam, scilicet quod *pg* latus erectum sectionis se habet ad perpendicularem *mn*, sicut *mn* se habet ad *mf*, describo circulum transeuntem per puncta *m* et *n* diuidentem pyramidem æquidistanter basi. Cuius diameter sit linea *rms*. cum igitur *ms* et *hl* per trigesimam tertiam primi euclidis sint æquales, et ex ductu *ms* in *rm*, fiat quadratum lineæ *mn*, atque ex (corr. mg ex *p*) *hl* æquali *ms* in *kh*, fiat quadratum lineæ *hg*, ergo ut supra eadem est proportio *kh* ad *rm* quæ quadrati lineæ *hg* ad quadratum lineæ *mn*. *kh* autem ad *rm* est sicut *fh* ad *fm*. quare *fh* ad *fm* sicut quadratum lineæ *hg* ad quadratum lineæ *mn*. et si sic, ergo per 15. quinti, eadem est proportio *pg* quadruple ad *fh*, ut ostensum est, ad *fm*, sicut quadrati *pg* quadrupli ad quadratum *hg*, per correlarium 17. sexti, ad quadratum lineæ *mn*, cum per idem correlarium proportio quadrati *pg* ad quadratum *mn* sit dupla ad proportionem lineæ *pg* ad lineam *mn*. Per propositionem 11. quinti ergo proportio lineæ *pg* ad lineam *fm* est dupla ad proportionem lineæ *pg* ad lineam *mn*.

---

1. igitur] sicut basis pyramidis ergo. ad — medietate] se habet ad *hg* immediate. Similiter — 2. duplæ] proportionis. 3. correlarium 17.] per correspondentiam decime septime. *ad* (pr.)] *om.* 4. *fo*] *of*. eo quod — *bo*] *om.* et *bd*] eo quod *db* sit. 5. *bo*. quare — 6. autem] *ob*, ergo eadem est proportio *ad* ad *of* et *ad* ad *hg*, ergo *hg* ad *of* sunt equales per septimam quinti Euclidis, sed *pg* 6. igitur] ergo. 9. necessario sit quadruplum] sit necessario quartum. scilicet — 10. *fh*] interceptam inter medium punctum sagitte quod est *h* et caput sectionis ita quod linea *pg* necessario est quarta ad latus *fh*. 10. Nunc] quantum uero. partem] partem proposite. scilicet] uidelicet. 11. *mn*] illa perpendiculariter *mn*. 12. describo] describo primo. et] *om.* 13. æquidistanter] equidistantem. 14. per — æquales] sint equales per trigesimam tertiam primi Euclidis ut superius argumentatum est 15. *rm*] *mr*. fiat] resultat. atque ex] ex ductu. æquali] equalis linee. 16. *kh*] *hk*. fiat] resultat. lineæ] *om.* *kh*] *hk*. *rm*] *mr* 17 quæ] et per consequens *hf* ad *mf* sicut. *kh* — 18. *mn*] *om* 19. sic] sit per 15. quinti] per quintam sexti. *fh*] *hf*. ut] ut supra. 20. *fm*] *mf*. quadrati] quadranguli. 21. correlarium 17.] correspondentiam decime septime. cum] cum ergo. correlarium] corespondentem. 22. proportio quadrati] propositio quarti. 23. propositionem 11.] suppositionem decimam. ergo] Euclidis, ergo per eamdem est. proportio] propositio. 24. ad (tert.) — p. 208, 2. *pg*] *om.*

quare *mn* est medio loco proportionalis inter *pg* et *fm*. Eadem est igitur proportio lineæ *pg*, quæ est latus erectum sectionis, ad lineam *mn* perpendicularem, quæ est eiusdem *mn* ad *fm*. Quæ erat secunda pars conclusionis probanda. Patet ergo conclusio secundum utramque sui partem, cuius secunda pars fuit conclusio Apollonii una. Pro probatione uero alterius sunt aliquæ præambulæ conclusiones præmittendæ.

2. perpendicularem] *om.* 3. quæ est eiusdem] sicut linee. *fm*] lineam *mf*. Quæ — 4. probanda] secundario fuit probandum. 5. Apollonii] Appolonii. una — 6. præmittendæ] circa eius probationem satis diu insteti, consequenter etiam circa probationem alterius conclusionis instabo, sed prius aliquas preambulas conclusiones premittam, quarum prima est.

4. Schluß der Abhandlung.

Gogava.	Cod. Veronens.
Sic igitur utraque pars propositionis demonstrata esto.	Sic ergo patet ueritas conclusionis proposite quantum ad utramque eius partem. et notandum, quod sectio ad probationem istius conclusionis assumpta est sectio muksi addita, scilicet sicut patet sedulo intuenti. et hec ad presens dicta breuiter sufficiant. et sic est finis ad laudem omnipotentis Dei eiusque Matris gloriosissime matris uirginis Marie.

An Italian algebra of the fifteenth Century.

By Louis C. Karpinski in Ann Arbor.

Ghaligai devoted the tenth to the thirteenth books of his *Pratica d'arithmetica*[1]) to algebra, being one of the earliest expositions in print. The tenth chapter begins with the following statement:

"Dice Benedetto la Regola dell'Arcibra, quale Guglielmo de Lunis la traslatò d'Arabo a nostra Lingua, & secondo detto Guglielmo detta Regola e composta da uno nome Arabo di grande intelligentia, & che alcuni dicono essere stato uno il qual nome era Geber, & Lionardo Pisano, dice che Algebra amucabile, e la interpretatione della Regola in quella lingua.

Segue el Testo di Guglielmo."

Under this heading Ghaligai states that according to Guglielmo in this "Regola del Geber, quale noi diciamo Arcibra" are employed seven terms: Geber, Elmechel, Elchal, Elchelif, Elfazial, Buram (Di fareburam) and Eltermen. These are interpreted as *recuperatione*, *essempio* or *assimigliamento*, *oppositione*, *dispositione*, *diferenza*, *ragione*, and *finitione* respectively.

The Plimpton collection contains an Italian mathematical manuscript of 1464[2]) which gives an extended treatment of algebra following several authorities of that time. The manuscript is of importance for the history of algebra because it contains a number of references to teachers of this discipline in the fourteenth and fifteenth century as well as an Italian translation of a large part of the algebra of Mohammed ibn Musa which is ascribed quite definitely to Guglielmo de Lunis. The thirteenth, fourteenth and fifteenth books of the work are devoted to algebra, and the first of these contains the algebraical and geometrical solution of quadratic equations as given by Al-Khowarizmi together with multiplication and division exercises and further equations whose solution depends on

1) The 1521 edition of Ghaligai's work was entitled *Summa de arithmetica*, but according to Riccardi (*Biblioteca matematica italiana* **1**, Modena 1870, p. 500) it is the same as the 1548 and 1552 editions. I quote from the 1552 Florence edition.

2) D. E. Smith, *Rara arithmetica*, Boston 1908, p. 459, 461—463 with plate.

the six as in AL-KHOWARIZMI (plus the forms $ax^3 = n$, $ax^4 = n$, $ax^5 = n$ and $ax^6 = n$). The opening sentence of this thirteenth book is a quotation from the "regola delgeber" very similar to that given by GHALIGAI and including the seven terms whose derivation is uncertain. Prince BONCOMPAGNI[1]) states that the algebra translated by GUGLIELMO is an extract from the algebra of ARYABHATA "qui avait passé en Arabe", but upon what authority this assertion is based BONCOMPAGNI does not state.

COSSALI[2]) refers to a "Ragionamento di Algebra" by RAFFAELE CANACCI (XIV Century) which contained references to an earlier work by GHUGLIELMO LE LUNIS, of whom CANACCI makes the following statement: "La regola dell' argibra, la quale regola GHUGHELMO DI LUNIS la traslato darabico a nostra lingua". This is assumed by COSSALI to mean that GUGLIELMO translated into Italian the algebra of AL-KHOWARIZMI. MARCO AUREL[3]) and ANTICH ROCHA[4]) of Gerona both refer to GUGLIELMO as the first to translate the rules of algebra from Arabic into Italian, basing their assertion probably on GHALIGAI. The question of the language used by DE LUNIS[5]) is further complicated by the fact that the known manuscripts from his hand are in Latin.[6]) COSSALI says also that CANACCI places "geber" as

1) *Nouvelle biographie générale* **32**, Paris 1860.

2) *Origine, trasporto in Italia . . . dell'Algebra* **1**, p. 7 and p. 25. Through the courtesy of the Librarian of the "Biblioteca Nazionale" of Florence I am able to give the beginning and end lines of the Cod. Palat. 567 of the fifteenth century which is from the hand of RAFFAELLO DI GIOVANNI CANACCI "ciptadino fiorentino arismetrico e geometro". The introduction begins: "La regola dell'argibra, la quale reghola GHUGLELMO DE LUNIS la traslatò d'arabico a nostra linghua: e secondo el detto GHUGELMO ed altri, dichono questa essere chonposta da uno maestro arabo . . ." The introduction ends: "e LIONARDO PISANO, nella quindecima parte hovuero chapitolo, dice: la reghola dell'argibra amuchabile è detta reghola d'oppositione e di restauratione, cioè di ristoramento. E questo chiaramente pe' chasi si chonprenderà". The work itself begins: "Prima, dou' è fondata la prima reghola de' primi chapitoli, coè de' primi tre termini. Volendo l'autore mostrare le sei prime reghole, dimostra quelle hauere di bisogno di tre proprieta che auenghono alla quantità". And ends: "Adunche dirai: che'l primo per sé solo farebbe il lauoro in 60 (di), piú Radice di 3500; e'l sechondo per sé solo farebbe il lauoro in 5 di, piú Radice di 35, sichome di sopra dicemo; e chosi hoseruerai in simigliante Ragione, ennonne errerai, adunche nota bene el modo acò che l'entenda".

3) *Libro primero, de arithmetica algebratica,* Valencia 1552.

4) *Arithmetica,* Barcelona 1565, fol. 251 verso.

5) ENESTRÖM, Biblioth. Mathem., 8_3, 1907/8, p. 81.

6) M STEINSCHNEIDER, *Die europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts;* Sitzungsber. d. phil.-hist. Klasse d. Akad. d. Wissensch. in Wien **149**, 1905, p. 80. WILHELMUS DE LUNIS is given as translator of AVERROIS "Comment. super lib. introduct. PORPHYRII"; of ARISTOTLE, "Praedictamenta"; and possibly of "Pereyrmenias" (peri Hermeneias). All of these in Ms. Amplon. Qu. 318, 3, 4, 5.

first of the seven Arabic names of analytical operations, adding that de Lunis interpreted this "geber" as "recuperamento". The Latin manuscript[1]) of Al-Khowarizmi's algebra in the Plimpton collection translates "algebra et almuchabala" by "recuperationis et oppositionis". The seven terms do not occur in this version nor in any other now known.

The fourteenth book of the manuscript under discussion follows "Maestro Biagio" who died, it is stated, about 1340. This is too early to refer to Biagio da Parma[2]) who taught in Pavia, Padua and Bologna from 1374—1416, but an "altro maestro Biagio" doubtless refers to this man.

Leonard of Pisa appears as the authority for the first chapter of the fifteenth book while the second and third chapters were to be devoted to the writings of an unplaced "Maestro Giouanni" and "sottile maestro Antonio" respectively. Unfortunately only the first chapter was completed. "Maestro Antonio" would correspond in time and place, as most of the references are to Florence and vicinity, to Antonio Biliotti[3]) of Florence who taught in Bologna in 1383. "Maestro Gratia de Castellani frate di santo agostino gran teologho de castellani" is mentioned as the author of an algebra which was written about 1340. Fabricius[4]) places Gratianus Florentinus about 1380 and ascribes to him "Lectiones Theologicae" and "Quaestiones super libros sententiarum". Chevalier[5]) adds the appellation Castellani so that the identification would seem to be complete. "Maestro Michele (Scotus?)" is mentioned as father of "Maestro Marianus" and a "Maestro Lucha" is named as one of the teachers, undoubtedly of mathematics. Paolo Dagomari is mentioned as a friend and pupil of the first Biagio.

Boethius appears with Leonard of Pisa and Jordanus in the introduction to the arithmetic, but more noteworthy is the reference to Al-Khowarizmi. "E secondo che dice nel primo capitolo lalgorismo elnumerare o vero rapresentare le fighure e dare loro lanumeratione nota del numero apropriato a quelle fighure. Et a bisognia a rapresentare uno numero 4 atti. primo la figura. secondo la differentia. terço el luogho. el quarto ellimite." Some of this and the following explanation of figure, difference, place and limit are evidently from Sacrobosco's *Algorismus vulgaris*.

---

1) D. E. Smith, *Rara arithmetica*, p. 454—456.

2) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2^2, Leipzig 1900, p. 165—166; Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* **2**, p. 209.

3) Cantor, loc. cit. p. 164; Libri, loc. cit. p. 205 Note 1.

4) *Bibl. latina mediae et infimae aetatis* **3**, Florence 1858.

5) *Répertoire des sciences historiques du moyen âge* **1**, Paris 1905.

Incomincia il 13⁰ libro di questo trattato nel qual si contiene come e in che modo sasoluono e casi per la regola de Algebra amucabale. E prima la diuisione del detto libro.

Rendiamo gratie al altissimo. Cosi comincia el testo de laghabar arabico nella regola delgeber la quale noi diciamo algebra, la quale regola dalgebra secondo GHUGLIELMO DE LUNIS traslatore importa in queste 7 nomi cioe. Geber. Elmelchel. Elchal. Elchelif. Elfatiar. Difarelburam. Eltermem. E quali nomi secondo el detto GUGLELMO sono cosi interpetrati. Geber. E quanto a dire recuperatione impero che come per lo sequente si comprendera nella recuperatione di 2 parte iguali sasolue il caso. Elmelchel. E quanto a dire exemplo, ouero asomiglamento impero che labsolutione de casi sitruoua per absomigliare la quantita posta alcaso dato Elchal. E quanto a dire opositione, perche di 2 quantita trouate luna e oposta alaltra. E quando non sono 2 quantita oposte, il caso e insolubile. Elchelif. E quanto a dire dispositione, impero che benchelle 2 quantita oposte sieno, e non abbino dispositione ariso delle regole, lo caso sarebbe fuori delle regole, e pero a bisogna le quantita disposte. Elfatiar. E detto differentia, che differentia e infra nomi della detta regola, che non essendo differentia la regola sarebbe una e sarebbe contro allonpossibile. Diffarelburam. E detto ragione impero che con ragione tutto si mostra e ragioneuole sono e casi per la regola absoluti. Eltermem. E detto finizione impero chelfine ragioneuole della regola e trouato quando propositione delle parti abiamo trouato.

E LIONARDO PISANO nella terça parte del 15 capitolo dice la regola della algebra amuchabale e detta regola doppositione e di ristorautione cioe di ristoramento come chiaro si uedra pe casi. E acciò che questa regola sia bene compresa diuidero el detto libro in 3 capitoli. Nel primo sia la dimostratione chiara per figure delle dette regole. Nel secondo sia come e nomi ouero proprieta della detta regola a bisogneuoli si multiplichano. Nel terço e ultimo certe regole sopra le 6 passate e le 6 ancora dando 2 casi exemplari a ciaschuna regola.

El primo capitolo del 13⁰ libro nel quale si chiarifica per figure geometre le 3 regole composte del algebra.

Al computamento della regola del algebra e amucabale 3 proprieta[1]) chessono in ciascuno numero si considera. E la prima e quando si considera per radice e chiamiallo cosa. El secondo e quando

1) LEONARD of Pisa uses "tres proprietates, que sunt in quolibet numero" (*Scritti* **1**, Roma 1857, p. 406). The designation of the cases as simple (three) and composite (three) is also used by LEONARD as well as in the LIBRI version of AL-KHOWARIZMI.

si considera per quadrato e chiamasi censo. Ella terça considerandola per suo esse semplice, e allora lo diciamo dramme. E in luogo delle quantita la dramma e uilissima quasi come il punto nella linea.[1])

La cosa adunque e radice del censo, onde lo censo e quadrato della cosa e perche ogni quadrato e fatto della sua radice in se multiplichata, lo censo nasce della cosa in se multiplichata. Impero che e sua radice.

Le dramme sono dette numero semplice impero chelle si compongono solamente dunitadi, malla cosa e il censo sono conposte in loro essere. E pero le dramme non anno rispetto alle cose, ne alli censi, cioè a dire del numero sono sapute lunitadi ma della cosa ne del censo non sono sapute lunitadi. E pero diciamo dramma essere numero semplice ella cosa e radice cioe quello che in se multiplichato fa quel numero. El censo e quello che nasce della cosa cioe della radice in se multiplichata. Lo numero semplice cioe dramme e quantita che con parole si dice in tal modo che non a saputa proportione alla radice nello censo.

Qvando della radice cioè cosa, o del censo si uogliono sapere lunitadi e di bisognio che infralloro saguaglino, lo quale aguagliamento in 6 modi si puo fare, de quali modi e 3 si chiamano semplici, e gli altri 3 composti. Onde prima diremo degli agugliamenti semplici.

El primo de semplici aguagliamenti e quando lo censo saguaglia alle cose, lo secondo quando lo censo saguaglia allo numero, lo terço quando le cose saguagliano al numero.

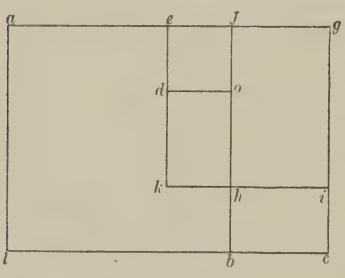
Lo censo quando saguaglia alle cose. E come dicendo lo censo saguaglia a 5 sue radici. A dimandasi quanto e la cosa. Onde quando lo censo e iguagli a 5 cose si dimostra la cosa essere 5, e lo censo 25, cioe la multiplichatione del 5 in se medesimo impero che sel censo e quanto 5 sue radici seguita il censo essere quanto la sua radice multiplichata in 5. e tanto fa a multiplichare la radice in se medesima quanto a multiplichare la radice per 5 cioe tanto e a multiplichare la radice per la radice quanto la radice per 5 e pero seguita la radice essere 5 e il quadrato sia 25. E pero e regola che quando il censo e iguiali alle radici chella cosa uarra il numero della radice. E il censo uarra il quadrato del detto numero. E quando fusse parte di censo o multiplice di censo iguali a radici sempre lo arecha a uno solo censo come dicendo $\frac{1}{3}$ di censo e iguali a 4 cose. Doue tutto

1) Paciuolo says: "Unde numero ene in la pratica algebratica de Arithmetica: quello che e ponto in linea in Geometria: e commo instans in tempore: e causa in rebus. E cosa commo linea. E censo commo quadrato" *(Summa,* 1523 ed., fol. 144 verso).

il censo sara Iguali a 12 cose. E quando il censo sia iguali a 12 cose la cosa sia 12 e il censo sia 144. E dicendo 5 censi sono iguali a 10 sue radici sia uno censo iguali a 2 sue radici. E quando uno censo e iguali a 2 sue radici il censo sia 4 ella cosa 2. E pero quando sia lo censo acrescuito ouero diminuito sempre a recarlo a uno censo. Cioe a dire quando ti uenisse piu che uno censo, ouero meno a uno censo lo ritorna. E questo e quando lo censo e iguali alle cose.

This treatment of the first form as here given follows closely the treatment of the same case by AL-KHOWARIZMI. The same is true of the following five cases which are in the same order and accompanied by the same numerical problems as in the work of the great Arab writer. The geometrical explanation of the three composite types . . . $ax^2+bx=n$, $ax^2+n=bx$ and $ax^2=bx+n$ differs from AL-KHOWARIZMI mainly in that for the fifth type a geometrical explanation is given to correspond to the second solution in which the half of the roots is added to the square root of the difference between the square of half the roots and the given number. I will add this explanation.

E perche abbiamo detto che sella radice del rimanente sagiugne alla meta delle cose che tanto uerra la cosa, che per figura lo uoglio mostrare. Sia la superficie ab superficie del censo. e sia quadrata, alla quale superficie agiugnero uno superficie diretti angoli e dequedistanti lati, la quale sia 21 per numero. la lungecça della quale sara Iguali al uno de lati del censo. E sia la superficie fc. Adunque tutta la superficie ac sara uno censo e 21 dramma cioe 10 cose. Adunque gli lati ag, lc sono ciaschuno 10 per numero, impero chello lato al, gc sono una cosa, di poi diuidero la linea ag in [fol. 281 verso] 2 parti iguali sopra il punto e constituiro uno quadrato fatto della detta linea eg e sia quadrato $ekig$ ella sua possessione sia 25 per numero, del quale quadrato trarro la superficie fc adunque rimarra la superficie he meno la superficie hc e di poi trarro la superficie hc della superficie he in questo modo che piegliero della linea ke, hf lo iguali della linea bc. e sia kd, ho. di poi menero la linea do equedistante e iguali alla linea kh. Dico chella superficie dh e iguali alla superficie hc che chiaro si manifesta impero che do, hk e iguali al hb che cosi si mostra af, fb sono iguali cioè ciascuno e lato del censo, ello lato ae, fh sono iguali, impero che ciascuno e meta del ag. Onde



traendo ae del af rimane quel medesimo che a trarre fh del fb cioe eg iguali al hb elli lati do, hk sono equedistanti e iguali allo lato cf. adunque la superficie dh e iguali alla superficie hc. Onde e mostro che atrarre la superficie fc del quadrato ei rimane la superficie eo, la quale mostrerro essere quadrata in questo modo. kd e iguali del fg per che lo ponemo iguali al bc, e pero tanto rimane a trarre fg del ge quanto kd del ke, e pero de e iguali al ef. adunque la superficie eo e quadrata, la cui potentia e 4, impero chelquadrato ei e 25 ella superficie fc e 21 per numero che tratto di 25 rimangono 4 per lo quadrato eo, ella sua radice e 2. e tanto e ciascun suo lato, onde agunto 2 cioe ef con ae che e 5, fanno 7, per lo lato del quadrato ab, cioe lato del censo. E pero e regola chessi debba dimecçare le cose, e multiplichare quella meta in se e trarne el numero, ella rimanente agugnere alle cose, e tanto uarra la cosa.

The geometrical explanation of the sixth type ($3x + 4 = x^2$) follows also the demonstration given by Al-Khowarizmi; indeed the lettering of the figure corresponds exactly to the lettering in the corresponding figure in the Libri version. However this writer adds another demonstration with a different drawing. "Ma ancora per altra figura uoglio questa medesima dimostratione chiarire" The first chapter of this book closes with the following:

E cosi abiamo diterminato tutti e modi del algebra e dichiarato con aperte dimostrationi a questa modi, tutte le questioni chessi reducono alla detta regola a non appartenersi, quale al primo quale al secondo, etc. E benche L. Pisano con chiare dimostrationi que medesimo mostri nientedimeno operese (?) queste come piu antiche e scritte nel detto libro del agabar.

The second chapter of the thirteenth book deals with the operations of addition, subtraction, multiplication and division of algebraic quantities.

El secondo capitolo del 13° libro nel qual si dimostra come e nomi di detta Regola ouero e termini si trauagliano infralloro, ouero con altre quantita. Debbi sapere che termini del algebra sono nella proportionalita cioe che detto termini ascendono nella detta proportionalita. Come diciammo cosa che e il primo. Censo che e il secondo. Cubo che e il terço. Censo di censo che e il quarto. Cioe tal parte e la cosa del censo quanto il censo del cubo. E quanto il cubo del censo di censo. E cosi digradando in infiniti termini diuerani. Come sono cubi relati. Ouero cubi di censo. E cubo di cubo . . .

An illustration of the multiplication is the following: «cose per cubi fanno censi di censi», to which is added a numerical example. The sub-

traction is illustrated by this quotation: «E simulmente dicendo trai 2 censi del 8 cubi, rimangono 8 cubi meno 2 censi».

The third chapter of the thirteenth book brings thirty-six types of equations solvable by quadratic methods or simple extraction of roots up to the sixth root, together with numerical problems illustrating the same, as in the table here given.

1. $ax^2 = bx$.	19. $ax^4 = bx^3 + cx^2$.
2. $ax^2 = n$.	20. $ax^5 = bx^4$.
3. $ax = n$.	21. $ax^5 = bx^3$.
4. $ax^2 + bx = n$.	22. $ax^5 = bx^2$.
5. $ax^2 + n = bx$.	23. $ax^5 = bx$.
6. $ax^2 = bx + n$	24. $ax^5 = n$.
7. $ax^3 = n$.	25. $ax^5 + bx^4 = cx^3$.
8. $ax^3 = bx^2$.	26. $ax^5 + cx^3 = bx^4$.
9. $ax^3 = bx$.	27. $ax^5 = bx^4 + cx^3$.
10. $ax^3 + bx^2 = cx$.	28. $ax^6 = bx^5$.
11. $ax^3 + cx = bx^2$.	29. $ax^6 = bx^4$.
12. $ax^3 = bx^2 + cx$.	30. $ax^6 = bx^3$.
13. $ax^4 = bx^3$.	31. $ax^6 = bx^2$.
14. $ax^4 = bx^2$.	32. $ax^6 = bx$.
15. $ax^4 = bx$.	33. $ax^6 = n$.
16. $ax^4 + bx^3 = cx^2$.	34. $ax^6 + bx^5 = cx^4$.
17. $ax^4 = n$	35. $ax^6 + cx^4 = bx^5$.
18. $ax^4 + bx^2 = cx^3$.	36. $ax^6 = bx^5 + cx^4$.

El terço e ultimo capitolo del 13° libro doue si dimostra e casi sopra le 6 regole dette. Avendo brieuemente mostro la cagione del dimeccamento delle cose, e di necessita uolendo auere praticha che io dimostri le 6 chiarite regole con altre regole di quelle nate, ponendo a ciaschuna 2 exempli sempre con breuita parlando. E pero starai attento. E prima.

The first six types are the same as in the first chapter. The illustrative problem given first is that two numbers are to be in the ratio of 2 to 3 and such that their product is to equal 9 times their sum. This leads to the equation, $2x \cdot 3x = 9(5x)$, or $6x^2 = 45x$. The seventh type is «Quando e cubi sono iguali al numero«. The problem is stated thus.

Truoua 3 numeri che multiplichato il primo nel secondo, e qual che fa multiplichato per lo terço faccian 192, e tal parte sia il primo del secondo come 2 di 3, el secondo del terço come 3 di 4.

The resulting equation is $24x^3 = 192$, from which $x^3 = 8$ and $x = 2$. The thirty-sixth form is $ax^6 = bx^5 + cx^4$.

Questo basti quanto al presente capitolo, e benche alcuna altra regola sia scritta da molto quanto sia necessario di quella dirimo, queste scritte sono quelle chessi tragono delle 6 prime regole. Adunque e questo 13° libro farem fine. E direm deo gratias.

Lo quattordecimo libro di questo trattato, nel qual si dimostrano casi exemplari alle regola del algibra secondo che scriue maestro Biagio, el qual libro nonna diuisione.

In questo libro mi par daporre certi casi che scriue maestro Biagio nel suo trattato di pratica non perche gli altri che anno scripto non dichino assai copiosamente. Ma perche lui fu secondo che scriue maestro Gratia De Castellani, el primo che a una buona pratica ridusse el detto trattato impero che nel 1340 o circha mori. che innançi al lui non cerastato chi auesse se non per un lungo modo trattato di questa praticha. E nel suo tempo Lionardo Pisano fiori. Effu el detto maestro Biagio maestro e conpagno del gran maestro Paolo, el quale e riposto in santa trinita che al tempo che fu de nostri magnifici signori, cioe nel [blank space] dimostro quanto era la sua scientia. Adunque tornando a casi di maestro Biagio detto intendo scriuergli secondo el suo ordine. E pero starai attento al dire. Cosi dicendo.

1ª. Truoua 1° numero che il terço e il quarto di quel numero sia radice del detto numero. A questo non credo maestro Biagio considerasse. E pero diciamo truoua 1ª quantita doue e dice truoua 1° numero sarai positione che quella quantita sia 1° censo, doue il terço e il quarto di quel censo sono $\frac{7}{12}$ di censo, e quanto diciamo che e la radice duno censo, cioe 1ª cosa. Adunque e diremo che $\frac{7}{12}$ di censo sieno iguali a 1ª cosa, che e la prima regola, che arecherai a 1° censo, e arai 1° censo iguali a $1\frac{5}{7}$ cosa. E dirai adunque la cosa uale $1\frac{5}{7}$, e il censo uale $2\frac{46}{49}$. E dirai perche noi ponemo chella quantita fusse 1° censo. Adunque fu quella quantita $2\frac{46}{49}$.

2ª. Truoua 1ª quantita che trattone il terço e il quarto. E il rimanente sia radice di quel numero. Farai positione che quel numero sia 1° censo, del quale il $\frac{1}{3}$ e il $\frac{1}{4}$ trattone dun censo, rimangono $\frac{5}{12}$ di censo, e questo e quanto la radice di 1° censo cioe 1ª cosa, onde arecherai a 1° censo obseruando la prima regola. E arai 1° censo iguali a $2\frac{2}{5}$ cose. E dirai la cosa ualere $2\frac{2}{5}$. E il censo uale $5\frac{19}{25}$. E dirai che quel numero sia $5\frac{19}{25}$, perche noi ponemo che quel numero fusse 1° censo.

This book includes in all 114 problems which reduce to the types discussed in the preceding section. The majority reduce to the first six types.

Some of the problems ascribed to the Practical Treatise of Maestro BIAGIO.

1. $\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}=x.$
2. $x^2-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{4}=x.$
3. $x^2-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}+4\right)=x.$
4. $\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{x}{3}\right)=x.$
5. $\left(\frac{1}{3}x+3\right)\left(\frac{1}{4}x+4\right)=x.$
6. $\sqrt{x-\frac{1}{3}x}=\frac{3}{4}x.$
7. $\left(x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x\right)^2=20x.$
8. $\left(x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+4\right)^2=30x.$
9. $\left(x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+4\right)\left(\frac{1}{2}x\right)=40.$
10. $\left(\frac{3}{4}x\right)\left(\frac{4}{5}x\right)=\sqrt{20}.$
11. $(4x)\,(5x)=100.$
12. $(4x)^2+(5x)^2=100.$
13. $(4x)\,(5x)=4x+5x.$
14. $(4x)^2+(5x)^2=4x+5x.$
15. $(2x)\,(3x)=6\,(2x+3x).$
16. $(2x)^2+(3x)^2=7\,(2x+3x)+4.$
17. $\frac{x+2}{x}=7.$
18. $x(x+2)=30.$
19. $x^2+(x+2)^2=30.$
20. $(x+2)^2-x^2=30.$
21. $\left(3x\right)\left(2\frac{2}{3}x\right)=32.$
22. $\left(3x\right)^2+\left(2\frac{2}{3}x\right)^2=30+3x+2\frac{2}{3}x.$
23. $(3x)\,(4x)\,(5x)=3x+4x+5x.$
24. $\left(2x\right)\left(3x\right)\left(7\frac{1}{2}x\right)=10.$
38. $x^2+(10-x)^2=90.$
58. $(2x)^2-16=1000$ («Uno fa 2 uiaggi al primo uiaggio radoppia e suoi d. e spende 6 d. al secondo si trouo multiplichati e suoi d. per se medesimo e spese 16 d. e in fine de detti uiaggi e si trouo 1000 d. A dimandasi con quanti si mosse». The writer assumes that the traveller starts with $(x+3$ d.) in money.

The fifth problem gives the equation $\left(\frac{1}{3}x+3\right)\left(\frac{1}{4}x+4\right)=x$ or $\frac{1}{12}x^2+2\frac{1}{12}x+12=x$, «la quale aguagliamento non puo essere. E pero dirai la questione non essere posta ragioneuole». The writer rejects, of course, an imaginary as indeed he does negative solutions. However, complicated radicals appear as in the eighth example in which the answer is given «Chel detto numero fusse 1^a cosa fu $3\frac{165}{361}$ piu radice di $5\frac{74175}{130321}$». Questions in regard to dividing 10 into two parts satisfying given conditions are common as in problem 38, «Fa di 10 2 parte per se medesima e quelle 2 multiplichationi agiunte insieme faccino numero 90». The resulting equation is $x^2+5=10x$. Another rather interesting problem (No. 66) states that a trader gains on each journey 25 per 100 and when his trips are completed he has made a total gain of 40 per 100. The question is, how many voyages has he made? Evidently the number of voyages is between 1 and 2, so the solution procedes. The number is placed at «1^0 uiaggio e 1^a cosa di uiaggio». The conclusion is that 1 voyage and $\frac{12}{25}$ of a voyage were made.

Incomincia il quindecimo libro di questo trattato. Nel qual si contengono chasi dalquanti maestri antichi. E prima la diuisione del detto libro.

Le dispute sono state grande e diuerse proponendo quali sieno stati di piu excellentia di sapere O maestro Paolo, O maestro Antonio, ouero maestro Giouanni. E certamente dichi a insegnato, questi 3, di gran lunga gli anno auançati, e ciascheduno copiosamente suoi trattati a mostro. E per quel chessi troui dal 1300 in questa sono statti chiascritto, benche Lionardo Pisano fosse intorno allo detto tempo, dal quale tempo sono stati questi maestri Cioe come gia dissi maestro Biagio che circha al 1340 anni mori. Al qual tempo el grande maestro Paolo fiori che circa al 1360 duro. E dopo questo fu maestro Antonio benche morisse giouane, dopo il quale fu maestro Giouanni che circha al 1440 mori. Furoni molto altri maestri, ne tempi di questi come maestro Michele padre di maestro Mariano, maestro Lucha un altro maestro Biagio e al presente di piu assai copia lattera nostra ne douitiosa mano a comperatione de passati, e pero tacio e nomi loro, che a comperatione de passati non meritano esse chiamati scolari . . . [blank space] ragioni. E perche quella di costroro e in pie e tutto il di si puo chiarire e douto. Concio sia cosa che fuori di chi a insegnato sia ancora stati di quelli chessono excellenti in queste scientie, fra quali fu maestro Gratia di santo agostino gran teologho de castellani fu al tempo di maestro Giouanni. Adunque il presente libro in 3 capitoli diuidero. Nel primo ponendo e casi che Lionardo Pisano nell ultima parte della praticha darismetricha scriue. Nel secondo che scriue maestro Giouanni pigliandi e casi sopra e passati. Nel terço scriuerro parte di casi sottili scritti dal sottile maestro Antonio. E per rispondere alla disputa qual di que 3 auançasse luno laltro.

Fifty-seven problems from Leonard of Pisa's work are presented, but unfortunately, as noted above, the manuscript was here left unfinished. So that not only are the works of Antonio and Giouanni lost to us but also the name of the writer of this manuscript which would doubtless have been inscribed on the last page.

Ein Brief Eulers an d'Alembert.

Von PAUL STÄCKEL in Karlsruhe.

Von dem Briefwechsel zwischen EULER und d'ALEMBERT, der wenigstens zeitweise ziemlich lebhaft gewesen zu sein scheint, ist bis jetzt wenig bekannt geworden. D'ALEMBERT selbst hat 1768 Auszüge aus Briefen EULERS an ihn vom 27. Dezember 1748, 3. Januar 1750, 26. Juli 1763 und 20. Dezember 1763 veröffentlicht, die sich auf die Lehre von den imaginären Größen und das Problem der schwingenden Saite beziehen.[1]) Dazu kommen noch die Briefe vom 15. April 1747, 19. August 1747, 30. Dezember 1747, 28. September 1748 und einer ohne Datum aus dem Jahre 1749, die HENRY, nebst dem vollständigen Briefe vom 27. Dezember 1748, im Jahre 1886 herausgegeben hat[2]); die Originale befinden sich in der Bibliothek der Pariser Akademie der Wissenschaften. Hierzu bildet ein kürzlich aufgefundener Brief EULERS an d'ALEMBERT vom 15. Februar 1748 eine willkommene Ergänzung. Er wird von JACOBI in dem langen Schreiben an P. H. v. FUSS vom März/April 1848 erwähnt; JACOBI fügt hinzu, das Original besitze Herr Dr. FRIEDLÄNDER, der ihm erlaubt habe, eine Abschrift davon zu nehmen.[3]) Es lag nahe zu vermuten, daß es sich um denselben Dr. FRIEDLÄNDER handle, der 1847 in CRELLES Journal für die reine und angewandte Mathematik EULERS *Commentatio de matheseos sublimioris utilitate* zum Abdruck gebracht hatte[4]) und der, nach CRELLES Angabe, Beamter an der Königlichen Bibliothek zu Berlin gewesen war. Wenn sich auch hieraus feststellen ließ, daß FRIEDLÄNDER im Jahre 1860 gestorben sei, so blieben doch alle Bemühungen, etwas über den Verbleib

1) *Opuscules mathématiques*, T. 4, Paris 1768, S. 342—343, 146, 162; vgl. G. ENESTRÖM, *Verzeichnis der Schriften LEONHARD EULERS*, erste Lieferung, Leipzig 1910, S. 97, Nr. 365.

2) Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), S. 136—148; vgl. ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 858.

3) *Briefwechsel zwischen JACOBI und FUSS*, herausgegeben von W. AHRENS und P. STÄCKEL, Leipzig 1908, S. 59; vgl. Bibl. math. (3) **8** (1908), S. 290.

4) Journal für Math. **35** (1847), S. 106—116; vgl. ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 790.

seiner Autographen-Sammlung zu ermitteln, vergeblich, bis Herr Prof. Dr. Darmstädter in Berlin, der an den Nachforschungen teilnahm, in Erfahrung brachte, daß die Sammlung von dem kürzlich verstorbenen Geheimen Justizrat Lessing in Berlin angekauft worden war. Gegenwärtig befindet sich der Brief Eulers an d'Alembert sowie das Manuskript der erwähnten Eulerschen Abhandlung im Besitz von Herrn Rittergutsbesitzer G. Lessing in Berlin, der die Freundlichkeit gehabt hat, den Abdruck des Briefes zu gestatten.

Zu dem Briefe selbst ist folgendes zu bemerken:

1. Die Andeutungen über den Einfluß, den die Abweichung der Himmelskörper von der Kugelgestalt oder genauer die Ungleichheit der auf ihren Schwerpunkt bezogenen Hauptträgheitsmomente auf ihre Bewegungen hat, sind von Euler in der Abhandlung: *De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda*[1]) ausgeführt worden; nach Jacobi wurde diese Abhandlung am 4. Dezember 1749 in der Berliner Akademie gelesen. Denselben Gegenstand betraf wohl eine von Leonhard Euler am 23. November 1758 der Berliner Akademie vorgelegte Abhandlung: *Recherches des forces dont les corps célestes sont sollicités en tant qu'il ne sont pas sphériques;* denn man wird der Vermutung Jacobis beistimmen müssen, daß die von dem Sohne Johann Albrecht Euler am 7. November 1765 vorgelegte und in den Mémoires[2]) der Berliner Akademie abgedruckte Abhandlung gleichen Titels in Wirklichkeit von Leonhard Euler herrühre.[3]) Endlich vergleiche man Leonhard Eulers 1759 verfaßte *Astronomia mechanica,* in der die Frage nach dem Einfluß der Abweichung von der Kugelgestalt ausführlich behandelt wird.[4])

2. Nachdem 1745 das *Commercium philosophicum et mathematicum virorum celeb. G. Leibnitii et Joh. Bernoulli* erschienen war, hatte sich die Aufmerksamkeit auf den freundschaftlichen Streit gerichtet, den die beiden vom März 1712 bis Juli 1713 über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen führten. Euler hat dazu Stellung genommen in der Abhandlung: *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires,* die am 7. September 1747 der Berliner Akademie vorgelegt wurde[5])

---

1) Novi comment. acad. sc. Petrop. **3** (1750/51), 1753, S. 235—253; Enestrom, a. a. O. Nr. 193. 2) **21** (1765), 1767, S. 414—432.

3) Vgl. meinen Aufsatz: *Johann Albrecht Euler;* Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich **55** (1910), S. 63—90.

4) *Opera postuma* **2** (1862), besonders S. 188—193 und 226—237; Enestrom, a. a. O. Nr. 834.

5) Abgedruckt *Opera postuma* **1** (1862), S. 269—281; Enestrom a. a. O. Nr. 807.

und von der eine Umarbeitung unter den Titel: *De la controverse entre Mrs. LEIBNITZ & BERNOULLI sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* in den Mémoires der Berliner Akademie abgedruckt worden ist.[1]) Die Frage nach der Bedeutung von e^x, wenn der Exponent eine gebrochene Zahl ist, wird auch in § 14 der zuerst genannten Abhandlung gestreift; EULER meint hier, daß die Eindeutigkeit durch die Benutzung der Potenzreihe für e^x gesichert werde.

3. Die Entwicklung des unendlichen Produktes

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\ldots$$

nach Potenzen von x hatte EULER schon in der Abhandlung: *Observationes analyticae variae de combinationibus* (Comment. acad. sc. Petrop. **13** [1741/43], 1751, S. 93) betrachtet, die nach den Akten am 6. April 1741 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde[2]), — er gibt hier sogar an, daß die Exponenten das Gesetz $\frac{1}{2}(3nn \pm n)$ befolgen, und daß das Vorzeichen des Koeffizienten von x^n Plus oder Minus ist, je nachdem n gerade oder ungerade gewählt wird. Der Zusammenhang mit der *Partitio numerorum*, d. h. der Frage, auf wieviele Arten sich eine positive ganze Zahl n als Summe eben solcher Zahlen darstellen lasse, wird dadurch gegeben, daß, wie EULER bemerkt, die Anzahl der Arten sich als Koeffizient von x^n bei der Entwicklung des reziproken Wertes jenes unendlichen Produktes nach Potenzen von x herausstellt.[3]) Genauere Ausführungen hierüber finden sich in der Abhandlung: *De partitione numerorum* (Novi comment acad. sc. Petrop. **3** [1750/51], 1753, S. 125–169), die zwar nach den Akten am 26. Januar 1750 der Petersburger Akademie vorgelegt worden ist, die jedoch vor Juni 1747 verfaßt sein dürfte. Denn am 22. Juni dieses Jahres las EULER in der Berliner Akademie die Abhandlung: *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, die 1751 in der Bibliothèque impartiale **3**, S. 10—31. abgedruckt wurde[4]) und die ihrem Inhalte nach im wesentlichen übereinstimmt mit der Abhandlung: *Observatio de summis divisorum* (Novi Comment. acad. sc. Petrop. **5** [1754/55], 1760, S. 59—74), welche nach den Akten am 6. April 1752 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde;

1) Mém. de l'acad. de sc. de Berlin **5** (1749), 1751, S. 139—179; ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 168. In dem Briefe an d'ALEMBERT vom 19. August 1747 spricht EULER von der Abhandlung Nr. 807 so, als ob sie schon der Akademie vorgelegt worden sei.

2) Vgl. auch den Brief EULERS an N. BERNOULLI vom 1. September 1742, *Opera postuma* **1** (1862), S. 526—527.

3) Vgl. auch *Introductio in analysin infinitorum* **1** (1748), Cap. 16: „De partitione numerorum".

4) Wieder abgedruckt *Commentat. arithm.* **2** (1849), S. 639—647, *Opera postuma* **1** (1862), S. 76—84; ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 175.

wahrscheinlich ist sie identisch mit der am 9. September 1751 in der Berliner Akademie gelesenen Abhandlung: *Mémoire concernant un théorème arithmétique.*[1]) Einen Beweis für Potenzentwicklung jenes unendlichen Produktes hat Euler erst in der Abhandlung gegeben: *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum* (Novi comment. acad. sc. Petrop. **5** [1754/55], 1760, S. 75—83); das Exhibitionsdatum ist unbekannt.

A Monsieur d'Alembert.

Monsieur

Je suis bien ravi que le moyen dont Vous Vous êtes servi a eu un si bon succes pour retablir Votre santé, et je souhaite qu'elle soit d'une longue durée malgré les sublimes recherches, dans lequelles Vous Vous enfonces. J'ai vu avec bien du plaisir que Vous penses comme moy sur les irregularites, qui paroissent se trouver dans les forces celestes, car j'avois dabord fait cette remarque, que quoiqu'on accorde que les moindres particules de la matiere s'attirent mutuellement en raison reciproque des quarres des distances, il n'en suive pas, que cette meme loi ait lieu dans les corps d'une grandeur finie, à moins que tous les deux corps, l'attirant, et l'attiré, ne soient spheriques et composés d'une matière homogene, ou d'une autre forme qui revienne au meme. Les recherches, qu'on a faites sur l'attraction de la terre, en tant que sa figure n'est pas spherique, donnent clairement à connoitre, que sa force d'attraction ne suit pas exactement la raison reciproque des quarrés des distances, mais qu'elle est comme $\frac{\alpha}{zz} + \frac{\beta}{z^4} + \frac{\gamma}{z^6} +$ etc. z marquant la distance. Et partant par cette raison la force dont la lune est tirée vers la terre ne sera pas exactement en raison reciproque du quarré de la distance; quand meme le corps de la terre seroit exactement spherique. Mais si le corps de la lune etoit allongé, cette force souffriroit une double irrégularité, et pour m'asseurer de ce dernier derangement, j'avois aussi, comme Vous consideré le corps de la lune, comme s'il étoit composé [Fig. 1] de deux globes A et B joints d'une verge immaterielle AB, où se trouve le centre de gravité en L. Ayant supposé, que la direction de la verge AB tombe constamment presque dans la ligne LT tirée vers le centre de la terre T, à moins que le mouvement du point L tantot plus tantot moins rapide n'y produise quelque declinaison j'ai trouvé aussi comme Vous, que le mouvement du point L se doit faire à peu

Fig. 1.

1) *Briefwechsel Jacobi-Fuss*, S. 59; vgl. Bibl. math. (3) 8 (1908), S. 290.

près dans une ellipse, mais dont la ligne d'absides avance: et le calcul m'a fourni cette regle, que le mouvement moyen de la lune sera au mouvement de l'apogèe comme LT^2 à $6\,LA\cdot LB$, et partant cette figure de la lune devroit absolument causer un mouvement progressif de l'apogèe. Donc puisque suivant les observations le mouvement moyen de la lune est au mouvement de l'apogèe comme 1 à 0,0084473, et que la theorie tirée de la force du soleil ne donne pour cette raison que 1 à 0,0041045: où il manque dans le mouvement de l'apogèe la partie 0,0043428, à la quelle j'ai egalé l'effet maintenant trouvé $\frac{6\,LA\cdot LB}{LT^2}$. Donc faisant $LA = LB$, et supposant $LT = 60$ demi-diametres de la terre il en vient $LA = LB = 1\frac{1}{4}$, et partant AB seroit de $2\frac{1}{2}$ rayons de la terre, ou la longitude de la lune AB surpasserait le diameter de la terre: ce qui me parait aussi, comme Vous le remarques, insoutenable. Au reste pour le mouvement de libration je trouve, que la ligne AB devroit presque toujours etre parallele à celle qui represente le lieu moyen de la lune, et que par consequent l'angle ALT pourroit monter jusqu'à 6^0 et audela.

Pour notre dispute sur les logarithmes, je conviens que la valeur de y de l'equation $y = a^x$ est double toutes les fois, que x est une telle fraction $\frac{n}{2}$, n étant une nombre impair: mais Vous m'accorderes reciproquement, que lorsque x est ou un nombre entier ou toute autre fraction que $\frac{n}{2}$, alors la valeur de y ne sera plus double. Car soit $a = 2$; et $y = 2^x$, il est bien clair que mettant pour x les valeurs 1, 2, 3, 4 etc. celles de y seront 2, 4, 8, 16 etc. et dans ces cas aucune valeur negative de y n'aura certainement lieu.

Soit maintenant [Fig. 2] x l'abscisse AP et y l'appliquee PM, et il n'y a aucun doute que l'equation $y = 2^x$ ne donne la courbe continue VBM au dessus de l'axe AP. Mais si $x = \frac{1}{2} = A\alpha$ la valeur de y etant double $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ je conviens qu'il y aura en α un point conjugé et comme la meme chose arrive dans une infinité de cas de x je suis d'accord qu'il y aura une infinite de tels points conjugés a, b, c, d, sous l'axe, mais je pretend que chacun de ces points est isolé sans liaisons avec les voisins, quoique leurs distances soient meme infiniment petites. De meme l'equation $y = (-2)^x$, ne donnera qu'une infinité de tels points conjugés sans aucune courbe continue: et partant l'equation $y = e^x$ ne representera qu'une courbe continue au dessus l'axe, quoiqu'il y ait de l'autre coté une infinité de points conjugés.

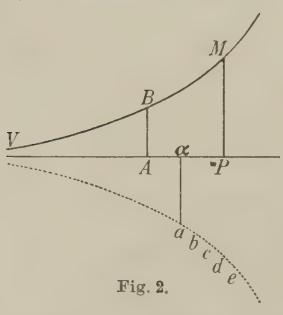


Fig. 2.

Je reviens encore à la lune pour Vous marquer, qu'ayant construit sur la theorie des tables, j'ai trouvé une difference asses considerable ent' elles et les observations, qui montoient quelques fois au dela de 12′, quoique j'eusse reglé le mouvement de l'apogee sur les observations. Depuis j'ai corrigé ces tables par les observations, et les erreurs sont à present au dessous de 5′: et pour la plus part elles ne surpassent gueres 2′. Mais à cette heure mes tables ne sont plus conformes à la theorie; dont j'ai remarqué encore une autre observation; la parallaxe de la lune trouvée par la theorie étant toujours plus petite presque d'un minute, que l'observée de sorte que la force dont la lune est poussee vers la terre doit étre moindre qu'on suppose dans la theorie; tant s'en faut qu'on dusse augmenter cette force par quelque effet de magnetisme de la terre.

Mr. Bouquet me marque, que mon Introduction dans l'Analyse des infinis paraitra incessament, et je l'ai chargé de Vous en presenter d'abord un exemplaire en mon nom. Vous recevres aussi bien tot un exemplaire de mes opuscula, dont je suis bien faché, que je n'ai pas trouvé occasion de vous les presenter plutot.

A l'egard de la suite

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \text{ etc.} = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \text{ etc.}$$

dont je Vous ai parlé j'en ai tiré une proprieté fort singuliere des nombres parrapport à la somme des diviseurs de chaque nombre. Que $\int n$ marque la somme de tous les diviseurs du nombre n de sorte que $\int 1 = 1$; $\int 2 = 3$, $\int 3 = 4$; $\int 4 = 7$; $\int 5 = 6$: $\int 6 = 12$; $\int 7 = 8$ etc. il paroit dabord presque impossible de decouvrir aucune loi dans la suite de ces nombres 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, [15,] 13, 18 etc. mais j'ai trouvé que chaque terme depend de quelques uns des precedents selon cette formule:

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) \text{ etc.}$$

où il est à remarquer 1⁰ que les nombres

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 5, & 7, & 12, & 15, & 22, & 26, & 35, & 40 \text{ etc.} \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 & \end{matrix}$$

se forment aisement par les differences considerées alternativement.

2⁰. Dans chaque cas on ne prend que les termes, où les nombres apres le signe $\int$ ne sont point negativs.

3⁰. S'il arrive ce terme $\int 0$ ou $\int(n-n)$, on prendra pour la valeur le nombre n meme.

Ainsi Vous verres que $\int 4 = \int 3 + \int 2 = 7$; $\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$
$= 15 + 8 - 7 - 3 = 13$; $\int 15 = \int 14 + \int 13 - \int 10 - \int 8 + \int 3 + \int 0$
$= 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24$;
$\int 35 = \int 34 + \int 33 - \int 30 - \int 28 + \int 23 + \int 20 - \int 13 - \int 9 + \int 0$
$= 54 + 48 - 72 - 56 + 24 + 42 - 14 - 13 + 35 = 48.$

Donc toutes les fois que n est un nombre premier on trouvera que $\int n = n + 1$ et partant puisque la nature des nombres premiers entre dans cette consideration cette loi me paroit d'autant plus remarquable.

J'ai l'honneur de Vous assurer de la plus parfaite consideration avec laquelle je suis

Monsieur

Berlin le 15 Fevrier 1748

Votre très humble et très obeïssant
serviteur L EULER.

Wie soll die Herausgabe der Valentinschen mathematischen Bibliographie gesichert werden?

Von G. Enestrom in Stockholm.

Über die von G. Valentin vor 26 Jahren in Angriff genommene allgemeine mathematische Bibliographie ist schon mehrmals in dieser Zeitschrift berichtet worden[1]), und auch über den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die Bibliographie hat Valentin vor einigen Monaten Auskunft gegeben.[2]) Ich erlaube mir, noch einmal in aller Kürze an die Geschichte des Unternehmens zu erinnern.

Die Arbeit wurde am Anfange des Jahres 1885 begonnen und sollte nach dem ursprünglichen Plan die mathematische Literatur bis zum Jahre 1868 umfassen; Valentin schätzte die Gesamtzahl der Titel des fertigen Werkes auf etwa 90000 und rechnete auf eine Arbeitszeit von etwa 8 Jahren. Indessen erweiterte er später den Plan, so daß die Bibliographie auch die neueste Literatur (eventuell bis zum Jahre 1900) verzeichnen sollte, und aus diesem Grunde mußte er statt 90000 wenigstens 125000 Titel in Rechnung tragen. Im Jahre 1897 hatte er mehr als 100000 Titel gesammelt und hoffte damals, die ganze Arbeit etwa am Ende des Jahres 1900 druckfertig zu haben. Es stellte sich aber bald heraus, nicht nur daß das Durcharbeiten des aufgespeicherten Materials viel zeitraubender sein würde, als er anfangs berechnet hatte, sondern auch daß das Ergänzen desselben eine nicht unbeträchtliche Zeit in Anspruch nehmen würde. Das Ergänzen hat übrigens besondere Reisen nötig gemacht, und nachdem diese Arbeit im Frühjahr 1910 beendet war, betrug die Zahl der Titel rund 150000.

Während der ganzen Arbeit waren die Titel aus praktischen Gründen alphabetisch nach den Verfassern geordnet. Seit einem Jahre ist Valentin

1) Siehe G. Valentin, *Vorläufige Notiz über eine allgemeine mathematische Bibliographie;* Biblioth. Mathem. 1885, Sp. 90—92. — G. Enestrom, *Über die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen;* Biblioth. Mathem. 1897, S. 69—70. — G. Valentin, *Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie*; Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 237—245.

2) G. Valentin, *Über den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie;* Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, S. 153—157

mit der systematischen Umordnung nach dem Inhalte beschäftigt, und mit der ersten (gröberen) Klassifikation berechnet er bis Ostern 1912 fertig zu sein. Dann beginnt die feinere und speziellere Systematisierung, die bandweise vorgenommen werden soll, so daß der erste Band voraussichtlich mit Frühjahr 1913 druckreif sein wird. Dieser Band enthält die Schriften allgemeinen Inhalts (darunter auch Zeitschriften und Sammelwerke), und dann werden nach dem Plane Valentins noch 5 Bände folgen: nämlich: Niedere Algebra und Analysis; Höhere Algebra und Analysis; Geometrie und Geodäsie; Mechanik und Ballistik; Astronomie, Physik, Chemie usw.

Schon bei der Inangriffnahme der Arbeit hatte Valentin daran gedacht, einen Verleger zu bekommen, und 1886 erklärte sich ein Verleger in Berlin bereit, den Verlag zu übernehmen. Bei der präliminären Abrede wurde der Umfang der Arbeit auf 90000 Zettel und 150 Druckbogen bemessen; der Druck sollte 1900 angefangen werden. Aber am Ende dieses Jahres war die Bibliographie noch nicht fertig, und erst zehn Jahre später konnte Valentin näherungsweise feststellen, wann der Verleger das druckfertige Manuskript bekommen sollte. Inzwischen hatten sich jedoch die Verhältnisse, worauf bei der präliminären Abrede Bezug genommen worden war, so wesentlich verändert, daß diese Abrede durch eine neue ersetzt werden mußte. Statt 90000 Zettel und 150 Druckbogen sollte man jetzt mit 150000 Zetteln und 280 Druckbogen rechnen, und auch andere Umstände, die Modifikationen veranlassen mußten, sollten in Betracht kommen. Die Firma nahm darum eine neue Berechnung vor, welche sie veranlaßte, eine bedeutende Subvention zu verlangen, um die Drucklegung besorgen zu können. Valentin wandte sich darum an einen anderen Verleger, aber dieser fand die finanzielle Seite des Unternehmens so wenig versprechend, daß er überhaupt nur den Druck und den Kommissionsverlag übernehmen wollte. Der fragliche Verleger ist ein hervorragender Kenner des Gebietes, um das es sich hier handelt, und es ist wenig wahrscheinlich, daß er die Sache zu pessimistisch beurteilt hat.

Vielleicht könnte man meinen, daß Valentin unter solchen Umständen von dem Drucke seiner Bibliographie absehen und seine 150000 Zettel einer öffentlichen Bibliothek oder einer gelehrten Gesellschaft überlassen sollte. Auf diese Weise würde ja seine Arbeit wenigstens bis zu einem gewissen Grade den Fachgenossen nützlich werden. Ich gebe zu, daß man möglicherweise an ein solches Verfahren denken könnte, wenn es eine mathematische Zentralbibliothek gäbe, und wenn die Bibliographie eigentlich nur für die wenigen literarisch geschulten Forscher von wesentlicher Bedeutung wäre. Aber eine solche beschränkte Bedeutung hat nunmehr nicht eine allgemeine mathematische Bibliographie.

Noch vor einigen Jahrzehnten war es sehr gewöhnlich, daß die Mathematiker sich nur wenig um die Literatur ihrer Wissenschaft bekümmerten, aber seitdem haben sich die Verhältnisse wesentlich verändert. Ein wichtiger Grund dazu ist der große Aufschwung der literarischen Wirksamkeit auf dem mathematischen Gebiete während der letzten Jahrzehnte, aber es gibt auch noch andere Gründe. Teils stellt man jetzt an die Verfasser größere Anforderungen als früher inbetreff der Korrektheit, auch wenn es sich um literarische Angaben handelt, teils legt man jetzt großen Wert auf kritische Behandlung der wichtigsten mathematischen Begriffe, und für diesen Zweck ist es oft von Belang, die früheren Ansichten über diese Begriffe möglichst vollständig zu kennen; auch für die zahlreichen zusammenfassenden mathematischen Werke unserer Zeit, z. B. die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* ist es sehr erwünscht, eine allgemeine mathematische Bibliographie zur Verfügung zu haben. Allein für die meisten Mathematiker ist die Valentinsche Bibliographie, solange sie nur handschriftlich vorliegt, als nicht existierend zu betrachten, und auch wenn es eine mathematische Zentralbibliothek gäbe — was leider nicht der Fall ist —, würde die Sache nur wenig verbessert werden.

Allerdings gibt es schon jetzt gewisse bibliographische Arbeiten, die der Mathematiker bei seinen Untersuchungen zu Rate ziehen kann. Für die Zeit 1868—1900 haben wir ja das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* und für die Zeit 1891—1900 überdies die *Revue semestrielle des publications mathématiques*. Auf das ganze 19. Jahrhundert bezieht sich der erste Band des *Subject index* des Kataloges der „Royal society“ und der *Mathematische Bücherschatz* von E. Wölffing. Auch für die Zeit vor 1800 besitzen wir bibliographische Arbeiten, die zuweilen gute Dienste leisten können. Aber alle diese Schriften zusammen sind nicht imstande, eine allgemeine mathematische Bibliographie wie die von Valentin bearbeitete zu ersetzen. Um dies klarzulegen, genügt es, darauf hinzuweisen, daß Valentin, der ein geschulter Bibliograph ist, seit 26 Jahren fast ausschließlich seine freie Zeit der Vorbereitung seiner Arbeit gewidmet hat, denn schon aus diesem Umstande muß der Laie einsehen, daß diese Arbeit etwas ganz anderes als eine Zusammenfassung des Materials der früheren Bibliographien bietet. Besonders hervorzuheben ist die Durchforschung der nicht mathematischen Zeitschriften, die ausnahmsweise mathematische Aufsätze enthalten. Beispielsweise sah Valentin 1889 die forstlichen Zeitschriften (ungefähr 750 Bände) der Königlichen Bibliothek in Berlin durch und fand wirklich darin einige mathematische Abhandlungen; viele ähnliche Untersuchungen inbetreff anderer Gebiete hat er im Laufe der 26 Jahre ausgeführt. Das von ihm aufgespeicherte Material repräsentiert also eine wirkliche Riesenarbeit, und auch wenn man davon absieht, daß

die von mir soeben erwähnten oder angedeuteten bibliographischen Hilfsmittel oft nicht ohne Schwierigkeit benutzt werden können, kann man behaupten, daß diese Hilfsmittel weder inbetreff der Korrektheit noch inbetreff der Vollständigkeit mit der Valentinschen Bibliographie wetteifern können.

Für das Gedeihen der mathematischen Forschungsarbeit wäre es darum erwünscht, daß die Bibliographie zum Drucke befördert werden könnte, und für diesen Zweck muß man in Erwägung ziehen, ob und auf welche Weise die Druckkosten gedeckt werden können. Der genaue Betrag der Kosten ist in diesem Falle unmöglich vorläufig zu bestimmen, um so weniger, als nicht einmal die Bogenzahl mit größerer Genauigkeit ermittelt werden kann, aber nach sachkundiger Schätzung wird der Druck etwa 90 000 Mark kosten, also eine nicht unbedeutende Summe.[1]) Selbstverständlich wird man durch Verkauf der gedruckten Exemplare einen Teil der Kosten zurückbekommen, aber dennoch wird die nötige Subvention so groß, daß man sie kaum von den Behörden oder von einer einzigen Korporation erhalten kann. Erinnert man sich indessen, daß Valentin die Bibliographie in 6 Bände verteilen wird, deren jeder ein Ganzes für sich bildet und nach der Berechnung durchschnittlich etwa 15 000 Mark kosten wird, liegt es nahe, in Erwägung zu ziehen, ob man nicht versuchen sollte, wenigstens die für den Druck eines Bandes nötigen Geldmittel zur Verfügung zu bekommen. Da das Manuskript des ersten Bandes nicht vor 1913 fertig sein kann und da einige der größeren Akademien vielleicht nicht ungeneigt wären, einen jährlichen Beitrag von 500 bis 1000 Mark zu gewähren, scheint es nicht unmöglich, durch freiwillige Beiträge eine Summe von 15 000 Mark zu sammeln. Aber natürlich würde die Sache wesentlich erleichtert werden, wenn der Aufruf zur Zeichnung von Beiträgen nicht von Valentin selbst oder von anderen Privatpersonen, sondern von einer Korporation ausginge.

Die passendste Korporation wäre meines Erachtens die Deutsche Mathematikervereinigung. Diese lebenskräftige Vereinigung bezweckt ja ausdrücklich „in gemeinsamer Arbeit die mathematische Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern“, und sie hat schon früher ihre

1) Valentin hat untersucht, wie sich die Kosten für eine Herstellung durch Schreibmaschine oder Autographie stellen würden und dabei gefunden, daß die Kosten ungefähr die Hälfte betragen würden, aber nach einer Probe muß wenigstens die Herstellung durch Schreibmaschine als ausgeschlossen betrachtet werden, weil die zahlreichen Korrekturen, die handschriftlich vorzunehmen wären, das Aussehen sehr verhäßlichen. Die autographische Herstellung wäre dann vorzuziehen, aber auch diese Herstellung kann wegen der vielen nötigen Korrekturen nicht empfohlen werden, da die Kosten dennoch so groß bleiben.

Aufmerksamkeit auf bibliographische Aufgaben gerichtet. Für die Vereinigung ist ganz gewiß 15000 Mark eine bedeutende Summe, aber diese Summe repräsentiert ja das finanzielle Risiko, und man darf hoffen, daß der wirkliche Zuschuß der Vereinigung nicht besonders groß zu werden brauchte, so daß weiterhin auch die übrigen Bände der Bibliographie zum Abdruck gebracht werden könnten.

Ein anderer und meiner Ansicht nach besserer Ausweg wäre, daß die Deutsche Mathematikervereinigung die Herausgabe der Bibliographie schon dieses Jahr in Aussicht nimmt, aber dabei ganz wie die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft inbetreff der Euler-Ausgabe verfährt. Bei der nächsten Generalversammlung der Vereinigung sollten also folgende Beschlüsse gefaßt werden:

1. Die Deutsche Mathematikervereinigung erklärt sich bereit, dafür Sorge zu tragen, daß die allgemeine mathematische Bibliographie von G. Valentin herausgegeben wird, unter der Voraussetzung, daß dieses Unternehmen durch Behörden und gelehrte Körperschaften, eventuell auch durch Freunde der Mathematik ausreichend unterstützt wird.
2. Die Deutsche Mathematikervereinigung beauftragt ihren Vorstand, einen Aufruf zur Beschaffung der erforderlichen Geldmittel durch freiwillige Gaben oder Subskription von Exemplaren zu veröffentlichen und der Jahresversammlung 1912 einen Bericht über das Resultat dieses Aufrufes zu erstatten.
3. Nachdem die Deutsche Mathematikervereinigung von dem Bericht Kenntnis genommen hat, wird der definitive Beschluß inbetreff der Frage gefaßt werden.

Wie ich schon bemerkt habe, würde die Beschaffung der Geldmittel auf diese Weise höchstwesentlich erleichtert werden. Schon der Umstand, daß die Deutsche Mathematikervereinigung die Herausgabe der Bibliographie moralisch unterstützt, muß als eine Empfehlung des Unternehmens wirken. Für den Sachkundigen ist eine solche Empfehlung gewiß unnötig, aber die Personen, die über die Bewilligung der Subvention entscheiden, beanspruchen sicherlich nicht, Fachmänner auf dem Gebiete der mathematischen Bibliographie zu sein. Hierzu kommt noch, daß Valentin 63 Jahre alt ist, und bei diesem Alter kann kein Mensch verbürgen, daß er imstande sein wird, eine Arbeit, deren Druck viele Jahre erfordern muß, abzuschließen, so daß eine Subvention schon aus diesem Grunde leicht unterbleiben könnte, wenn Valentin persönlich der Empfänger wäre. Dagegen kann die Deutsche Mathematikervereinigung in diesem Falle als unsterblich und immer arbeitsfähig betrachtet werden,

so daß die Herausgabe der Bibliographie gesichert ist, auch wenn Valentin selbst verhindert werden würde, die Beendigung des Druckes zu überwachen.

Es liegt in der Natur der Sache, daß die Deutsche Mathematikervereinigung keinen Beschluß fassen soll, bevor Valentin selbst ausdrücklich erklärt hat, daß er mit Dankbarkeit die Unterstützung der Vereinigung empfängt, und daß er vor dem definitiven Beschluß mitteilen muß, wann er berechnet, der Vereinigung das Manuskript des ersten Bandes druckfertig vorlegen zu können.

Wie ich oben erwähnt habe, ist Valentin jetzt mit der systematischen Umordnung seiner 150000 Zettel beschäftigt, und in seinem letzten Artikel hat er auseinandergesetzt[1]), aus welchen Gründen er eine systematische Ordnung der Titel als die zweckmäßigste betrachtet. Die Gründe selbst billige ich sehr, aber dagegen bin ich nicht ganz sicher, ob nicht Valentin die Schwierigkeiten der Umordnung zu leicht abgefertigt hat. Inbetreff dieser Frage erlaube ich mir, auf meine Besprechung[2]) des schon oben erwähnten *Subject index* der „Royal society" zu verweisen.[3]) Ich besitze selber die Arbeit und habe zuweilen versucht, die Stellen ausfindig zu machen, an denen gewisse Schriften, deren Gegenstand mir genau bekannt war, verzeichnet sind, aber in den meisten Fällen ohne Erfolg. Indessen will ich ausdrücklich hervorheben, daß Valentin natürlich allein über die Anordnung der Bibliographie entscheiden soll. Nur den Wunsch möchte ich nicht unterdrücken, daß bei einer systematischen Anordnung jeder Band mit einem Verfasserregister versehen wird. Aus diesem Register sollte man übrigens ersehen, nicht nur an welchen Stellen des Bandes die Schriften eines besonderen Verfassers verzeichnet sind, sondern auch in welche Unterabteilung jede Schrift gehört, also etwa wie im Register am Ende des zweiten Bandes der *Bibliographie générale de l'astronomie* (Bruxelles 1882) von Houzeau und Lancaster. Natürlich kann man durch passende typographische Anordnungen erzielen, daß das Register viel weniger Raum als bei Houzeau und Lancaster in Anspruch nimmt.

---

1) G. Valentin, *Über den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie;* Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, S. 155—156.

2) Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 279—281.

3) Vgl. auch den Bericht über die Valentinsche Arbeit in der Vossischen Zeitung vom 7. Juni 1911, in der der mir unbekannte Berichterstatter bemerkt: „Die dafür [d. h. für die systematische Umordnung] als erforderlich geschätzte Zeit von mindestens drei Jahren dürfte stark überschritten werden, da sicherlich in zahlreichen Fällen eine nochmalige Einsicht in die Druckschriften selbst nötig sein wird, um sie ihrem Inhalt entsprechend einzuordnen."

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

Über frühere Bemerkungen siehe BM $\mathbf{11}_3$ (1910/11), S. 158—181.

2: 535. Was Herr Cantor Z. 5—21 über Cardanos Ausführungen in betreff des Kontingenzwinkels mitteilt, ist nicht direkt unrichtig, aber meiner Ansicht nach eher verwirrend als belehrend.

Erstens bekommt der Leser dadurch die Vorstellung, daß es sich um eine zusammenhängende Darstellung Cardanos handelt. Allein der Passus (Z. 5—7): „Eine andere Schwierigkeit entsteht bei in *a* sich berührenden Kreisen durch Ziehen der Sehnen *afd* und *age*" rührt von Herrn Cantor selbst her, der folgende Passus (Z. 7—13): „Der geradlinige Winkel . . . . heranrückt" steht im Scholium des Satzes 159, und das übrige ist aus dem Scholium des Satzes 161 entnommen.

Zweitens ist es meines Erachtens durchaus notwendig, bei dem Berichte über die Ausführungen Cardanos darauf hinzuweisen, daß viele „propositiones" der Schrift *De proportionibus* aus ganz gelegentlichen Bemerkungen bestehen, in denen die Gründe für und gegen eine gewisse Ansicht angegeben werden, ohne daß es ganz klar ist, welche Ansicht Cardano selbst vertritt, oder ob er überhaupt eine bestimmte Ansicht hat.

Drittens ist es kaum zu empfehlen, die Behauptung Cardanos: „Der geradlinige Winkel *ead* ist gleich dem doppelt krummlinigen Winkel *gae*" zu erwähnen, ohne mitzuteilen, daß Cardano offenbar durch einen Trugschluß zu diesem Satze gekommen ist. Ich gebe hier unten die Schlußweise Cardanos wörtlich wieder:

> Constat quod portiones *ad & af* similes sunt, itemque *ae & ag*, ducta enim *abc* per centra circulorum ex contactu transibit per illa: quare anguli *hag & hae* sunt ijdem & similiter *haf & had* ijdem, portiones ergo *af & ad* itemque *ag & ae* similes sunt: angulus igitur (!) *gae* ex peripheriis et *ead* ex rectis sunt ijdem in puncto *a*.

Nun ist ja der geradlinige Winkel *ead* die Differenz der zwei gemischtlinigen Winkel *eae* und *dad*, während der krummlinige Winkel *gae* die Differenz der gemischtlinigen Winkel *eae* und *gag* ist. Das „igitur" des Cardano enthält

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

also die Behauptung, daß der gemischtlinige Winkel dad gleich dem gemischtlinigen Winkel gag ist, und diese durchaus unbelegte Behauptung, die überdies offenbar unrichtig ist, muß auf einer Verwechselung beruhen.

Da also die Schwierigkeit, von der Cardano im Scholium des Satzes 159 spricht, sofort beseitigt wird, wenn man nur den Ausgangspunkt seiner Ausführungen berichtigt, und da hierzu noch kommt, daß die Folgerung, die Cardano aus der Größe der zwei Grundlinien ge und de zieht, unzulässig ist, wäre es meines Erachtens am besten, den ganzen Passus (Z. 5—13): „Eine andere Schwierigkeit . . . . heranrückt" zu streichen.

In betreff des Cantorschen Berichtes über das Scholium des Satzes 161 bemerke ich, daß er meines Erachtens allzu unvollständig ist, weil Cardano selbst seine Erklärung der Schwierigkeiten durch zwei von Herrn Cantor nicht einmal angedeutete Gegengründe zu entkräften sucht. G. Enestrom.

---

2 : 640. Hier beginnt der Bericht über Viètes Methode, numerische Gleichungen zu lösen. Herr Cantor sagt, daß Viète die Gleichungen in näherungsweiser Auflösung behandelt, aber diese Ausdrucksweise ist meines Erachtens weniger gut, weil bei Viète überhaupt nur solche Beispiele vorkommen, in denen die positiven Wurzeln rationale ganze Zahlen sind. Erst am Ende des langen Traktates widmet Viète nachträglich etwa eine halbe Seite der Frage „ad eliciendum radices proximas veris, alioquin irrationales". Es dürfte also besser sein, zu sagen, daß Viète die ganzzahligen Wurzeln numerischer Gleichungen durch eine Methode der sukzessiven Näherungen ermittelt.

Das Verfahren Viètes beurteilt Herr Cantor auf folgende Weise:

> Es ist ein Verfahren, welches zwar mit dem Grade der Gleichung sich ändert, mithin als ein ganz vollkommen einheitliches nicht erachtet werden kann; als weiterer Mangel ist stets die Auffindung nur einer, und zwar positiven Wurzel angestrebt, aber immerhin ist der Grundgedanke ein bleibender.

Herr Cantor behauptet also, daß das Verfahren sich mit dem Grade ändert, und diese Behauptung ist natürlich buchstäblich richtig, ganz wie die Behauptung, daß das Verfahren bei der Differentiation einer Potenz sich mit dem Grade ändert, so daß z. B. $d(x^4) = 4x^3\,dx$, aber $d(\imath^7) = 7x^6\,dx$. Allein daraus folgt ja nicht, daß dieses letztere Verfahren nicht als ein vollkommen einheitliches erachtet werden kann, denn die allgemeine Formel ist $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$. Ganz auf dieselbe Weise verhält es sich mit dem Verfahren Viètes. Ist die zu lösende Gleichung

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = a_n,$$

so kann die Methode Viètes durch folgende Regel ausgedrückt werden:

> Wenn man einen Näherungswert α der Wurzel der Gleichung $f(x) = a_n$ gefunden hat und wenn dieser Wert am Ende k Nullen hat, so bekommt man einen noch besseren Wert α_1 aus der Formel

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{a_n - f(\alpha)}{f'(\alpha) + \frac{10^{k-1}}{1\cdot 2} f''(\alpha) + \cdots + \frac{10^{(n-2)(k-1)}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(\alpha)}.$$

Die Herleitung der Formel bietet keine Schwierigkeiten dar. Man hat ja

$$f(\alpha_1) = f(\alpha + (\alpha_1 - \alpha)) = f(\alpha) + (\alpha_1 - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(\alpha_1 - \alpha)^2}{1 \cdot 2} f''(\alpha) + \cdots$$

$$+ \frac{(\alpha_1 - \alpha)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} f^{(n-1)}(\alpha) + (\alpha_1 - \alpha)^n,$$

also

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{f(\alpha_1) - f(\alpha) - (\alpha_1 - \alpha)^n}{f'(\alpha) + \frac{\alpha_1 - \alpha}{1 \cdot 2} f''(\alpha) + \cdots + \frac{(\alpha_1 - \alpha)^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} f^{(n-1)}(\alpha)}.$$

Nun ist $f(\alpha_1) \sim a_n$ und $\alpha_1 - \alpha$ in der Regel eine k-ziffrige Zahl. Ersetzt man rechts $\alpha_1 - \alpha$ durch die kleinste k-ziffrige Zahl 10^{k-1}, und wirft man das letzte Glied des Zählers ab, bekommt man die soeben angegebene Formel.

Man sieht hieraus sofort, daß das Verfahren gewissermaßen mit der sogenannten Newtonschen Methode verwandt ist, und Herr Cantor hat Recht, wenn er sagt, daß der Grundgedanke ein bleibender ist, obgleich aus seiner Darstellung hervorgeht, daß er das Verfahren nicht verstanden hat.[1])

Wenn Herr Cantor als „weiteren Mangel" bezeichnet, daß stets die Auffindung nur einer Wurzel angestrebt ist, so muß diese Bemerkung dem sachkundigen Leser sehr auffällig erscheinen. Man braucht nämlich nur oberflächlich von der Darstellung Viètes Kenntnis zu nehmen, um zu finden, daß dieser nicht stets nur eine Wurzel berechnet Schon in der Einleitung (*Opera*, ed. F. van Schooten, S. 173) hebt er hervor, daß es zuweilen zwei Lösungen gibt („radix est anceps"), und später behandelt er oft Gleichungen dieser Art. Beispielsweise löst er im „Problema XIX" (a. a. O. S. 219—220) die Gleichung $27\,755x - x^4 = 217\,944$; in betreff dieser Gleichung bemerkt er schon anfangs, daß sie zwei (positive) Wurzeln besitzt. Dann teilt er die Rechnungen in zwei Abschnitte mit besonderen Überschriften ein, nämlich „Paradigma primum analyseos quadrato-quadrati avulsi à plano-plano sub latere, ad inveniendum radicem minorem" (hier findet er $x = 8$) und „Paradigma secundum analyseos quadrato-quadrati avulsi à plano-plano sub latere, ad inveniendum radicem maiorem" (hier findet er $x = 27$).

Daß Viète nur die positiven Wurzeln berücksichtigt, ist natürlich richtig, aber dieser Umstand hat nichts mit den Mängeln des Verfahrens, um das es sich handelt, zu tun. Will man die negativen Wurzeln der Gleichung $f(x) = a_n$ durch dieses Verfahren ermitteln, hat man ja nur das Verfahren auf die Gleichung $f(-x) = a_n$ anzuwenden. Die Worte (Z. 25) „und zwar positiven" sollten darum unter allen Umständen gestrichen werden. G. Enestrom.

---

2 : 641. Über die Methode Viètes, numerische Gleichungen von der Form $x^3 + cx = a$ zu lösen, gibt Herr Cantor (Z. 5—11) folgende Auskunft:

---

1) Nachdem diese Bemerkung schon redigiert worden war, hat F. Cajori (*Historical note on the Newton-Raphson method of approximation;* The americ. mathem. monthly **18**, 1911, S. 30) einen anderen etwas kürzeren, aber kaum einfacheren Ausdruck für den Divisor Viètes veröffentlicht. Man sieht leicht, daß dieser Ausdruck mit dem meinigen übereinstimmt; allerdings kann man bei Cajori nicht sofort das Verfahren Viètes mit der Newtonschen Methode vergleichen.

Bei einer Gleichung dritten Grades $x^3 + cx = a$, deren Wurzel wieder als $x_1 + x_2 + x_3$ gedacht ist, findet sich durch Einsetzung dieses Wertes und leichte Umformung:

$$a = x_1^3 + cx_1 + (3x_1^2 + c)x_2 + (3x_1 + x_2)x_2^2 + (3(x_1 + x_2)^2 + c)x_3 + (3(x_1 + x_2) + x_3)x_3^2$$

und die Anwendung auf $x^3 + 30x = 14\,356\,197$ liefert abermals $x = 243$.

Nun hat Herr Cantor S. 640 eine ähnliche Formel für die Gleichung $x^2 + cx = a$ gegeben, und in dieser Formel, deren Anwendung er für die Gleichung $x^2 + 7x = 60\,750$ vollständig erläutert hat, ist der Koeffizient von x_2 eben der Divisor, den man benutzen soll, um x_2 zu ermitteln Der Leser muß also annehmen, daß in betreff der Gleichung $x^3 + cx = a$ dieser Divisor $3x_1^2 + c$ ist, denn warum sollte Herr Cantor sonst die oben abgedruckte Umformung, die nicht bei Viète steht, ausgeführt haben? Allein in Wirklichkeit ist in diesem Falle der Divisor Viètes nicht $3x_1^2 + c$, sondern (siehe die vorangehende Bemerkung)

$$\frac{d}{dx_1}(x_1^3 + cx_1) + \frac{10^{k-1}}{2}\frac{d^2}{dx_1^2}(x_1^3 + cx_1) = 3x_1^2 + c + 3 \cdot 10^{k-1} x_1,$$

und die Cantorsche Umformung muß darum auf folgende Weise modifiziert werden:

$$a = x_1^3 + cx_1 + (3x_1^2 + c + 3x_1[x_2])x_2 + x_2^3 + \{3(x_1 + x_2)^2 + c + 3(x_1 + x_2)[x_3]\}x_3 + x_3^3,$$

wo $[x_2]$ und $[x_3]$ bedeuten, daß bei der Ermittelung des Quotienten x_2 vorläufig durch 10^{k-1} und bei der neuen Berechnung x_3 vorläufig durch 10^{k-2} zu ersetzen ist.

Bei der Gleichung $x^3 + 30x = 14\,356\,197$ ermittelt Viète erst durch Wurzelausziehung den Näherungswert $x_1 = 200$. Um x_2 zu finden, setzt man in die korrigierte Cantorsche Formel $a = 14\,356\,197$, $x_1 = 200$, $c = 30$ und, wie schon gesagt, vorläufig $[x_2] = 10$; ferner wirft man x_2^3 sowie alle Glieder, die x_3 enthalten, ab, und dadurch bekommt man

$$x_2 \sim \frac{14\,356\,197 - (200)^3 - 30 \cdot 200}{3 \cdot (200)^2 + 30 + 10 \cdot 3 \cdot 200} \sim \frac{6350\,197}{126\,030}.$$

Der Quotient ist hier ein wenig größer als 50, aber da der Dividendus zu groß und der Divisor zu klein ist, darf man für x_2 nur 40 ansetzen, so daß der zweite Näherungswert $200 + 40 = 240$ ist. Um einen noch besseren Wert zu bekommen, setzt man in die korrigierte Cantorsche Formel $a = 14356197$, $x_1 = 200$, $c = 30$, $x_2 = 40$, $[x_2] = 40$ (nicht 10), $[x_3] = 1$ und wirft x_3^3 ab. Dann wird

$$x_3 \sim \frac{6350\,197 - (3(200)^2 + 30 + 3 \cdot 200 \cdot 40)40 - (40)^3}{3 \cdot (240)^2 + 30 \cdot + 3 \cdot 240} \sim \frac{524\,997}{173\,550}.$$

Also kann x_3 höchstens 3 sein, und wenn man teils im Zähler das abgeworfene Glied $- x_3^3$ berücksichtigt, teils in dem Ausdruck

$$3(x_1 + x_2)^2 + c + 3(x_1 + x_2)[x_3],$$

woraus der Nenner berechnet wurde, die Größe $[x_3]$ nicht $= 1$, sondern $= 3$ setzt, findet man

$$x_3 = \frac{524\,970}{174\,990}, \quad \text{also genau } = 3, \text{ folglich } x = 243.$$

Auch die Umformung, die Herr CANTOR (Z. 11—13) für die Gleichung $x^3 + cx^2 = a$ gibt, muß auf ähnliche Weise korrigiert werden.

Die CANTORschen Umformungen sind besonders für den aufmerksamen Leser irreleitend, denn dieser kann kaum umhin, anzunehmen, daß das Verfahren VIÈTES im wesentlichen mit der NEWTONschen Näherungsmethode übereinstimmt. Bei Herrn CANTOR sind ja die Koeffizienten von x_2 für die Gleichungen $x^2 + cx = a$, $x^3 + cx = a$, $x^3 + cx^2 = a$

$$2x_1 + c, \quad 3x_1^2 + c, \quad 3x_1^2 + 2cx_1,$$

und wenn man das linke Glied der Gleichungen durch $f(x)$ bezeichnet, ist in jedem der drei Fälle der Koeffizient von x_2

$$\frac{df(x_1)}{dx_1},$$

also gerade der Divisor, der in der NEWTONschen Näherungsmethode benutzt wird.

Wie Herr CANTOR auf den Gedanken kam, die sinnlose oder unrichtige Umformung auszuführen, weiß ich nicht. Bekanntlich hat HANKEL (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter,* Leipzig 1874, S. 369—370) ausdrücklich behauptet, das Verfahren VIÈTES sei mit der NEWTONschen Methode identisch, und man könnte darum versucht sein, anzunehmen, daß Herr CANTOR seine Umformung auf Grund dieser Behauptung vorgenommen hat, ohne auf die Quelle selbst zurückzugehen. Anderseits ist es nicht leicht, unter dieser Annahme das CANTORsche Urteil (siehe die vorangehende Bemerkung), „das Verfahren VIÈTES sei nicht als einheitlich zu erachten", zu erklären.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 693. Nachdem Herr CANTOR ein Werkzeug zum Zeichnen von Kegelschnitten erwähnt hat, das von BRAMER in dem Buche *APOLLONIUS Cattus* beschrieben wurde, fügt er hinzu: „Außer der Beschreibung des Werkzeuges zum Zeichnen von Kegelschnitten enthält das Buch allerlei Sätze über jene krummen Linien nebst deren Beweise." Dieser Zusatz ist zum Teil buchstäblich richtig, aber von einem Sachkundigen kann er jedenfalls nicht herrühren, sonst würde man die drei Bände der CANTORschen *Vorlesungen* etwa auf folgende Weise charakterisieren können: „Die *Vorlesungen* enthalten einen Bericht über Klostergelehrsamkeit im Mittelalter; überdies bringen sie allerlei Notizen zur Geschichte der Mathematik im Altertume."

Der vollständige Titel der 1. Auflage des 1. Teiles des BRAMERschen Buches lautet:

> Benjamin Bramers || Apollonius Cattus, || Oder geometri- || scher Wegweiser, || Erster Theil || In welchem die fundamenta der allerlieb- || vnd Sinnreichsten Conischen Sectionen, So von Apol- lonio Pergaeo mit schweren, ab absurdo genommenen Demonstra- || tionen dargethan, Nunmehr auß leichten Euclidischen Grün- || den erwiesen werden. || Neben angehenckten vnderschiedenen wegen, die drey || Conische Linien, Als Parabola, Hyperbola vnd Ellipsis || in plano zuverzeichnen. Getruckt zu Cassel, Bey Johann Saurn, in verle- || gung deß Authoris, im Jahr Christi, M. DC. XXXIV.
>
> Quart, (8) + 96 S.

Wie aus dem Titel hervorgeht, enthält dieser erste Teil also wesentlich eine elementare Darstellung der Grundlagen der Theorie der Kegelschnitte. Die Darstellung, die 67 Druckseiten umfaßt, beginnt mit den nötigen Definitionen (S. 1—8), dann kommen einige Hilfssätze (S. 8—22) und weiter (S. 22—66) 42 Lehrsätze über Kegelschnitte. Den „Beschluß" (S. 66—67) bildet die Konstruktion einer krummlinigen Asymptote zu einer gegebenen Parabel. Als „Anhang deß ersten Theils" werden (S. 68—96) zwölf verschiedene „Wege" zum Zeichnen von Kegelschnitten gelehrt.

Der zweite Teil des *Apollonius Cattus* hat eigentlich nichts mit Kegelschnitten zu tun, sondern enthält ein Verfahren, „allerhand Sonnenuhren, dieselben fallen so seltzam, wie sie immer wollen, auf einem Cylinder zu schneiden und auffzureissen", und der dritte Teil enthält die Beschreibung eines Triangularinstruments Jobst Burgis.

Aus dieser kurzen Inhaltsangabe geht hervor, daß die Cantorsche Notiz keine richtige Vorstellung von dem wirklichen Inhalt der Arbeit Bramers bringt, und es ist leicht ausfindig zu machen, worauf dies beruht. Herr Cantor hat nämlich die Arbeit nicht selbst gesehen, sondern, wie er in der Fußnote 1 hervorhebt, nur Angaben von Kästner und Braunmühl benutzt. Kästner sagt: „Er [Bramer] giebt allerley Eigenschaften der Kegelschnitte mit Beweisen. Auch ein Werkzeug jeden zu beschreiben", und Braunmühl beschreibt ausführlich das fragliche Werkzeug. Aus diesen unvollständigen Angaben hat Herr Cantor einen Bericht über den Inhalt der Arbeit verfertigt.

Beiläufig bemerke ich, daß das von Braunmühl erwähnte universalkonische Instrument nicht in der ersten Auflage des 1. Teiles beschrieben wird. Bramer sagt (S. 84): „Wie aber ein Vniversal Conisch Instrument zumachen, darinnen ein jeder Conus, er sey wie er wolle vorgebildet werden kan, ist vor etzlichen jahren von mir beschrieben, vnd zu Franckfurt bey Eberhard Kiesers Sel. Erben zweiffels ohne noch zu finden." G. Enestrom.

---

2 : 714—715. Die Angabe: „Gregorius hatte dort (im 6. Buche des *Opus geometricum*) nachgewiesen, daß Flächenräume, welche durch eine Hyperbel, deren eine Asymptote und Parallele zur anderen Asymptote begrenzt seien, in einem Verhältnisse stehen, welches gleich sei dem Exponenten der Potenzen, als welche die abschließenden Ordinaten sich kundgeben", ist ungenau und außerdem am Ende fast unverständlich. Der Satz des Gregorius (vgl. a. a. O. S. 594, prop. CXXV) lautet:

> Inter asymptotos AB, AC, constituta sit hyperbola; ex qua assumantur quaeuis duae partes terminatae rectis DE, PQ, & HI, KC, quae aequidistent asymptoto AB . . . . Dico superficiem $DEQP$ toties continere superficiem $HICK$, quoties ratio lineae DE ad PQ, multiplicat rationem HI ad KC.

Will man den Satz in unsere mathematische Sprache übersetzen und nimmt man der Einfachheit halber als Gleichung der Hyperbel $xy = 1$, so kann der Satz auf folgende Weise ausgedrückt werden:

> Nimmt man zwei Flächenräume, deren jeder durch die Hyperbel, die Asymptote $y = 0$ und zwei Ordinaten begrenzt sind, und nennt man die zwei Paare von Ordinaten a_0, a_1; b_0, b_1; ist ferner $\frac{a_1}{a_0} = \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^n$, so verhalten sich die Flächenräume wie n zu 1.

Analytisch ausgedrückt bekommt der Satz die Form

$$\int_{y=a_1}^{y=a_0} \frac{dx}{x} : \int_{y=b_1}^{y=b_0} \frac{dx}{x} = n : 1, \text{ d. h. } \int_{a_0}^{a_1} \frac{dy}{y} : \int_{b_0}^{b_1} \frac{dy}{y} = n : 1$$

und aus dieser letzten Formel sieht man sofort, daß der Satz richtig ist, denn aus der Bedingung folgt ja unmittelbar

$$\log\left(\frac{a_1}{a_0}\right) : \log\left(\frac{b_1}{b_0}\right) = n : 1.$$

Der von Herrn Cantor ausgesprochene Satz wird richtig, wenn man den höchst eigentümlichen Ausdruck: „dem Exponenten der Potenzen, als welche die abschließenden Ordinaten sich kundgeben (?!)“ als die doppelte Bedingung $a_1 = b_1^n$, $a_0 = b_0^n$ enthaltend auffaßt, aber ein so spezieller Satz bietet wenig Interesse dar. Der Satz des Grégoire de Saint-Vincent enthält dagegen nicht diese doppelte Bedingung. G. Eneström.

---

2 : 715. Aus den Zeilen 3—7 kann man kaum ausfindig machen, auf welche Weise Sarasa das Auftreten von Logarithmen bei den hyperbolischen Flächenräumen angegeben hat. In Wirklichkeit gibt Sarasa nicht direkt an, wie man solche Flächenräume durch Logarithmen ausdrücken soll, sondern er sagt nur (S. 16, prop. 10), daß die Flächenräume Logarithmen ersetzen oder vertreten können („hae superficies supplere possunt locum logarithmorum; . . . . erit superficies MF loco logarithmi 6“), und aus seinem Rechenbeispiele kann man nicht ersehen, wie groß der Flächenraum zwischen zwei Ordinaten ist. Soviel ich weiß, ist J. Gregory der erste, der ausdrücklich die Größe eines hyperbolischen Flächenraumes angegeben hat (siehe *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Patavii 1667, S. 49). Der Satz Gregorys kann auf moderne mathematische Sprache folgendermaßen ausgedrückt werden: „Sei $xy = 1$ die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, so ist der Flächenraum zwischen den zwei Ordinaten $y = 1$ und $y = a$ gleich $\log a$. G. Eneström.

---

2 : 757. Nachdem Herr Cantor darauf hingewiesen hat, daß die Pascalsche Anwendung des arithmetischen Dreieckes auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung erst 1665 in den Buchhandel kam, bemerkt er, daß „der Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat [über Wahrscheinlichkeitsrechnung] noch viel später in die Öffentlichkeit gelangte“. Nun verweist Herr Cantor in betreff dieses Briefwechsels auf die „Oeuvres de Pascal“, deren erste Auflage 1779 erschien, und wenn der nicht sachkundige Leser diesen Umstand mit den Cantorschen Worten „noch viel später“ zusammenstellt, kann er kaum umhin zu vermuten, daß die Fermatschen Untersuchungen über Glücksspiele erst 1779 in die Öffentlichkeit gelangten, also zu einer Zeit, als sie gar keinen Einfluß auf die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben konnten. Aber in Wahrheit ist die Sachlage die folgende.

Es gab eigentlich zwei Briefe von Fermat an Pascal, die für die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Belang sind. Der erste Brief, der höchstwahrscheinlich vor dem 29. Juli 1654 geschrieben wurde, ist verloren gegangen, aber das Verfahren, das Fermat darin für zwei Spieler auseinander-

setzte, kennen wir aus dem Antwortschreiben Pascals vom 24. August 1654; dieses Antwortschreiben, das Herr Cantor S. 756 für seinen kurzen Bericht über die Fermatsche Methode benutzt hat, wurde schon 1679, also nur 14 Jahre nach dem Erscheinen des Pascalschen *Traité* in den *Varia opera* (S. 184—188) veröffentlicht. Der zweite Brief von Fermat, in dem die Methode auch auf mehr als nur zwei Spieler ausgedehnt wurde, ist, wie Herr Cantor S. 756 richtig angibt, vom 25. September 1654 datiert, und dieser Brief wurde erst 1779 von Bossut in den *Oeuvres de Pascal* zum Abdruck gebracht.

G. Eneström.

2: 759. Die Angabe (Z. 7—9): „am 6. Mai hatte Franciscus van Schooten schon zugesagt, vielleicht schon begonnen, die holländisch geschriebene Abhandlung [*De rationiciis in ludo aleae*] ins Lateinische zu übersetzen" muß auf einer Verwechselung beruhen. Der von Herrn Cantor als Beleg zitierte Brief vom 6. Mai 1656 ist nicht von Schooten sondern von Huygens geschrieben, und darin wird nicht erwähnt, daß Schooten versprochen hatte, selbst die Übersetzung zu verfertigen. Jedenfalls hatte er die Arbeit damals noch nicht begonnen, denn am 30. Mai 1656 schreibt er an Huygens, er wisse noch nicht, wann er Zeit dazu finden könne (*Oeuvres complètes de Chr. Huygens* **1**, La Haye 1888, S. 422).

G. Eneström.

2: 812. Die Redewendung: „Die Parallelen selbst heißen *omnes ordinatim applicatae*" ist nicht ganz genau; Descartes schrieb seine *Géométrie* französisch und benutzte den Ausdruck: „appliquées par ordre". Das Wort „omnes", das zufälligerweise an der von Herrn Cantor zitierten Stelle der Schootenschen Übersetzung vor „ordinatim" steht, hat nichts mit der Benennung zu tun.

In betreff der Geschichte des Termes Ordinate hat schon Tropfke (*Geschichte der Elementargeometrie* **2**, Leipzig 1903, S. 426) eine ergänzende Notiz gebracht, indem er darauf hinweist, daß der Ausdruck τεταγμένως κατηγμέναι des Apollonius schon 1566 von Commandino durch „ordinatim applicatae" übersetzt wurde. Ich erlaube mir, hier unten einige weitere Beiträge zur Geschichte des Terms zu bringen.

Im Mittelalter wurde der Ausdruck τεταγμένως κατηγμένη von den abendländischen Übersetzern aus dem Arabischen teils durch „linea secundum ordinem", teils durch „linea ordinis" wiedergegeben, und die Bedeutung war insofern schwankend, als man zuweilen die Ordinate in unserem Sinne, zuweilen die doppelte Ordinate meinte; diese Zweideutigkeit geht ja übrigens auf Apollonius selbst zurück (vgl. z. B. *Κωνικά*, I Def. 4 und I Prop. 20). Der Ausdruck „linea secundum ordinem" kommt beispielsweise in einer (wahrscheinlich von Gherardo Cremonese herrührenden) Übersetzung „Liber de speculis comburentibus" vor (siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 222 Z. 30, 223 Z. 1) und bedeutet dort die einfache Ordinate. Der Ausdruck „linea ordinis" mit der Bedeutung „doppelte Ordinate" befindet sich (siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 204 Z. 8) in einer lateinischen Übersetzung einer arabischen Schrift über die Parabel, welche Übersetzung sicherlich aus dem Mittelalter herrührt, obgleich die älteste jetzt bekannte Handschrift erst aus dem 16. Jahrhundert stammt. Ob auch die Form „ordinata" schon im Mittelalter vorkommt, weiß

ich nicht. Aber schon bevor COMMANDINO seine APOLLONIUS-Übersetzung veröffentlichte, benutzte MAUROLICO diese Form für einfache Ordinate teils in einem vom 29. März 1555 datierten Manuskript (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, S. 107), teils in dem schon 1553 verfaßten, 1575 gedruckten Traktat *De lineis horariis* (siehe F. MAUROLYCI *Opuscula mathematica*, Venetiis 1575, S. 270: „in semidiametro autem ellipsis . . . educantur diametro perpendiculares sive ordinatae *gm . hn . ko . ec*").

Da TROPFKE (a a. O. S. 426) darauf hinweist, daß CHR. WOLFF „semiordinata" verwendet, mache ich beiläufig darauf aufmerksam, daß B. BRAMER schon 1634 diese Form für einfache Ordinate benutzt hat (siehe *Apollonius Cattus* **1**, Cassel 1634, S. 4), während er „ordinatim applicata" für doppelte Ordinate gebraucht.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 812. Nachdem Herr CANTOR den Grundgedanken der Koordinatengeometrie, wie er in den jetzigen Lehrbüchern auseinandergesetzt wird, angegeben hat, bemerkt er (Z. 20—24):

> Von einer Begriffsbestimmung der analytischen Geometrie von der Art, wie sie hier ausgesprochen worden ist, nimmt DESCARTES allerdings so wenig seinen Ausgangspunkt, daß sie sich sogar nirgend bei ihm ausdrücklich ausgesprochen vorfindet; man muß sie da und dort aus seinem Verfahren herauslesen.

Mit den ersten Zeilen dieser Bemerkung bin ich einverstanden, nicht aber mit den Worten: „man muß sie da und dort aus seinem Verfahren herauslesen", denn meiner Ansicht nach hat Herr CANTOR in die Geometrie von DESCARTES die fragliche Begriffsbestimmung hineingelesen, so daß der Leser durch die CANTORsche Darstellung eine unrichtige Vorstellung von dem Grundgedanken der analytischen Geometrie bei DESCARTES bekommt. Allerdings ist die Begriffsbestimmung die billigste, da sie sofort aus einem Lehrbuche der analytischen Geometrie entnommen werden kann, ohne daß man sich der Mühe unterzieht, zu untersuchen, was DESCARTES selbst gesagt hat. Es ist also eine Art der „Ökonomie des Denkens", die nicht selten in den CANTORschen *Vorlesungen* vorkommt, aber zu empfehlen ist diese Art meines Erachtens nicht.

In den folgenden Zeilen werde ich versuchen, auseinanderzusetzen, wie sich DESCARTES selbst die Sache dachte; die dabei eingeschalteten Zitate und Verweise beziehen sich auf die Pariser Ausgabe der *Géométrie* vom Jahre 1886.

Was DESCARTES mit seiner analytischen Geometrie erzielen will, ist teils die algebraische Lösung geometrischer Aufgaben, teils die geometrische Konstruktion dieser algebraischen Lösung. Wenn die Aufgabe nur eine Lösung oder eine endliche Zahl von Lösungen hat, bekommt man zuletzt eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, und die Konstruktion hat den Zweck, einen Punkt oder eine endliche Zahl von Punkten zu bestimmen. Kommen dagegen noch in der Endgleichung zwei oder mehrere Unbekannte vor, so bedeutet dies, daß das Problem nicht vollständig bestimmt ist (S. 4: „cela témoigne qu'elle [la question] n'est pas entièrement déterminée"). Am wichtigsten ist der Fall, in dem zwei Unbekannte vorkommen, und dann handelt es sich darum, die Linie zu ermitteln, auf der alle Punkte liegen, welche der durch das Problem aufgestellten Bedingung genügen (S. 9: „il est aussi requis de connoître et de tracer la ligne dans laquelle ils [les points] doivent tous se

trouver"). Für diesen Zweck wählt Descartes eine Gerade aus, die er zuweilen Diameter nennt (S. 31: „toutes les lignes droites appliquées par ordre à son diamètre"); er bezieht jeden der gesuchten Punkte auf je einen Punkt des Diameters und zwar so, daß jener konstruiert werden kann, wenn dieser als bekannt vorausgesetzt wird. Da dieses Beziehen bei Descartes wesentlich ist und den Grundgedanken der modernen Koordinatengeometrie ersetzt, bringe ich als Belege einige Zitate aus der *Géométrie*:

S. 18: „Je choisis une ligne droite comme AB, pour rapporter à ses divers points tous ceux de cette ligne courbe EC."

S. 32: „Or de cela seul qu'on sait le rapport qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, en la façon que j'ai expliquée, il est aisé de trouver aussi le rapport qu'ils ont à tous les autres points et lignes données".

S. 33: „Le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA."

Nun hatte schon Apollonius gelehrt, die Punkte eines Kegelschnittes auf die Punkte eines Diameters zu beziehen, nämlich durch Strecken (Ordinaten), die einen konstanten Winkel mit dem Diameter bilden und deren Länge in jedem einzelnen Falle von der Lage des Punktes des Diameters abhängig war; auch Descartes bedient sich eines ähnlichen Verfahrens, und der konstante Winkel ist bei ihm in der Regel ein rechter. Aber während Apollonius keine algebraischen Formeln benutzte und darum nicht nötig hatte, die Zahl der nicht gegebenen Größen der Relation, wodurch die Länge der Strecken (Ordinaten) bestimmt wurde, auf zwei zu beschränken, lag die Sache anders für Descartes, dessen Zweck ja war, die Konstruktion der Punkte auf Grund einer Endgleichung mit zwei Unbekannten auszuführen. Darum mußte Descartes außer der Ordinate, die die zu berechnende Größe, d. h. die abhängige Veränderliche repräsentierte, eine andere Strecke haben, die der willkürlichen Größe, d. h. der unabhängigen Veränderlichen entsprach, und deren Länge für jeden Punkt des Diameters sofort durch Ausmessung gefunden werden konnte. Dies gewinnt man ja am leichtesten, wenn man einen Punkt auf dem Diameter nimmt und die fragliche Strecke als den Abstand des veränderlichen Punktes des Diameters von diesem Punkte bestimmt. Auch Descartes wandte dieses Verfahren an (S. 18: „en cette ligne AB je choisis un point comme A, pour commencer par lui ce calcul"). Für die erste Strecke (die Ordinate) benutzte er die Benennung: „appliquée par ordre" (S. 31: „toutes les lignes droites appliquées par ordre à son diamètre") und die zweite Strecke nannte er zuweilen Segment (S. 31: „les segments de ce diamètre qui sont entre le sommet et ces lignes"); seine Zeichen waren y für die Ordinate und x für das Segment. Endlich drückte er alle nicht gegebenen Größen auf Grund der Bedingungen als Funktionen von x, y und Konstanten aus, und bekam dadurch die Gleichung der Kurve.

Allerdings führt das Descartessche Verfahren zu demselben Ergebnis, als wenn man sich eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedient, aber der Grundgedanke ist in den zwei Fällen nicht genau derselbe, und Descartes hebt selbst hervor, daß man für die zwei unbekannten Größen der Endgleichung auch andere Strecken nehmen könnte (S. 19: „je dis que je chosis et l'un et l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut"). Beispielsweise könnte man eine zweite Gerade, die mit der Hauptgeraden den Winkel α

bildet, als Hilfsgerade nehmen und für x den Abstand des beweglichen Punktes des Diameters von der Hilfsgeraden nehmen; in diesem Falle würde z. B. die einfachste Gleichung des Kreises nicht $x^2 + y^2 = a^2$, sondern $x^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + y^2 = a^2$ sein. Anderseits ist es leicht zu verstehen, warum Descartes für y und x gerade die Ordinate und das Segment des Diameters wählte; die Ordinate hatte, wie schon erwähnt, Apollonius benutzt, und das Segment des Diameters war die einfachste Strecke, die man für die zweite Größe haben konnte.

Auch F. van Schooten schließt sich in seinem Kommentar zur *Géométrie* der Betrachtungsweise Descartes' an. Wenn er eine Transformation der Gleichung einer Kurve vornehmen will, die von unserem Gesichtspunkt aus eine Drehung der Koordinatenachsen um den Anfangspunkt bedeutet, formuliert er das Problem auf folgende Weise: Eine Kurve ist auf eine Gerade AB bezogen; es wird verlangt, die Gleichung der Kurve zu ermitteln, wenn sie auf eine andere Gerade DF bezogen wird (siehe Descartes, *Geometria . . . in linguam latinam versa, et commentariis illustrata, opera atque studio F. à Schooten*, Lugduni Batavorum 1649, S 192).

Es ist besonders wichtig, auf den wirklichen Gedankengang Descartes' Bezug zu nehmen, wenn man die Vorgeschichte der analytischen Geometrie behandeln will. Sonst könnte man leicht versucht werden, anzunehmen, daß Descartes auf irgendeine Weise von Oresme beeinflußt worden war.

G. Enestrom.

---

2 : 812. Nach Herrn Cantor beginnt das erste Buch der *Géométrie* von Descartes „mit der Behauptung, jede geometrische Aufgabe laufe darauf hinaus, eine Anzahl von Strecken zu kennen". Es ist mir nicht bekannt, welchen Sinn Herr Cantor diesen Worten (Z. 26—27) gibt, aber jedenfalls kann ich nicht anerkennen, daß sie eine richtige Übersetzung der ersten Zeilen der *Géométrie* sind. Diese Zeilen lauten: „Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire" und darin ist meines Erachtens die Behauptung enthalten, die Lösung jeder geometrischen Aufgabe könne auf eine Rechnung mit und Konstruktion von Strecken zurückgeführt werden. Diese Deutung scheint auch Schooten als die richtige zu betrachten, denn er übersetzt: „Omnia geometriae problemata facile ad hujusmodi terminos reduci possunt, ut deinde ad illorum constructionem opus tantum sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere". Meiner Ansicht nach meint Descartes mit seiner Behauptung, daß jeder Ausdruck, der bei der algebraischen Lösung einer Aufgabe erhalten wird, geometrisch als eine Strecke repräsentiert werden kann.

G. Enestrom.

---

2 : 815. In einer früheren Bemerkung (BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 64) habe ich darauf hingewiesen, daß die Behauptung von Descartes, die Herr Cantor auf ebene Raumkurven beschränkt, auch für solche Kurven nur ausnahmsweise richtig sein kann. Herr P. Stäckel hat die Güte gehabt, mich darauf aufmerksam zu machen, daß die Ermittelung der eventuellen Ausnahmefälle ein sehr einfaches Problem der Infinitesimalgeometrie ist.

Betrachtet man die beiden aufeinander senkrechten Ebenen, auf die die im Raume befindliche Kurve projiziert werden soll, als xy- und xz-Ebenen,

und sind die Gleichungen dieser Projektionen $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, z) = 0$, so hat die Ebene, die durch die Normale der Kurve $f(x, y) = 0$ im Punkte x, y senkrecht zur xy-Ebene gelegt wird, die Gleichung

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(y_1 - y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(x_1 - x);$$

ebenso ist die Gleichung der entsprechenden Ebene durch die Normale der Kurve $\varphi(x, z) = 0$

$$\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x}(z_1 - z) = \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}(x_1 - x).$$

Also sind die Gleichungen der Schnittgeraden dieser Ebenen

$$\frac{x_1 - x}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x}} = \frac{y_1 - y}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x}} = \frac{z_1 - z}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}},$$

und die Richtungskosinus der Geraden sind also den Größen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}$$

proportional. Anderseits findet man leicht aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} dz = 0,$$

daß die Richtungskosinus $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ der Tangente der Raumkurve im Punkte x, y, z den Größen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}, \quad -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}, \quad -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x}$$

proportional sind. Nun ergibt die bekannte Bedingung des Senkrechtstehens

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$

daß die Tangente senkrecht auf der Schnittgeraden steht, wenn

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} = 0,$$

also wenn wenigstens eine dieser vier partiellen Ableitungen verschwindet. Indessen zeigt eine einfache geometrische Überlegung, daß die Schnittgerade dann nicht in der Ebene der Raumkurve liegt, folglich nicht die Normale dieser Kurve ist. Die Bedingungsgleichung bedeutet nämlich, daß sich die Raumkurve auf eine der beiden Ebenen (oder auch auf beide) in eine Gerade projiziert, die überdies einer der darin liegenden Koordinatenachsen parallel ist, und dann steht die Schnittgerade senkrecht auf der Ebene der Raumkurve.

Man kann also ganz einfach sagen, daß die Behauptung von Descartes auch mit der Cantorschen Beschränkung falsch ist. G. Enestrom.

---

2 : 852. Hier wird die vereinfachte Tangentenmethode erwähnt, die Descartes 1638 in einem Briefe angab, aber wann diese Methode veröffentlicht wurde, teilt Herr Cantor uns nicht mit; Zeuthen behauptet (*Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 326), daß die Methode von Schooten in seinem Kommentar zur Geometrie Descartes' benutzt wurde, und diese Behauptung ist nicht unrichtig, aber allzu unvoll-

ständig. Die Stelle, die Zeuthen meint, kommt nämlich nicht in der ersten Auflage (1649) des Schootenschen Kommentars vor, sondern ist in die zweite Auflage (*Geometria a R. Descartes . . . cum notis Fl. de Beaune . . . in linguam latinam versa, et commentariis illustrata, opera atque studio F. à Schooten*, Amsterdam 1659, S. 246—247) eingeschaltet worden. Anderseits besorgte Schooten schon 1649 die Veröffentlichung einer nicht von ihm herrührenden Schrift, worin die Methode vorkommt, nämlich die „Notae breves" von Fl. Debeaune (siehe *Geometria a R. Descartes . . . cum notis Fl. de Beaune . . . in linguam latinam versa, et commentariis illustrata, opera atque studio F. à Schooten*, Leyden 1649, S. 147—148). Debeaune gibt als Gleichung der Sekante $x = \frac{(y-v)s}{v}$, wo v und s zwei Größen sind, wodurch die Lage der Sekante bestimmt wird; aus seiner Herleitung der Gleichung geht unmittelbar hervor, daß die Subtangente $y - v$ wird, wenn die Sekante in eine Tangente übergeht. Ferner bringt Debeaune die Gleichung der Kurve auf die Form $x = f(y)$, woraus

$$\frac{(y-v)s}{v} = f(y) \text{ oder } f(y) - \frac{ys}{v} - s = 0.$$

In dem von ihnen behandelten Beispiel ist $f(y)$ ein Polynom zweiten Grades, so daß die Gleichung quadratisch wird Debeaune kann darum die Koeffizienten derselben mit den Koeffizienten der Gleichung $y^2 - 2ey + e^2 = 0$ identifizieren und bekommt dadurch v und s als Funktionen von e und Konstanten; endlich setzt er nach der Descartesschen Vorschrift $e = y$ und erhält dadurch $v = \frac{by}{2b+y}$, so daß die Subtangente $y - \frac{by}{2b+y} = \frac{by+y^2}{2b+y}$ wird.

Genau dasselbe Verfahren hat Schooten 1659 (siehe oben) gelehrt, und er erwähnt dabei gar nicht, daß er S. 107—142 desselben Bandes eine Schrift zum zweiten Male zum Abdruck gebracht hat, worin das Verfahren (S. 131) zu finden ist.

G. Enestrom.

---

2 : 860. Die Worte (Z. 12—14): „und aus dieser Ähnlichkeit folgen Beziehungen zwischen x', y', E, x, y, A, welche, wenn man $F(x, y) = F(x', y') = 0$ mit berücksichtigt", bringen meines Erachtens keine klare Vorstellung von der Fermatschen Tangentenmethode. In dem ersten Beispiele Fermats (die Zissoide) entspricht der folgende Passus den soeben zitierten Worten des Herrn Cantor:

$$E\,G \text{ vocabitur } N - E,\ E\,O \text{ vocabitur } \frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}.$$

Aber für die Größen, die Fermat $E\,G$, N, $E\,O$, R nennt, hat Herr Cantor die Zeichen x', x, y', y eingeführt, so daß die zwei Gleichungen lauten:

$$x' = x - E,\ y' = \frac{yA - yE}{A},$$

und die erste dieser Gleichungen erhält man natürlich nicht aus dem Satze $\triangle MPT \sim \triangle M'P'T'$, sondern unmittelbar aus der Definition von E; das Wort „Beziehungen" ist also nicht ganz genau.

Statt der von mir beanstandeten Worte schlage ich also vor, etwa Folgendes zu setzen: „und aus dieser Ähnlichkeit folgt $y' = \frac{yA - yE}{A}$. Ferner ist auf Grund der Definition $x' = x - E$; wenn man diese Werte in die

Gleichung $F(x', y')$ einsetzt und auf die Gleichung $F(x, y)$ Bezug nimmt, bekommt man". Die Worte „entstehen lassen" (Z. 15) sind natürlich dann zu streichen. G. Enestrom.

---

2 : 863. In betreff der Inflexionspunkte erwähnt Herr Cantor die Behauptung Fermats, „daß in ihnen der von der Berührungslinie mit der Abszissenachse gebildete Winkel ein Minimum sei, wie man leicht beweisen könne, *ut facile est demonstrare*". Es wäre vielleicht nicht ganz ohne Interesse hinzuzufügen, daß Fermat versucht hat einen Beweis seiner Behauptung zu bringen, und daß er eine Regel für die Auffindung von Inflexionspunkten gegeben hat, die der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{y}{\sqrt{y^2+\frac{y^2\,dx^2}{dy^2}}}=0,\quad\text{also}\quad\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

entspricht. Wenn man von der fremden Lösung $\frac{dy}{dx}=\infty$ absieht, stimmt also die Fermatsche Regel mit der in unseren Lehrbüchern der Differentialgeometrie gelehrten überein. G. Enestrom.

---

2 : 878. In betreff der Angabe über die Quadratur der Zykloide (Z. 25—28): „Roberval hatte ihren durch den dreifachen Erzeugungskreis hergestellten Betrag 1634 Mersenne mitgeteilt. Im folgenden Jahre 1635 fanden Fermat und Descartes unabhängig von einander Beweise dieses Satzes" soll die Untersuchung von C. R. Wallner in der Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 41—42 verglichen werden. Daraus geht mit großer Wahrscheinlichkeit hervor, daß „1636" oder „1637" statt „1634" gesetzt werden sollte, und jedenfalls hat Descartes erst 1638 von Robervals Entdeckung Kenntnis bekommen. Wann Fermat diese Entdeckung durch Mersenne kennen lernte, dürfte nicht festgestellt werden können, aber nach der Ansicht P. Tannerys muß es spätestens Februar 1638 gewesen sein (siehe *Oeuvres de Fermat* **2**, Paris 1894, S. 135 Fußnote 1). Am 1. Juni 1638 teilte Roberval selbst Fermat die Entdeckung mit (a. a. O. S. 151).

Die Schrift von Mersenne, die Wallner a. a. O. S. 41 ein ihm „nicht näher bekanntes Schriftstück" nennt, ist die *Reflexiones physico-mathematicae (Novarum observationum physico-mathematicarum* Tomus III, Parisiis 1647), und die von Montucla angedeutete Stelle befindet sich S. 71. Nach P. Tannery (*Oeuvres de Descartes* **5**, Paris 1903, S. 428) ist die dort vorkommende Angabe „ab anno 1634" wahrscheinlich Druckfehler statt „ab anno 1643", so daß die Angabe bedeutungslos ist. G. Enestrom.

---

2 : 891. Come ha già avvertito il sig. Enestrom (Biblioth. Mathemat. 1_3, 1900, p. 273): non v'è dubbio alcuno che Riccardo, autore dell' *Hemisphaerium dissectum* e Tommaso, menzionato nella lettera dello Sluse all' Huygens erano fratelli. Siamo in grado di aggiungere che nacquero ambedue di Riccardo White di Hutton (Essex) e di Maria di Edmondo Plowden, il primo nel 1590, il secondo nel 1593 (e non nel 1588 come è affermato dagli

editori delle Opere dell' Huygens); di questo secondo sappiamo ancora che morì a Londra il 6 Luglio 1676 (e non nel 1680, come asseriscono i suddetti editori): di Riccardo possiamo soltanto affermare che era ancora vivente nel 1653, che a questo tempo si trovava a Roma e vi aveva dal 19 Dicembre 1652 al 3 Gennaio 1653 osservata una cometa (Bibl. Naz. di Firenze. Mss. Galileiani. Cimento. Tomo XIII, car. 8—10). Queste osservazioni furono per la prima volta pubblicate dal Fabbroni (*Lettere inedite di uomini illustri* **2**, Firenze 1775, pag. 261—263), e ristampate dal de Zach (Zeitschrift für Astronomie **4**, Luglio e Agosto 1817, pag. 93).

Padova. Antonio Favaro.

---

2 : 903. In der Fußnote 3 sollen die Worte „bei Marie und" gestrichen werden, folglich ist auch „ist die Darstellung" statt „sind die Darstellungen" zu setzen. Bei Marie kommt nämlich in Wirklichkeit keine Darstellung des Wallisschen Verfahrens, um π zu berechnen, vor, die mit den Darstellungen Cayleys und Reiffs verglichen werden kann. Nachdem Marie angegeben hat, wie Wallis zu seiner Reihe

$$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{48}{105}, \ldots$$

gekommen ist, fügt er hinzu:

> Il [Wallis] se propose le problème de l'interpolation d'un terme entre 1 et $\frac{2}{3}$ sous la condition de satisfaire à la loi de formation de la suite, loi non formulée du reste et définie seulement par son origine concrète. Wallis y parvient, mais par une analyse trop compliquée pour trouver place ici. Il trouve que $\frac{\pi}{2}$ est la limite du rapport
>
> $$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}.$$

Das ist alles, was bei Marie steht! G. Enestrom.

---

2 : 904. Die Worte (Z. 13—14): „von welchen die bei $\mu = -1$ erscheinenden allerdings falsch sind" sollten gestrichen und gleichzeitig Z. 13 „$\mu = 0$, 1, 2, . . ., 8" statt „$\mu = -1$, 0, 1, 2, . . ., 8" gesetzt werden. Herr Cantor hat offenbar seine Behauptung aus der von ihm zitierten Darstellung Reiffs entnommen, und wenn man nur diese Darstellung liest, wird man geneigt, die Behauptung als richtig zu betrachten. Allein wenn man auf Wallis selbst zurückgeht, kommt man zu einem anderen Ergebnis. Die Tabelle, die Reiff (*Geschichte der unendlichen Reihen*, Tübingen 1889, S. 10) wiedergibt, steht im Satze 185 der *Arithmetica infinitorum* (siehe *Opera* **1**, Oxford 1695, S. 460) und Wallis sagt selbst, daß die Tabelle eine Ergänzung der Tabelle seines Satzes 132 sei. Nun gibt Wallis ganz bestimmt an, daß diese letztere Tabelle die Werte der Größe enthält, die wir durch $\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{l}{2}} dx$ bezeichnen würden, und hieraus folgert Reiff offenbar ohne weiteres, daß die erste Zeile ∞, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{48}$, $\frac{10}{384}$ der Tabelle des Satzes 185 die Werte der fraglichen Größe für $m = -1$, $l = -1$, 0, 2, 4, 6, 8 gibt; auch die Rubrik: „Recipr. Quadrat." dieser Zeile und die Rubrik „Recip. $\sqrt{q}$ Residuorum" der

ersten Vertikalzeile der Tabelle scheinen die Richtigkeit der Reiffschen Auffassung zu bestätigen. Aber wenn man bemerkt, daß die ergänzte Tabelle, worin die Reihe ∞, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{48}$, $\frac{105}{384}$ vorkommt, schon im Satze 184 steht und ausdrücklich als eine Tabelle der figurierten Zahlen bezeichnet wird, so wird man dadurch versucht, anzunehmen, daß die Reihe bei Wallis eine Reihe von figurierten Zahlen im verallgemeinerten Sinn, also Binomialkoeffizienten mit beliebigem Index sind. In der Tat kann man ja einen Binomalkoeffizienten m_l auf die Form

$$\frac{(m+l)(m+l-1)\dots(m+1)}{l\,.\,(l-1)\dots 3.\,2.\,1.}$$

bringen, und setzt man hier $m = -\frac{1}{2}$, $l = 1, 2, 3, 4$, bekommt man eben die Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{48}$, $\frac{105}{384}$. Nach Reiff soll Wallis dagegen geglaubt haben, die Größe, die nach unserer Bezeichnung $\int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{l}{2}} dx$ ist, bekomme für $m = -1$, $l = 2$ den Wert $\frac{1}{2}$, also

$$\int_0^1 (1-x^{-2})dx = \frac{1}{2}.$$

Allein bekanntlich hat Wallis ausdrücklich hervorgehoben (*Arithmetica infinitorum* Satz 104), daß man durch Integration von x^{-2} eine überunendliche Größe bekommt, die nach seiner Bezeichnung $\frac{1}{-1}$ ist, so daß $\int_0^1 (1-x^{-2})dx = 1 - \frac{1}{-1}$, und ganz gewiß wußte er, daß das rechte Glied nicht $= \frac{1}{2}$ ist.

Aber wie soll man dann die Worte: „Recipr. Quadrat." und „Recip. $\sqrt{q}$ Residuorum", wodurch Reiff offenbar irregeleitet worden ist, erklären? Meiner Ansicht nach liegt hier ein einfacher Flüchtigkeitsfehler von Wallis vor. Wallis wußte, daß für positive Exponenten die Benennungen des Satzes 132 statt derer des Satzes 184 benutzt werden konnten, und ohne besondere Überlegung wählte er die entsprechenden Benennungen auch für die Binomialkoeffizienten der ersten Zeile. Meine Ansicht, daß Wallis der Benennung dieser Zeile keine besondere Aufmerksamkeit widmete, wird von den Worten, die unmittelbar der Tabelle des Satzes 185 vorangehen, bestätigt. Die Worte sind: „Si infinita series aequalium mulctetur analoga serie subprimanorum, vel subsecundanorum, vel subtertianorum, &c., residua, eorumque quadrata, cubi, &c. eam rationem habebunt ad aequalium seriem congruam, quam habet unitas ad numeros tabellae sequentis." Hier wird also die Zeile, die die reziproken Werte enthält, gar nicht erwähnt

Z. 13 sagt Herr Cantor, daß Wallis die Werte des Integrals bei $\lambda = 0$, 2, 4, 6, 8 findet; in Wirklichkeit gibt Wallis die Werte der Größe, um die es sich bei ihm handelt, nicht für fünf, sondern für zehn Werte an, so daß bei Herrn Cantor $\lambda = -1$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 stehen sollte. Allerdings werden nicht in der Tabelle des Satzes 185, sondern erst in der Tabelle des Satzes 189 alle Werte für $\lambda = -1$, 1, 3, 5, 7 gegeben, aber eine ähnliche Bemerkung gilt ebensosehr für die Cantorsche Angabe (Z. 13): „$\mu = -1$, 0, 1, 2 . . ., 8". Die Tabelle des Satzes 189 hat Reiff nicht, und die Tabelle des Satzes 185 nicht ganz vollständig abgedruckt, so daß ein Verfasser, der als überflüssig betrachtet, auf die Quellen selbst zurückzugehen, sehr leicht veranlaßt wird, die Cantorschen Angaben zu bringen. G. Eneström.

2 : 917. Die Angabe: „Eine Auflösung des Tangentenproblems für algebraische Curven, deren Gleichungspolynom in Gestalt einer rationalen ganzen Funktion gegeben war, scheint De Sluse seit 1652 besessen zu haben. Sie besteht im Folgenden“ ist ungenau. Allerdings gibt Sluse selbst in einem Briefe Huygens an vom 12. Januar 1663 an (*Oeuvres complètes de Chr. Huygens* **4**, La Haye 1891, S. 292), daß er schon seit mehr als 10 Jahren im Besitze einer Tangentenmethode sei, aber dieses Verfahren war unvollkommener ('non absque aliquâ calculi molestiâ') als die jetzt unter seinem Namen bekannte Methode, die Herr Cantor nach den Worten: „Sie besteht im Folgenden“ auseinandersetzt. Über den Zeitpunkt der Erfindung dieser letzteren Methode gibt Sluse in seinem Briefe an Huygens vom 18. August 1662 folgende Auskunft (a a O. S. 207): „Nuper methodum tangentium ex notâ applicatarum ad partes axis qualicumque ratione, quam ante plures annos inveneram, ad facilitatem maximam deduxi, ita ut inspectâ solum in terminis analyticis aequatione quae curvae proprietatem ostendit, fere absque calculo tangentem ducam.“ Es ist also wahrscheinlich, daß die jetzt Sluse zugeschriebene Tangentenmethode erst etwa 1662 erfunden wurde.

G. Enestrom.

---

3 : 68. Der „spätere Zusatz“, von dem Herr Cantor Z. 2 spricht, rührt ganz gewiß von Wallis her; aus einer Angabe S. 72 Z. 17 scheint es, als ob Herr Cantor den Zusatz Newton selbst zuweisen will. Bei der Herausgabe der „Epistolarum quarundam collectio“ im 3. Bande (1699) seiner *Opera* hat Wallis hie und da in eckigen Klammern einige Ergänzungen oder Verbesserungen eingeschaltet, die er überdies durch Kursivschriften von dem Texte unterscheidet. Eine solche Ergänzung ist der Zusatz (a. a. O. S. 635) „quae contigit annis 1665, 1666“ nach „Pestis ingruens“. — Daß die Pest schon 1665 ausbrach, gibt Wallis ausdrücklich in der englischen Ausgabe (London 1685, S. 330) seiner Algebra an, und darum wäre es vielleicht besser, Z. 2—3 „auf das Jahr 1665“ statt „auf die Jahre 1665 und 1666“ zu setzen.

G. Enestrom.

---

3 : 72. Die Angabe (Z. 15—17): „Das allgemeine Abhängigkeitsgesetz eines Binomialcoefficienten von dem unmittelbar vorhergehenden fehlt in der Abhandlung [*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*], wiewohl Newton dem Briefe [vom 24. Oktober 1676] zufolge es seit 1666 kannte“ ist teils irreleitend, teils ungenau und sollte darum entweder gestrichen oder modifiziert werden. Der Anfang der Angabe ist buchstäblich richtig, aber muß den nicht sachkundigen Leser irreleiten. In Wirklichkeit benutzt Newton das Binomialtheorem in seiner Abhandlung nur, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist (vgl. BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 69), und für seinen Zweck braucht er nur die Koeffizienten der zwei ersten Glieder zu kennen; es ist also selbstverständlich, daß er nicht das allgemeine Abhängigkeitsgesetz angegeben hat. Die übrigen Reihen, die tatsächlich Binomialreihen sind, erhält Newton durch Wurzelausziehen oder Division; der Exponent ist also immer von der Form $\frac{\pm 1}{n}$ (n eine ganze Zahl), und auch wenn Newton die fraglichen Reihen durch Benutzung des Binomialtheorems hergeleitet hätte — was nicht

der Fall ist — würde er keinen wirklichen Anlaß gehabt haben, das allgemeine Abhängigkeitsgesetz anzugeben.

Daß Newton seit 1666 das Gesetz kannte, steht nicht in dem zitierten Briefe; die Worte „quae contigit annis 1665, 1666", die höchstwahrscheinlich die Angabe des Herrn Cantor veranlaßt haben, sind ein Zusatz von Wallis 1699 (siehe oben die Bemerkung zu **3** : 68). Newton sagt selbst, daß er sich mit dem Binomialtheorum am Beginne seiner mathematischen Studien („sub initio studiorum meorum mathematicorum") beschäftigt hatte, und nachdem er über den Gang seiner Untersuchungen berichtet hat, bemerkt er: „eo tempore pestis ingruens coegit me hinc fugere et alia cogitare"; aus diesen Worten folgerte Wallis (*A treatise of algebra*, London 1685, S. 330), daß die Untersuchungen Newtons über das Binomialtheorem etwa 1664 oder 1665 ausgeführt worden sind, weil die Pest 1665 ausbrach. Nach einer Angabe von Newton selbst ist das Jahr 1665 das richtige (siehe *A catalogue of the Portsmouth collection*, Cambridge 1888, S. XVIII: „In the beginning of the year 1665 I found the method of approximating series and the rule for reducing any dignity of any binomial into such a series"). G. Enestrom.

---

3 : 78. Die Erklärung (Z. 4—6 v. u.) des Termes „Transmutation" bei Leibniz: „Er [nahm] selbst Zerlegungen in Dreiecke vor und er nannte dieses Transmutation" ist unrichtig. Was Leibniz mit Transmutation meinte, hat er selbst in seinem Briefe an Oldenburg vom 27. August 1676 auf folgende Weise erklärt:

> Transmutationum methodus mihi inter potissima analyseos censenda videtur . . . ejus vero fundamentum vobis candide libereque scribo . . . . transformationis fundamentum hoc est: ut figura proposita rectis innumeris utcunque . . . ductis resolvatur in partes; quae partes aut aliae ipsis aequales, alio situ aliave forma reconjunctae, aliam componant figuram priori aequipollentem seu ejusdem areae etsi alia longe figura constantem.

Diese Erklärung allein ist ausschlaggebend, aber noch deutlicher hat Leibnitz in seiner *Historia et origo calculi differentialis* hervorgehoben, daß die Transmutation etwas ganz anderes als Zerlegungen in Dreiecke ist. Nachdem er dieses letztere Verfahren auseinandergesetzt hat, fügt er nämlich hinzu (*Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, **5**, Halle 1858, S. 402): „Idem etiam assecutus autor [d. h. Leibniz] est methodo transmutationum" und erläutert dann die fragliche Methode.

Wie Herr Cantor zu seiner unrichtigen Auffassung der Transmutationsmethode gekommen ist, weiß ich nicht mit Bestimmtheit, aber vielleicht kann sein Fehler durch einen Ausspruch von Gerhardt (a. a. O. S. 83) erklärt werden. Nachdem Gerhardt über die Dreieckszerlegung bei Leibniz berichtet hat, bemerkt er: „Dies Verfahren nannte Leibniz die Methode der Transformation", und es ist ja nicht undenkbar, daß Herr Cantor „Transmutation" statt „Transformation" gelesen hat.

Glücklicherweise hat Herr Cantor selbst dafür Sorge getragen, daß der aufmerksame Leser seine Definition des Ausdruckes „Transmutation" als unzuverlässig betrachten muß, denn S. 81 gibt er eine ganz andere Erklärnng desselben (siehe unten) und S. 181 eine dritte; freilich fehlt im Register S. 922 unter dem Schlagwort „Transmutation" der Verweis auf diese dritte Stelle.

G. Enestrom.

---

3 : 81. Die Angabe (Z. 11—14): „Das Dreieckchen war dadurch in eine unendliche Summe von Gliedern wechselnden Vorzeichens verwandelt — Transmutation“ ist nicht durchaus unrichtig, aber wahr ist sie ganz gewiß nicht. Bei der „Transmutation“ bezweckte Leibniz freilich, die zu integrierende Größe durch passende Substitution in eine andere zu verwandeln, die in eine unendliche Reihe entwickelt werden konnte (vgl. BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 72—73), aber es war in erster Linie die Substitution selbst, die er „Transmutation“ nannte. Für ihn war anderseits die Zerlegung in Dreiecke, worüber Herr Cantor S. 80—81 berichtet, eine ganz andere Methode als die „Transmutation“ (siehe oben die Bemerkung zu **3** : 78). Allerdings ist es nicht besonders schwierig, nachzuweisen, daß die Zerlegung in Dreiecke, wenn man das geometrische Verfahren in analytische Sprache übersetzt, eine spezielle Art von „Transmutation“ ist, aber Leibniz selbst scheint nicht auf diesen Gedanken gekommen zu sein.

G. Enestrom.

---

3 : 147. Was Herr Cantor Z. 19—28 („denn Huygens ... genommen war“) sagt, kann, wenn es sich um eine nach 1891 erschienene Geschichte der Mathematik handelt, als unnötigerweise unvollständig bezeichnet werden. Im vierten Bande der *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens* (La Haye 1891, S. 237—240) befindet sich nämlich ein Brief von Huygens an Sluse vom 25. September 1662, worin sich jener (S. 238) in betreff der Tangente der Kurve $x^3 + y^3 - nxy = 0$ auf folgende Weise äußert:

> Hujus tangentem in dato puncto ego quidem non nisi mediocriter prolixo calculo inveni (ex hac nempe aequatione, nam potest alioqui ad aliam multo commodiorem res deduci) plurimumque mirabor methodum tuam, si absque ullo pene, ac tantum inspectis characteribus istis reperire eam doceat.

Hieraus geht ja sofort hervor, daß Huygens am 25. September 1662 noch nicht im Besitze seiner Tangentenmethode war. Nun weiß man ferner aus einem zuerst von C. Le Paige 1884 veröffentlichten Briefe Sluses an Huygens vom 12. Januar 1663 (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **17**, 1884, S. 607—609), daß dieser in einem jetzt verlorenen Briefe vom 10. Dezember 1662 mitgeteilt hatte, er habe jetzt eine mit der Sluseschen verwandte Tangentenmethode entdeckt. Sluse schreibt nämlich (a. a. O. S. 607):

> Gaudeo te ac clarissimum Huddenium in tangentium methodum meae non absimilem incidisse.

Die Cantorschen Angaben, daß Huygens seine Tangentenmethode nicht vor 1652 entdeckt haben dürfte, aber vor 1667 gefunden haben muß, kann man also auf folgende Weise präzisieren: “Huygens entdeckte im Herbst 1662 seine Tangentenmethode“. Wann die 1693 veröffentlichte Abhandlung von Huygens geschrieben wurde, ist dadurch nicht entschieden, aber diese Frage ist ja von untergeordneter Bedeutung.

Z. 28 ist die Jahreszahl „1652“ auf Grund einer früheren Bemerkung (siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 249) zu modifizieren. G. Enestrom.

---

3 : 158. Der Absatz, der S. 157 mit den Worten: „Gestatten wir uns“ beginnt, endete in der ersten Auflage der Vorlesungen mit den Worten: „zu

entnehmen und umgekehrt". Bei der Bearbeitung der zweiten Auflage fügte Herr Cantor nun die folgende Bemerkung hinzu:

> Nur in einer Beziehung, auf welche allerdings einige Forscher ein sehr großes Gewicht legen[1]), kann man von einem Fortschritte reden: in der *Analysis per aequationes* war deutlicher als bei irgend einem Vorgänger, Barrow (S. 137) nicht ausgeschlossen, den Gegensatz zwischen Quadratur und Tangentenproblem, mithin die Übereinstimmung der Quadratur mit dem, was das umgekehrte Tangentenproblem zu ermitteln suchte, zu erkennen.

1) Besonders P. Tannery und Zeuthen sind dieser Meinung.

Da diese Bemerkung keinen Beleg enthält, muß der nicht sachkundige Leser schließen, daß die Stelle der *Analysis per aequationes*, die angeblich den Gegensatz zwischen Quadratur und Tangentenproblem hervorhebt, ohne Schwierigkeit aufgefunden werden kann. Allein ich habe die ganze Abhandlung mehr als einmal durchgelesen, ohne die fragliche Stelle — oder überhaupt eine Stelle, wo das Tangentenproblem behandelt wird — zu entdecken. Freilich verweist Herr Cantor auf P. Tannery und Zeuthen, aber da keine Schriften dieser Verfasser zitiert werden, ist der Verweis wertlos. Bis auf weiteres muß ich darum die Behauptung des Herrn Cantor als unzuverlässig bezeichnen, und ich bin geneigt, anzunehmen, daß sie auf einem Mißverständnis beruht. Zeuthen hat nämlich in seiner Abhandlung *Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal* (Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 199—202) bemerkt, daß Newton in der *Analysis per aequationes* Differentiation und Integration als entgegengesetzte Operationen erkannt hat, und dieser Bemerkung kann ich bis zu einem gewissen Grade beistimmen. Aber an der von Zeuthen zitierten Stelle der *Analysis per aequationes* handelt es sich gar nicht um das Tangentenproblem, sondern um die Herleitung der Ordinate einer Kurve, wenn ihre Fläche gegeben ist; in Wirklichkeit kann man aus den Ausführungen Newton's folgern, nicht daß Differentiation und Integration entgegengesetzte Operationen sind, sondern daß die Quadratur als eine der inversen Operationen der Differentiation betrachtet werden kann.

Beiläufig mache ich darauf aufmerksam, daß der Ausspruch: „mithin auch die Übereinstimmung der Quadratur mit dem, was das umgekehrte Tangentenproblem zu ermitteln suchte", nicht gut redigiert ist. Das Problem der Quadratur kann von einem gewissen Gesichtspunkte aus als ein sehr spezieller Fall des umgekehrten Tangentenproblems betrachtet werden, aber die zwei Probleme „stimmen" im allgemeinen nicht „überein". G. Enestrom.

---

3 : 167. Am Ende der Seite sollten die Worte: „entweder noch gar nicht in London oder . . . Ferner steht es keineswegs fest, ob Tschirnhaus mit Collins bekannt geworden ist", gestrichen werden. Daß Tschirnhaus 1675 bei seinem Besuche in London mit Collins zusammentraf, weiß man aus dem bekannten Briefe Oldenburg's an Leibniz vom 30. September 1675, sowie aus einem Brief, den Collins ebenfalls am 30. September 1675 an Oldenburg schrieb und aus einem Brief von Collins an J. Gregory vom 8. Juli 1675. Im ersten Briefe (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. Gerhardt **1**, Berlin 1849, S. 82) kommt folgender Passus vor, der allein für die Frage entscheidend ist: „Quod attinet alicujus arcus circuli rectifica-

tionem, impertiri tibi poterit laudatus TSCHIRNHAUSIUS methodum a GREGORIO nostro inventam quam, cum ille apud nos esset, COLLINIUS ipsi communicavit." Der zitierte Passus wurde bekanntlich schon 1712 im *Commercium epistolicum* veröffentlicht (siehe die Ausgabe von BIOT und LEFORT, Paris 1856, S. 98).

Der Brief von COLLINS an OLDENBURG vom 30. September 1675 ist eigentlich an TSCHIRNHAUS gerichtet, und darin kommt folgende Stelle vor (siehe S. J. RIGAUD, *Correspondence of scientific men of the seventeenth century* **1**, Oxford 1841, S. 212): „Even those [foundations] of Mr. NEWTON may become of frequent use in arithmetical problems, as even in that of Dr. DAVENANT, which I mentioned to M. TSCHIRNHAUS before his going over." Aus dem dritten von mir erwähnten Briefe ersieht man (siehe RIGAUD, a. a. O. **2**, Oxford 1841, S. 263—264), daß TSCHIRNHAUS beabsichtigte, um den 3. Juli London zu verlassen und daß er vor seiner Abreise COLLINS besucht hatte.

Daß TSCHIRNHAUS wirklich schon im Mai 1675 in London war, hat man meines Wissens keinen Anlaß, in Abrede zu stellen, und Herr CANTOR gibt nicht den geringsten Grund an, warum er die Richtigkeit der Angabe des *Commercium epistolicum* bezweifelt.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 172. In der ersten Auflage des dritten Bandes der *Vorlesungen* bemerkte Herr CANTOR (S. 166) in betreff einer Stelle des *Methodus fluxionum* NEWTONS, wo es sich um Fluxionsgleichungen von der Form $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \Sigma A_{m,n}\, x^m y^n$; handelt:

> Unbequem ist ihm . . das Auftreten von Gliedern wie $\frac{a}{x}$ . . .NEWTON schreibt vor, man solle alsdann das $\frac{a}{x}$ durch ein $\frac{a}{b+x}$ oder ein $\frac{a}{b-x}$ ersetzen und diesen Ausdruck durch Division in eine Reihe verwandeln; an eine Rechtfertigung dieser Willkühr scheint er nicht gedacht zu haben. Doch ist damit noch nicht der Gipfelpunkt willkührlichen Verfahrens erreicht.

Hinsichtlich dieser Bemerkung hebte H. G. ZEUTHEN hervor (*Sur quelques critiques faites de nos jours à NEWTON;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 266—267), daß man in diesem Falle nicht das Wort „Willkür" gebrauchen könne, weil das Verfahren NEWTONS für seinen Zweck das einzig natürliche war, und etwa dasselbe bemerkte ein Jahr später E. TISCHER (*Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ*, Leipzig 1896, S. 42). Darum ersetzte Herr CANTOR in der zweiten Auflage der *Vorlesungen* den Passus: „an eine Rechtfertigung dieser Willkür scheint er nicht gedacht zu haben", durch folgende Worte: „Er nimmt also eine Veränderung der Koordinaten, eine Verlegung des Anfangspunktes vor. Das wäre an und für sich gewiß gerechtfertigt, nur mußte gesagt werden, daß, wenn x in $b-x$ übergehe, gleichzeitig $\dot{x}$ durch $-\dot{x}$ zu ersetzen sei." Dagegen ließ Herr CANTOR die Worte: „Doch ist damit noch nicht der Gipfelpunkt willkürlichen Verfahrens erreicht", stehen, obgleich diese durch die Änderung natürlich sinnlos geworden sind.

In betreff des CANTORschen Ausspruches: „nur mußte gesagt werden . . . zu ersetzen sei", mache ich darauf aufmerksam, daß ein Kenner des *Methodus fluxionum* sich sicherlich nicht wie Herr CANTOR ausdrücken würde. NEWTON

hat nämlich schon bei der Behandlung des „Casus I“ $1 - x$ oder $c - x$ statt x gesetzt, ohne gleichzeitig $\dot{x}$ durch $-\dot{x}$ zu ersetzen (siehe Newtoni *Opuscula* I, S. 69). Wenn man dies nicht angibt, weiß der Leser nicht, ob es sich um einen kleinen Redaktionsfehler oder um eine wirkliche Abweichung von dem jetzt üblichen Verfahren handelt. G. Enestrom.

---

3 : 173. In der *Methodus fluxionum* hat Newton bekanntlich auch totale Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen behandelt. Seine Regel ist: wenn drei, vier usw. Veränderliche vorkommen, nimmt man beliebig eine, zwei usw. Hilfsgleichungen an, deren jede zwei der Veränderlichen enthält, und dann eliminiert man eine, zwei usw. Veränderliche, so daß die Endgleichung nur zwei Veränderliche enthält. In betreff dieser Vorschrift bemerkte Herr Cantor in der ersten Auflage (S. 166) des dritten Bandes der *Vorlesungen:*

> Anders ausgedrückt: Newton weiß mit voneinander unabhängigen Veränderlichen sich nicht zu helfen und setzt deshalb diese ihm unbequemen Größen durch hinzugenommene Bedingungen in ein Abhängigkeitsverhältnis von einander.

Indessen beanstandete H. G. Zeuthen (*Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 263) diesen Passus, und vielleicht wurde Herr Cantor dadurch veranlaßt, ihn zu modifizieren; in der zweiten Auflage drückt er sich auf folgende Weise aus:

> Anders ausgedrückt: Newton setzt die ihm unbequemen Größen durch hinzugenommene Bedingungen in ein Abhängigkeitsverhältnis von einander, ein Verfahren, welches geeignet ist zur Integration zu führen, aber damit noch keineswegs Berechtigung gewinnt.

Indessen ist diese Modifikation des Passus gar keine wirkliche Verbesserung. Das Newtonsche Verfahren ist nämlich, wie auch Zeuthen 1895 hervorhob, im wesentlichen mit dem noch jetzt gebräuchlichen identisch, nur daß Newton keine Zeichen für eine beliebige Funktion hatte. Zeuthen hat beiläufig bemerkt, daß kein Grund vorliegt, warum nur zwei Veränderliche in den Hilfsgleichungen vorkommen sollen, aber diese formell richtige Bemerkung ist reel belanglos, was auch Zeuthen selbst durch Versetzung derselben in eine Fußnote anerkannt hat.

Was Herr Cantor mit den Worten: „aber damit keineswegs Berechtigung gewinnt“ meint, ist mir unbekannt, aber jedenfalls sind die Worte unangebracht. Daß Newton den sehr speziellen Fall, in dem die gegebene Gleichung der Integrabilitätsbedingung genügt, nicht besonders behandelt hat, ist richtig, aber dies hat ja nichts mit der Frage der „Berechtigung“ seines Verfahrens zu tun. G. Enestrom.

---

3 : 175. In der ersten Auflage des dritten Bandes der *Vorlesungen* kommt (S. 168) folgender Passus vor [A bedeutet den Anfangspunkt der Abszissen, T den Punkt, wo die Tangente die Abszissenachse schneidet]:

> Über die Inflexion hatte Newton unklare Vorstellungen. Er meint an einer Stelle in dem Punkte D sei ein Übergang von einem konvexen zu einem konkaven Kurventeile, wenn AT (mithin auch BT oder die Subtangente) einen kleinsten Wert besitze.

Indessen bemerkte H. G. Zeuthen schon 1895 (*Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton;* Bullet de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 264—265), daß der parenthetische Zusatz „mithin auch *BT*' oder die Subtangente" eine auffällige Unrichtigkeit enthält. Leider scheint diese Bemerkung Herrn Cantor entgangen zu sein, denn in der zweiten Auflage hat er den oben zitierten Passus wörtlich abdrucken lassen. Wenn Herr Cantor deutlich angegeben hätte, daß der Zusatz von ihm selbst und nicht von Newton herrührt, so wäre die Sache vielleicht von untergeordneter Bedeutung gewesen, denn jeder Mathematiker muß wohl wissen, daß die Ausdrücke $\frac{ydx}{dy} - x$ und $\frac{ydx}{dy}$ nicht gleichzeitig ein Maximum oder Minimum werden; sonst würden ja gleichzeitig $\frac{d}{dx}\left[\frac{ydx}{dy} - x\right]$ und $\frac{d}{dx}\left[\frac{ydx}{dy}\right]$ Null werden, also $-1 = 0$. Sehr zu bedauern ist indessen, daß Herr Cantor noch in der neuen Auflage eine Angabe gebracht hat, wodurch Newton ohne jeden Grund als ein schlechter Mathematiker erscheinen muß.

An der oben zitierten Stelle hat Zeuthen auch hervorgehoben, daß Newton gar nicht „unklare Vorstellungen" von der Inflexion hatte. In der Tat besagt ja die von Herrn Cantor angegebene Regel, wenn man seinen unrichtigen Zusatz streicht, daß die Inflexionspunkte aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{ydx}{dy} - x\right] = 0$$

oder

$$-\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

bestimmt werden sollen. Der einzige Übelstand bei der Anwendung der Regel ist also, daß man auch fremde Lösungen bekommen kann, aber wie Zeuthen bemerkt hat, ist es leicht, diese Lösungen von den richtigen zu unterscheiden.

Der Absatz, der mit den Worten „Über die Inflexion" beginnt, sollte also auf andere Weise redigiert werden.

G. Eneström.

---

3 : 180. Was Herr Cantor über den Brief von Newton an Collins vom 10. Dezember 1672 sagt, ist zum Teil ungenau. Das Aktenstück, das 1712 dem Druck übergeben wurde, war nicht der Brief selbst, sondern nur ein sehr kurzer Auszug (kaum $\frac{1}{8}$ des ganzen Briefes) in lateinischer Übersetzung. In dieser Übersetzung fehlen die ersten Zeilen des Originals und nach den Worten: „describenda fuerim avocatus" folgen im Original einige Zeilen über kubische Gleichungen sowie sehr lange Ausführungen über optische Instrumente. Der Name „Tangentenbrief" paßt darum weniger gut für das Original. Es ist also ebenfalls ungenau zu sagen, daß „Oldenburg ein Wort veränderte, wo es sich um die Krümmungsverhältnisse handelte" und das Newton *de curvitatibus* schrieb. In Wirklichkeit schrieb Newton „about the crookedness", und ob die freie Übersetzung *de curvarum flexu* von Collins oder von Oldenburg herrührt, dürfte kaum entschieden werden können.

Warum Herr Cantor Z. 19 und 21 das nichtssagende Wort „Abmessungen" benutzt, ist mir nicht klar. Newton sagt „accordıng to the dimensions" und die beste Übersetzung ist wohl: „den Exponenten gemäß".

G. Eneström.

3 : 182. Herr Cantor behandelt hier, ohne zu einem sicheren Resultate zu gelangen, die Frage, auf welche Weise Leibniz die Abhandlung Newtons *Analysis per aequationes* zur Verfügung bekam; er endet seine Untersuchung mit den Worten: „Es ist nicht ersichtlich, wann anders als während des zweiten Londoner Aufenthaltes Leibniz den handschriftlichen Aufsatz Newtons zur Verfügung gehabt haben sollte". Indessen gibt es ein Aktenstück, das zeigt, daß Tschirnhaus höchstwahrscheinlich im September 1675 im Besitze einer Abschrift (oder eines Auszuges) der *Analysis per aequationes* war, und dadurch werden die zitierten Worte des Herrn Cantor hinfällig, denn gerade im September 1675 waren Tschirnhaus und Leibniz in Paris zusammen.

Das fragliche Aktenstück ist ein vom 30. September 1675 datierter Brief von Collins an Oldenburg (vgl. oben S. 253), der für Tschirnhaus geschrieben war, und ich bringe hier unten zum Abdruck einige Zeilen dieses Briefes:

> whereas he [Tschirnhaus] saith he did not see the same series in Mr. Newton's letter; that is true, but nevertheless his method is as well applicable to a sector of a circle as to a zone, arch or segment . . . but if the square root of the 3rd and cube root of the 4th be extracted, according to the first theorem in Mr. Newton's letter . . .

Aus dem, was Collins hier sagt, scheint mir deutlich hervorzugehen, daß „Mr. Newton's letter" eben die *Analysis per aequationes* ist, die Barrow bekanntlich am 31. Juli 1669 brieflich an Collins sandte, so daß Collins mit Recht die Abhandlung „Mr. Newton's letter" nennen konnte. Übrigens gibt es meines Wissens keinen anderen vor dem 30. September 1675 geschriebenen Brief von Newton, für welchen die oben zitierten Zeilen passen.

Daß Tschirnhaus eine Abschrift (oder einen Auszug) des Briefes von London nach Paris mitgebracht hatte, scheint mir auch aus dem Zitate hervorzugehen, denn sonst müßte man annehmen, daß Tschirnhaus „Mr. Newton's letter" in London sehr eingehend studiert hatte, was wohl wenig glaublich ist.

Nebenbei bemerke ich, daß die bestimmte Behauptung des *Commercium epistolicum* (siehe die Ausgabe von Biot und Lefort, Paris 1856, S. 84), Tschirnhaus habe im Mai 1675 eine Abschrift des Briefes Newton's vom 10. Dezember 1672 bekommen, auf einer einfachen Verwechselung dieses Briefes mit dem Aktenstück, das Collins „Mr. Newton's letter" nennt, beruhen kann.

G. Enestrom.

---

3 : 231. Über das erste Auftreten des Trajektorienproblems berichtet Herr Cantor am Ende der Seite auf folgende Weise:

> Im August 1697 spricht Johann Bernoulli von der Aufgabe, eine Kurve zu finden, welche gegebene Kurven unter gegebenem, unveränderlichem oder nach einem bestimmten Gesetze veränderlichem Winkel schneide. Ein Jahr später gibt er der gesuchten Kurve den Namen der Trajectorie, und damit ist der Infinitesimalgeometrie ein neues schwieriges Kapitel eingefügt, an dessen Bearbeitung zahlreiche Kräfte ersten Ranges sich versuchten.

Aus diesem Berichte muß wohl der Leser folgern, daß die Geschichte des Trajektorienproblems mit August 1697 beginnt. Aber in Wirklichkeit wurde das Problem schon 1694 von Johann Bernoulli in einem Briefe an Leibniz gestellt; ein recht langer Auszug aus diesem Briefe befindet sich gerade in dem

Absatz, in dem Bernoulli der gesuchten Kurve den Namen Trajektorie gab, und auf den Herr Cantor in seiner Fußnote 7 verweist. Allerdings zog Bernoulli 1694 nur den Fall eines unveränderlichen Winkels in Betracht.

Das Trajektorienproblem wurde von Bernoulli und Leibniz in ihrem Briefwechsel 1694—1696 oft berührt; schon im Dezember 1694 hatte Leibnitz die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorie gefunden. Im Maiheft der Acta eruditorum 1697 drang das Problem in die Öffentlichkeit, indem Johann Bernoulli teils dasselbe synthetisch für eine Schar von Zykloiden löste, teils die Lösung für eine Schar von logarithmischen Kurven verlangte, und den dadurch angeregten Artikel von Jakob Bernoulli erwähnt Herr Cantor S. 242.

G. Eneström.

---

3 : 285. Z. 3—16 dieser Seite behandelt Herr Cantor das bekannte „Scholium" der *Quadratura curvarum*, dessen Wortlaut er schon S. 283 in deutscher Übersetzung wiedergegeben hat. Er beginnt mit folgenden Worten:

> Sachlich leuchtet ein, daß in dem Scholium Unrichtiges behauptet ist. Das Glied $\frac{n^2-n}{2}z^{n-1}$ ist nicht der zweite, $\frac{n^3-3n^2+2n}{6}z^{n-2}$ nicht der dritte Differentialquotient von z^n.

Aber wenn Herr Cantor sich die Mühe gegeben hätte, seine eigene Übersetzung S. 283 durchzulesen, so würde er gefunden haben, daß Newton nicht behauptet, $\frac{n^2-n}{2}z^{n-1}$ sei der zweite Differentialquotient von z^n, sondern wörtlich: „das dritte Glied $\frac{n^2-n}{2}o^2z^{n-2}$ wird der zweite Zuwachs oder die zweite Differenz sein und ihr ist, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die zweite Fluxion proportional". Sachlich kann darum die Behauptung Newtons nicht beanstandet werden, wohl aber formell, weil Newton das Wort „proportionalis" in einer Bedeutung benutzt hat, die seine Ausführungen fast unverständlich macht. Newton sollte darum den ersten Absatz seines „Scholium" mit Ausnahme der Worte: „Quantitatum fluentium fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus supra" gestrichen haben, weil das „Scholium" die Sache nicht erklärt, sondern vielmehr verdunkelt.

Aber was meinte Newton eigentlich mit seinem „Scholium"? Zeuthen, der die Behauptungen Newtons als durchaus richtig betrachtet, erklärt die Sache auf folgende Weise (*Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 262): „Ce n'est pas, en effet „l'incrementum secundum" qu'il a défini rigoureusement à l'endroit qui fait l'objet de la critique, mais la „fluxio secunda", et de celle-ci il dit fort justement qu'elle est proportionelle à la quantité „nascens" qu'il avait égalée à $\frac{\eta\eta-\eta}{2}ooz^{\eta-2}$." Ich muß indessen bekennen, daß ich diese Erklärung nicht verstehe, und ich habe versucht, auf einem anderen Wege die Erklärung zu erzielen. Meiner Ansicht nach betrachtet Newton das rechte Glied der Gleichung

$$(z+o)^n = z^n + noz^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oo\,z^{n-2} + \cdots$$

als einen Annäherungswert von $(z+o)^n$, so daß z^n den ersten Annäherungswert repräsentiert und die folgenden Glieder die sukzessiven Korrektionen sind; eine solche Korrektion nennt er „incrementum" oder „differentia". Nun will

er auf den Nutzen der Fluxionen bei der Berechnung dieser Korrektionen aufmerksam machen und bemerkt für diesen Zweck, daß die Fluxionen den Korrektionen proportional sind, so daß diese leicht berechnet werden können, wenn jene bekannt sind. Ist dies wirklich der Sinn des „Scholium", so muß man wohl anerkennen, daß Newton nichts Unrichtiges gesagt hat, und es ist nur zu bedauern, daß er durch Benutzung des Wortes „proportionalis" unklar geworden ist

Meines Erachtens sollten also die Zeilen 3—16 gestrichen werden.

G. Enestrom.

---

3 : 285. Der Ausspruch (Z. 7—9 v. u.): „Jetzt, wo es uns obliegt, die Geschichte des Streites [zwischen Newton und Leibniz] selbst eingehend zu erzählen" ist meines Erachtens nicht gut redigiert. Wenn ein Verfasser sich vornimmt, eine Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts zu bearbeiten, ist er natürlich innerhalb gewisser Grenzen berechtigt, selbst zu entscheiden, wie ausführlich ein einzelner Gegenstand, der dabei in Betracht kommen kann, behandelt werden soll, aber anderseits ist klar, daß die Ausführlichkeit bis zu einem gewissen Grade von der Bedeutung des Gegenstandes abhängig sein soll. Will man zum Beispiel der Geschichte der Periode 1700—1726 etwa 3000 Druckseiten widmen, so könnte man möglicherweise veranlaßt werden, die Geschichte des Prioritätsstreites etwa so ausführlich wie Herr Cantor zu behandeln, aber meiner Ansicht nach gar nicht, wenn man nur 230 Druckseiten für die ganze Geschichte der fraglichen Periode anweist. Übrigens erlaube ich mir hervorzuheben, daß es überhaupt keine „Obliegenheit" des Verfassers einer Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts ist, den Prioritätsstreit zu behandeln, da der Streit wesentlich nur biographisches Interesse darbietet. Dagegen gebe ich gern zu, daß eine Monographie über diesen Gegenstand ebenso sehr angebracht sein kann, wie Monographien über andere spezielle Fragen, die mit der Geschichte der Mathematik in Beziehung stehen. G. Enestrom.

---

3 : 290. Der Passus (Z. 12—15): „Den Engländer hören wir auch aus einem anderen Satze des Briefes Wallis' vom 29. August: Fatio sei kein Engländer, sondern ein Deutscher aus der Schweiz, der allerdings eine gewisse Zeit in England verweilte, aber gegenwärtig wieder fort sei" sollte entweder gestrichen oder ergänzt werden. Herr Cantor hat früher in demselben Absatze von dem übertriebenen englischen Nationalitätsgefühl Wallis' sowie von häßlichen Folgen einer an sich lobenswerten Geistesrichtung gesprochen, und wenn der Leser die Worte: „den Engländer hören wir auch" mit dieser Bemerkung zusammenstellt, wird er versucht, den Ausspruch von Wallis, Fatio sei kein Engländer, falsch zu deuten. Was Wallis selbst damit meint, ist aus den nachfolgenden Worten: „Nolim ego te a quoquam laesum, praesertim non ab Anglis" ersichtlich, und sein Ausspruch muß darum als ein lobenswerter Ausdruck seines Nationalitätsgefühls betrachtet werden.

G. Enestrom.

---

3 : 295. Die Worte (Z. 24—26): „denn eine verletzende Besprechung überhaupt gelesen zu haben, vergißt kein Schriftsteller, mag ihm auch der genaue Inhalt aus dem Gedächtnisse schwinden" sollten meines Erachtens ge-

strichen werden. Daß die Behauptung des Herrn CANTOR für einen sehr eitlen oder sehr empfindlichen Schriftsteller passen kann, will ich nicht in Abrede stellen, aber als allgemeiner Satz ist die Behauptung ganz gewiß falsch. Was besonders NEWTON betrifft, habe ich nicht bei meinem Studium seiner Briefe finden können, daß er empfindlich war; eitel war er vielleicht, aber sehr eitel möchte ich ihn dennoch nicht nennen. G. ENESTRÖM.

---

3 : 310. Herr CANTOR berichtet hier über einige Angaben des *Commercium epistolicum*, die er als „Verdächtigungen" der LEIBNIZschen Entdeckungen bezeichnet, und die zweite Folge solcher Angaben bezieht sich auf die Entdeckung der Reihe für $\frac{\pi}{4}$. Nun hat Herr CANTOR früher (S. 76—80) die Entdeckungsgeschichte dieser Reihe erzählt, und es zeigte sich dabei, daß LEIBNIZ schon vor dem 7. November 1674 HUYGENS die Reihe mitgeteilt hatte, während er erst 1675 von OLDENBURG Kenntnis der Entdeckung GREGORYS bekam. Aus dieser Erzählung muß der nicht sachkundige Leser folgern, daß die Herausgeber des *Commercium epistolicum* keinen wirklichen Grund gehabt haben, LEIBNIZ des Diebstahls zu beschuldigen. Auch Herr CANTOR selbst scheint dieselbe Auffassung zu haben, denn sonst hätte er wohl nicht in diesem Falle das Wort „Verdächtigungen" benutzt. Im folgenden werde ich die Frage zum Gegenstand einer näheren Untersuchung machen; die von mir ohne weiteren Verweis zitierten Briefe sind im *Commercium epistolicum* zum Abdruck gebracht.

Das älteste Aktenstück, woraus die Herausgeber des *Commercium epistolicum* erfahren konnten, daß sich LEIBNIZ mit der Reihe für $\frac{\pi}{4}$ beschäftigt hatte, ist ein Brief LEIBNIZens an OLDENBURG vom 15. Juli 1674 (vgl. BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 69—70), aber hierin sagt LEIBNIZ nur, daß der Kreisumfang durch eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen ausgedrückt werden kann, und etwa dasselbe wiederholte er in seinem Briefe an OLDENBURG vom 16. Oktober 1674. In dem Antwortschreiben vom 8. Dezember 1674 deutete dieser an, die Engländer hätten schon ähnliches gefunden; dann folgte LEIBNIZens Brief vom 30. März 1675, aus dem ich schon früher die wichtigste Stelle wörtlich zum Abdruck gebracht habe (siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 70), und woraus hervorgeht, daß LEIBNIZ versprach, seine Reihe zu übersenden, wenn OLDENBURG ihm Auskunft über das Verfahren von COLLINS, um gewisse endliche Zahlenreihen zu summieren, geben wollte. Die Bedingung erfüllte OLDENBURG soweit möglich durch sein Schreiben vom 12. April 1675 (siehe C. I GERHARDT, *Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern* **1**, Berlin 1899, S. 120—121), aber dieses Schreiben enthielt zugleich die Reihe

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} + \cdots,$$

und da diese Reihe für $t = 1$, $r = 1$ in die LEIBNIZsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$ übergeht, war es natürlich unnütz, daß LEIBNIZ sein Versprechen erfüllte. Allein statt ganz einfach hierauf hinzuweisen, antwortete LEIBNIZ am 20. Mai 1675 auf folgende Weise:

> Cum nunc praeter ordinarias curas mechanicis imprimis negotiis distrahar, non potui examinare series quas misistis, ac cum meis com-

parare. Ubi fecero, perscribam tibi sententiam meam. Nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis singulari.

Muß man nicht sofort anerkennen, daß diese Antwort Leibnizens für die Herausgeber des *Commercium epistolicum* ein wirklicher Grund war, um zu bezweifeln, daß Leibniz vor dem Empfang der Oldenburgschen Mitteilung vom 12. April 1675 die Reihe für $\frac{\pi}{4}$ kannte?

Leibniz weist auf seine anderen Arbeiten hin, aber das Konstatieren der Tatsache, daß die zwei Reihen

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} \text{ etc.}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \text{ etc.}$$

für $t = 1$, $r = 1$ identisch werden, erfordert ja kaum eine Minute, und Leibniz hatte Zeit dazu, einen ziemlich langen Brief (der sicherlich wenigstens eine Stunde erfordert hatte) an Oldenburg zu schreiben! Übrigens hatte ja Leibniz versprochen, seine Reihe zu übersenden, und auch wenn er nicht ganz mit der Erfüllung der Bedingung befriedigt sein konnte, war dies kein hinreichender Grund, das Versprechen ohne weiteres als gar nicht existierend zn betrachten.

Aber die Herausgeber des *Commercium epistolicum* hatten noch einen anderen Grund, die Behauptung Leibnizens in betreff der Reihe für $\frac{\pi}{4}$ in Verdacht zu haben. Als Leibniz am 16. Oktober 1674 an Oldenburg über die Entdeckung seiner Reihe für $\frac{\pi}{4}$ schrieb, fügte er hinzu: „eadem methodo etiam arcus cujuslibet, cujus sinus datur geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor potest"; nach seiner eigenen Aussage war er also schon 1674 im Besitze einer Reihe für arc sin x. Allein als ihm Georg Mohr im Jahre 1676 die zwei Reihen

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \text{ etc.}$$

$$\sin z = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \text{ etc.}$$

mitteilte, nannte er in seinem Briefe an Oldenburg vom 12. Mai 1676 diese Reihen „valde ingeniosae", äußerte den Wunsch, die Herleitung der zweiten Reihe zu bekommen, und versprach, als Ersatz seine „ab his longe diversa circa hanc rem meditata" an Oldenburg zu senden. Muß man nicht hieraus folgern, daß Leibniz im Jahre 1674 nicht die obige Reihe für arc sin x gefunden hat? Und wenn diese Folgerung richtig ist, welches war die allgemeine Reihe für arc sin x, die Leibniz nach seiner eigenen Aussage besaß? Meines Wissens hat Leibniz erst in einem Zusatze zu seinem *Compendium quadraturae arithmeticae* (*Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, **5**, Halle 1858, S. 112) eine Reihe für arc sin x gegeben, und teils ist diese Reihe genau die ihm durch Mohr übersandte, teils rührt das *Compendium* nach Gerhardt (a. a. O. S. 86) vermutlich erst aus dem Jahre 1678 oder 1679 her.

Nun kann man fragen: wie wollten die Herausgeber des *Commercium epistolicum* erklären, daß Leibniz 1674 wissen konnte, $\frac{\pi}{4}$ sei durch eine un-

endliche Reihe von rationalen Zahlen darstellbar? Die Antwort auf diese Frage ist leicht. Es war bekannt, daß Leibniz bei seinem ersten Besuche in London 1673 mit Pell und Oldenburg über mathematische und mechanische Gegenstände gesprochen hatte. Es war auch bekannt, daß Gregory schon 1671 seine Arkustangensreihe an Collins, der ja in London wohnte und sowohl mit Pell als mit Oldenburg verkehrte, gesandt hatte. Es war also gar nicht unwahrscheinlich, daß Pell oder Oldenburg etwas von der Entdeckung Gregorys kannte und im Vorübergehen Leibniz mitgeteilt hatte, es handle sich um eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen.

Ich wage es also zu behaupten, daß die Angaben der Herausgeber des *Commercium epistolicum* in betreff der Entdeckung der Reihe für $\frac{\pi}{4}$ nicht als eine „Verdächtigung" bezeichnet werden können, sondern daß Leibniz selbst durch sein eigentümliches Benehmen die Beschuldigung des Diebstahls veranlaßt hat. Meines Wissens gibt es nur einen wirklichen Beleg dafür, daß Leibniz seine Reihe vor dem Empfang des Oldenburgschen Briefes vom 12. April 1675 entdeckt hatte, nämlich den Brief von Huygens vom 7. November 1674 (*Oeuvres de Huygens* **7**, La Haye 1897, S. 393—395), und dieser Brief war ja den Herausgebern des *Commercium epistolicum* unbekannt. Wäre dieser Brief nicht vorhanden, so würde die Frage meiner Ansicht nach bis auf weiteres unentschieden bleiben müssen. G. Enestrom.

---

3 : 312. Herr Cantor erwähnt nach Edleston den Umstand, daß eine Stelle der Zwischenerzählung des *Commercium epistolicum* wörtlich mit dem Beginn des Newtonschen Aufsatzes: „Ex epistola cujusdam ad amicum" übereinstimmt und folgert hieraus, „daß Newton Mitarbeiter am *Commercium epistolicum* war". Aber diese Schlußfolgerung ist meines Erachtens durchaus unbegründet. Die fragliche Stelle lautet (siehe die Ausgabe von Biot und Lefort, Paris 1856, S. 157):

> Anno . . . . 1683 ad finem vergente, D. Newtonus Propositiones principales earum quae in Philosophiae principiis mathematicis habentur Londinum misit, eaedemque cum societate regia mox communicatae sunt; annoque 1686 liber ille ad societatem missus est ut imprimeretur, proximoque anno lucem vidit.

Allein diese Stelle beweist ja nur, daß der Verfasser der Zwischenerzählung den Aufsatz Newtons oder eine Abschrift desselben zur Verfügung hatte. Wäre die Cantorsche Schlußweise richtig, so würde man zu höchst merkwürdigen Ergebnissen in betreff der Mitarbeit an wissenschaftlichen Werken gelangen können. Der lange Absatz: „Wer war . . . . ungelöstes Rätsel bleiben" sollte darum meiner Ansicht nach durch einfache Erwähnung des von Edleston bemerkten Umstandes ersetzt werden. G. Enestrom.

---

3 : 314. Daß man vor 1745 „nur vermutete", Johann Bernoulli sei der Verfasser des in das Flugblatt von 1713 aufgenommenen Briefes, ist wohl zu wenig gesagt. Was Herr Cantor selbst S. 315 mitteilt, dürfte genügen, um zu beweisen, daß der Verfasser des Briefes lange Zeit vor 1745 als allgemein bekannt betrachtet werden konnte, und weitere Belege hierfür sind

leicht zu bieten. Beispielsweise sagt Wolff in der dritten Auflage des Anhanges („Kurtzer Unterricht von den vornehmsten mathematischen Schrifften", S. 60) der *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* (Halle 1725) in betreff des Flugblattes von 1713:

> so gefiel ihm [Leibniz] besser, daß unter dessen nur ohne Nahmen des Ortes und des Autoris bekandt gemacht ward, daß er in Wien wäre und das *Commercium epistolicum* noch nicht gesehen hätte, und dabey des Herrn Bernoulli Gründe aus einem an ihn abgelassenen Schreiben angeführet worden, warum man ihm die Erfindung nicht streitig machen könte.

Vielleicht steht dieser Passus schon in der zweiten Auflage (1717) der *Anfangsgründe*.

G. Enestrom.

---

3 : 316. Es gibt in den *Vorlesungen* eine sehr große Zahl von auffälligen Angaben, aber es dürfte wenige Angaben geben, die den sachkundigen Leser so verblüffen, wie die Behauptung (Z. 21): „Das ist allerdings nicht geschehen" mit dem Zusatz (Z. 21—23): „Newton hielt vielmehr (!) . . . die Richtigkeit der Darstellung (!) in den Principien aufrecht." Es handelt sich um den bekannten, schon 1710 von Johann Bernoulli (siehe seinen Brief an Leibniz vom 12. August 1710; *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt **3** : 2, Halle 1856, S. 854) entdeckten Fehler des 10. Satzes des 2. Buches der Originalausgabe (1687) der *Philosophiae naturalis principia mathematica*, und Herr Cantor erwähnt erst den Vorwurf mangelnden Verständnisses der höheren Differentiation, den Nikolaus I. Bernoulli auf Grund der Lösung des Problems gegen Newton richtete; dann fährt Herr Cantor auf folgende Weise fort:

> Später wiederholte Johann Bernoulli in einem Aufsatze in den A. E. von 1713 den Vorwurf mit der Bemerkung, Nicolaus Bernoulli, der erst jüngst in England gewesen sei, habe Newton auf den Fehler aufmerksam gemacht, und Newton beabsichtige, wie er höre, in der grade im Druck befindlichen zweiten Auflage der *Principien* die Stelle mittelst eines Cartons zu ändern. Das ist allerdings nicht geschehen. Newton hielt vielmehr in Briefen an Keill, insbesondere in einem solchen vom 20. April 1714, die Richtigkeit der Darstellung in den *Principien* aufrecht, bei der es sich gar nicht um Fluxionen, sondern nur um Entwicklung in eine convergente Reihe handle.

In der Fußnote 2 verweist Herr Cantor auf I, 556 der *Opera* von Johann Bernoulli und dort befindet sich die Bemerkung:

> quam [d. h. die Änderung des 10. Satzes des 2. Buches der *Principia*] vir incomparabilis [Newton] . . . ante absolutam impressionem novae editionis, opportune monitus, singulari scheda libro suo inserere non fuit (!) dedignatus.

Johann Bernoulli behauptet also nicht nur, daß Newton eine Änderung in Aussicht nahm, sondern auch, daß die Änderung wirklich ausgeführt worden war, d. h. gerade das Gegenteil der Cantorschen Angabe. Daß eine Änderung nötig war, geht aus dem zitierten Bande der *Opera* von Johann Bernoulli hervor, denn dort befindet sich S. 481 — 501 ein „Excerptum ex celeberrimi

Newtoni *Philosophiae naturalis principiis mathematicis*", worin eben der 10. Satz des 2. Buches teils „ex editione prima", teils „ex editione ultima" zum Abdruck gebracht wird, und woraus man sofort ersieht, daß wesentliche Änderungen vorgenommen worden sind. Anderseits ergibt sich aus den beigefügten Seitenzahlen „252, 253 usw.", daß der Auszug nicht aus der zweiten[1]), sondern aus der dritten Auflage herrührt, so daß man aus dem „Excerptum" keine sichere Folgerung ziehen kann. Dagegen ist die Änderungsfrage in dem Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli und Leibniz oft berührt worden und ich zitiere hier unten einige Aussprüche Johann Bernoullis in betreff des fraglichen Satzes der *Principia* (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt **3** : 2, Halle 1856, S. 921, 925, 937).

[Brief vom 9. September 1713.] „erroris correcturam postea, singulari scheda, suo libro nondum edito inseruit (!) Newtonus."

[Brief vom 6. Dezember 1713.] „quem notavi errorem Newtoni circa determinationem medii, cujus resistentia data curva describatur, correxit (!) in nova editione, antequam publicaretur, per interpolationem alicujus schedae . . . . priorem [d. h. die soeben erwähnte] correctionem ita inseruit (!)."

[Brief vom 6. Februar 1715.] „Non addit [Keilius] quod hic error, quantumque facilis, mansisset (!) incorrectus in nova editione Principiorum phil. si Newtonus de eo non fuisset opportune monitus."

Überall behauptet also Johann Bernoulli bestimmt, daß die Änderung wirklich ausgeführt wurde.

Ziehen wir ferner den Briefwechsel zwischen Newton und Cotes zu Rate, so finden wir dort folgende Stellen (Edleston, *Correspondence of Isaac Newton and Cotes*, London 1850, S. 142, 145, 146).

[Newton an Cotes 14. Oktober 1712.] „There is an error in the tenth proposition of the second book, prob. III, which will require the reprinting of about a sheet & an half. I was told of it since I wrote to you, & am correcting it. I will pay the charge of reprinting it, & send it to you as soon as I can make it ready."

[Newton an Cotes 6. Januar 1713.] „I send you enclosed the tenth proposition of the second book corrected. It will require the reprinting of a sheet & a quarter from pag. 230 to pag. 240."

[Cotes an Newton 13. Januar 1713]. „I have considered your alteration of prop. X, lib. II and am well satisfied with it."

Ich habe bisher ausschließlich auf die Arbeiten Bezug genommen, die Herr Cantor selbst wiederholt benutzt hat, und aus den Zitaten geht mit einer an Wahrheit streifenden Wahrscheinlichkeit hervor, daß Newton wirklich den Fehler berichtigt hat. Dagegen habe ich nirgend einen Beleg für die Cantorsche Behauptung „Das ist allerdings nicht geschehen" auffinden können.

Zu mehrerer Sicherheit kann man natürlich die zwei ersten Auflagen der *Principia* vergleichen, aber eigentlich genügt es, die zweite Auflage einzusehen, denn daraus findet man: 1. daß die zwei Seiten 231 und 232 auf einem Karton gedruckt sind (in meinem Exemplar entdeckt man sofort, daß

1) Bekanntlich tragen die zwei Amsterdamer Abdrucke der zweiten Auflage auf dem Titelblatte die Worte: „editio ultima", so daß der Ausdruck: „ex editione ultima" zweideutig ist.

dieses Blatt nicht mit dem Blatt Gg (S. 225—226) zusammenhängt, sondern statt eines ausgeschnittenen Blattes eingeklebt worden ist); 2. daß der Text S. 231—240 der zweiten Auflage mit dem Text „ex editione ultima“ des oben zitierten „Excerptum“ übereinstimmt.

Aber dies ist noch nicht alles, denn der Zusatz: „Newton hielt vielmehr die Darstellung der Richtigkeit in den *Principien* aufrecht“ ist für den sachkundigen Leser kaum weniger überraschend als die Angabe: „Das ist allerdings nicht geschehen.“ Bekanntlich enthielt der Vorwurf Johann Bernoullis zwei Behauptungen, nämlich teils daß die Lösung des 10. Satzes des 2. Buches der *Principia* fehlerhaft war (das hatte Johann Bernoulli schon 1710 gefunden), teils daß der Fehler auf mangelndem Verständnisse der höheren Differentiation beruhte (das glaubte Nikolaus Bernoulli 1711 oder 1712 entdeckt zu haben). Die Richtigkeit der ersten Behauptung erkannte Newton an, aber die Richtigkeit der zweiten Behauptung verneinte er, und Lagrange hat 1797 in seiner *Théorie des fonctions analytiques* (S. 244—251) nachgewiesen, daß Newton Recht hatte. Für diesen Zweck drückte Lagrange erst die Newtonsche Herleitung analytisch aus und erhielt dadurch die Formel $\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}$. Nach Einsetzung der richtigen Werte für δ, α und γ bekam er

$$\frac{\varrho}{\gamma} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2},$$

während die richtige Formel

$$\frac{\varrho}{\gamma} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}$$

ist. Die Formel $\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}$ ist folglich unrichtig, und als Grund der Unrichtigkeit gab Lagrange an, daß bei der Newtonschen Herleitung gewisse unendlich kleine Größen dritter Ordnung vernachlässigt werden, obgleich das Resultat dadurch beeinflußt wird. Die Erklärung des Fehlers präzisierte Edleston (a. a. O. S. 171) dahin, daß Newton unrichtig die zwei Strecken FG und fg, deren Differenz eine unendlich kleine Größe dritter Ordnung ist, als gleich groß betrachtete. Überdies wies Lagrange darauf hin, daß die Schlußformel allerdings richtig wird, wenn man y'' und y''' statt $\frac{y''}{1\cdot 2}$ und $\frac{y'''}{1\cdot 2\cdot 3}$ substituiert, daß aber dieser Umstand nicht, wie Nikolaus und Johann Bernoulli glaubten, etwas mit der Newtonschen Herleitung zu tun hat, sondern auf einem Zufall beruht.

Es dürfte jetzt klar sein, warum die Cantorsche Angabe: „Newton hielt vielmehr die Richtigkeit der Darstellung in den *Principien* aufrecht“ den sachkundigen Leser ganz besonders überraschen muß. Das Wahre dieser Angabe besteht darin, daß Newton nicht, wie Johann Bernoulli behauptete, in den *Principia* $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ mit $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}$ verwechselt hatte, und auf Grund dieser Tatsache konnte Newton den Vorwurf mangelnden Verständnisses der höheren Differentiation zurückweisen. Über die „Darstellung in den *Principien*“ äußerte sich Newton nicht, und in Wirklichkeit hatte er ja schon 1713 den Fehler der ersten Auflage durch Neudruck von 10 Seiten entfernt.

Ich habe oben die Angabe des Herrn Cantor als verblüffend bezeichnet. Nun gibt es ja verblüffende Angaben, die eigentlich recht harmlos sind, z. B.

wenn man behauptete, Newton habe ursprünglich die *Principia* spanisch geschrieben und erst später eine lateinische Übersetzung angefertigt. Aber die Angabe, um die es sich hier handelt, ist von einer ganz anderen Natur. Allerdings deutet Herr Cantor nachträglich (Z. 25—26) an, daß Newton in den *Principia* keinen wirklichen Fehler begangen hätte, aber auch in diesem Falle bekommt man keinen hohen Gedanken von den mathematischen Kenntnissen Newtons, der ja nach der Cantorschen Darstellung erst beabsichtigte, die gedruckte Stelle mittelst eines Kartons zu ändern. Dies deutet wohl darauf hin, daß Newton anfangs eine unrichtige Vorstellung von der Bedeutung des Vorwurfes gehabt haben würde. Noch schlimmer wird natürlich die Sache, wenn der Leser weiß, daß in der ersten Auflage der *Principia* wirklich ein Fehler vorkam. In diesem Falle müssen durch die Cantorsche Darstellung entweder die mathematischen Kenntnisse oder die wissenschaftliche Aufrichtigkeit Newtons in einem sehr ungünstigen Lichte erscheinen. In Wahrheit ist Newton durchaus korrekt verfahren. Sobald er auf den Fehler aufmerksam gemacht wurde, erkannte er die Richtigkeit der Bemerkung an, redigierte einen verbesserten Text und ließ denselben durch Cotes zum Abdruck bringen, wobei fünf früher gedruckte Blätter (S. 231—240) makuliert wurden.

G. Enestrom.

---

3 : 316. Die Worte (Z. 25—27): „Von dem Fehler in der *Quadratura curvarum*, der wirklich ein Fehler ist (S. 285), schwieg Newton wohlweislich", sollten gestrichen werden, da kein wirklicher Fehler vorkommt (vgl. oben die Bemerkung zu **3** : 285). G. Enestrom.

---

3 : 318. Es wäre meines Erachtens eine wirkliche Verbesserung, den Passus (Z. 1—5): „Wie wenig ernst das gemeint war, oder wie wetterwendisch die Stimmung wechselte, zeigt das früher (S. 309) Erzählte, daß man am 17. Juni, genau vier Wochen nach der Sitzung vom 20. Mai, Exemplare des *Commercium epistolicum* zugunsten der Gesellschaftskasse dem Buchhandel überließ" ohne weiteres zu streichen. Denn die „Royal society" hatte ja durch den Titel hervorgehoben, daß sie das *Commercium epistolicum* wegen der Aktenstücke hatte drucken lassen, und wenn Exemplare dem Buchhandel überlassen wurden, bedeutete dies nur, daß die „Royal society" am 17. Juni keinen Anlaß hatte, die Verbreitung der Aktenstücke zu verhindern. Aber dieser Umstand hat ja nur insofern etwas mit dem Urteil des Prüfungsausschusses zu tun, als er zeigt, daß die Gesellschaft nicht am 17. Juni 1714 das Urteil durchaus mißbilligte, obgleich sie davon Abstand nahm, es als einen förmlichen Gesellschaftsbeschluß anzuerkennen. G. Enestrom.

---

3 : 319. In betreff der Angabe, daß der zweite Newtonsche Brief gegen das Ende des Jahres 1676 Leibniz in London vorgelegen hat, behauptet Herr Cantor, daß sie „wie grundlos auch ohne jede mögliche Stütze" ist. Allein das Aktenstück von Newton, über das Herr Cantor weiter unten S. 322—323 berichtet, enthält den folgenden Passus (siehe *Den Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, herausgeg. von C. I. Gerhardt **1**, Berlin 1899,

S. 272): „he [Leibniz] instances in a paragraph concerning my ignorance . . . that he saw this paragraph in the hands of Mr. Collins when he was in London the second time, that is, in october 1676. It is in my letter of the 24th of octob 1676, and therefore he then saw that letter". Der Ausspruch Leibnizens, auf den Newton hier hinweist, ist der folgende (a. a. O. S. 264): „à mon second voyage [d'Angleterre] M. Collins me fit voir une partie de son commerce, et j'y remarquay que M. Newton avoua aussi son ignorance sur plusieurs choses, et dit entre autres qu'il n'avoit rien trouvé sur la dimension des curvilignes celebres que la dimension de la cissoide". Wenn man nun weiter bemerkt, daß der Brief Newtons vom 24. Oktober 1676 folgende Stelle enthält (a. a. O. S. 211): „in simplicioribus vulgoque celebratis figuris vix aliquid relatu dignum reperi, quod evasit aliorum conatus, nisi forte longitudo cissoidis ejusmodi censeatur", und daß ein ähnlicher Ausspruch, soweit bekannt ist, in keinem älteren Briefe von Newton vorkommt, so folgt hieraus, daß Leibniz nach seiner eigenen Aussage bei seinem zweiten Aufenthalt in London wenigstens einige Zeilen des Briefes vom 24. Oktober 1676 gesehen haben muß. Und dennoch nennt Herr Cantor die oben zitierte Angabe „wie grundlos auch ohne jede mögliche Stütze"!!

Nun kann man ja bemerken, daß die Aussage von Leibniz aus dem Jahre 1715 herrührt und darum einen Gedächtnisfehler enthalten kann. Die Bemerkung ist natürlich an sich nicht unrichtig, aber hat man in diesem Falle irgendeinen bestimmten Grund einen Gedächtnisfehler anzunehmen? Meines Wissens gibt es keinen solchen Grund. Herr Cantor fragt freilich (Z. 15—17): „Hätte Oldenburg ihm [Leibniz], wenn er bei Eintreffen des Newtonschen Briefes noch in London gewesen wäre, denselben nicht ausgehändigt?". Die Frage kann sehr leicht beantwortet werden. Erstens hatte Newton am 26. Oktober 1676 einen Brief an Oldenburg geschrieben, worin er diesen ersuchte, einige Änderungen einzuführen (siehe Edleston, *Correspondence of Isaac Newton and Cotes*, London 1850, S. 257—258), und dieser Umstand allein konnte ein Grund sein, warum Collins nicht sofort den Newtonschen Brief vom 24. Oktober 1676 aushändigen wollte. Aber es gibt einen noch wichtigeren Grund, nämlich daß Collins nicht das Original des hochwichtigen Briefes sich und Oldenburg entziehen wollte, und bekanntlich hat dieser selbst notiert, daß der Brief erst am 4. November 1676, also nach der Abreise Leibnizens abgeschrieben wurde.

Es ist sehr eigentümlich, daß auch nicht G. A. Gibson, der 1896 eine in vielen Punkten verdienstvolle Übersicht des Prioritätsstreites brachte (siehe Proceedings of the Edinburgh mathematical society **14**, 1896, S. 148—174), den Grund, warum Leibniz den Newtonschen Brief sehr wohl bei Collins einsehen, aber nicht sofort bekommen konnte, ausfindig gemacht hat. Gibson sagt (a. a. O. S. 160): „That he [Leibniz] should have seen at Collins's a letter addressed to himself, under cover to Oldenburg, and not have taken possession of it seems quite incredible (!)" und weiter unten wiederholt er dieselbe Bemerkung S. 168 („However improbable it is that Leibniz then saw the letter") und S. 173 („that Leibniz saw Newton's second letter on his second visit to London . . can have been at best only a guess"). Aber was Gibson als „lediglich eine Mutmaßung" bezeichnet, ist nur eine direkte Schlußfolgerung aus einer Behauptung Leibnizens in seinem Briefe an Conti vom 6. Dezember 1715!

Der ganze Absatz „Letztere Meinung . . . nicht ausgehändigt“ sollte darum meines Erachtens gestrichen werden. G. Enestrom.

3 : 319. Der ganze Absatz (Z. 26—32): „Auch auf den Fehler . . . bedienen“ sollte gestrichen werden (vgl. oben die Bemerkung zu **3** : 285). Jedenfalls sollte angegeben worden sein, daß Newton selbst auf die von ihm erwähnte Änderung (Einschalten des Wortes „et“ zwischen „erit“ und „ejus“) keinen Wert legte. Ohne Zweifel hatte Newton recht, denn allerdings würden durch die Änderung die Wörter „incrementum“ und „differentia“ die Bedeutung Differential in unseren Sinne bekommen, aber teils ist nicht einzusehen, warum die Wörter nicht in diesem Falle als gleichbedeutend mit „Korrektion“ benutzt werden könnten, teils wird durch die Änderung die Unklarheit, die auf der Benutzung des Wortes „proportionalis“ beruht, nicht entfernt, sondern vielmehr vergrößert. Von Interesse ist der fragliche Passus der „Recensio libri“ eigentlich nur, weil darin angegeben wird, daß Newton das „Scholium“ erst nachträglich 1704 der *Quadratura curavrum* hinzufügte. G. Enestrom.

3 : 319—320. Hier befindet sich folgender Passus: „Nur ein einziger hat es gewagt, im Jahre 1722 den ein Jahr vorher verstorbenen Keill als den Verfasser des „Account“ zu nennen, und dieser einzige war Newton selbst.“ In einer Fußnote wird auf „Commerc. epist. pag. X“ verwiesen, und wenn man diesen Verweis benutzt, findet man folgende Bemerkung von F. Lefort: „dans l'*annotatio* qui termine la publication du *Commercium Epistolicum*, il [Newton] attribue indirectement à Keill le *Recensio*; “Et Keillius hoc notaverat anno 1711 (pag. 37, 238).” Cette page 37 (33 de notre édition) se rapporte au *Recensio*“ Die *Annotatio* selbst ist in der Ausgabe 1856 des *Commercium epistolicum* abgedruckt, und die von Lefort erwähnte Stelle lautet nach dem Abdruck (S. 186):

> Methodus fluxionum utique non consistit in forma symbolorum. Et Keilius hoc notaverat anno 1711 (pag. 31, 180).

Hier beziehen sich offenbar die Verweise pag. 31, 180 auf die Ausgabe 1856, und S. 180 befinden sich wirklich einige Zeilen über die Newtonsche Bezeichnungsweise, welche Stelle einem Schreiben Keills vom 24. Mai 1711 gehört. Dagegen wird S. 31 der Ausgabe 1856 ein anderes Schreiben Keills (aus dem Jahre 1708) erwähnt, und da Lefort S. X angibt, daß der Verweis der *Annotatio* sich auf S. 33 der Auflage 1856 bezieht, nehme ich an, daß diese Angabe richtig ist; ich habe nämlich nicht zur Hand die Ausgabe 1722 des *Commercium epistolicum* Aber S. 33 der Auflage 1856 wird Keill an der Stelle, die von den Newtonschen Zeichen handelt, gar nicht genannt, also noch weniger sein Schreiben vom Jahre 1711, und es fragt sich nun, welche Folgerung man aus dem zitierten Ausspruch Newtons ziehen kann. Meiner Ansicht nach muß diese Folgerung sein: Wenn der Verweis richtig ist, scheint Newton zu behaupten, daß eine Stelle, die in der „Recensio“ vorkommt, schon 1711 von Keill redigiert wurde, obgleich das englische Original („Account“) der „Recensio“ erst 1715 und die „Recensio“ selbst erst 1722 veröffentlicht wurde. Aber Herr Cantor schließt: Also hat Newton behauptet, daß Keill das **ganze** Original der „Recensio“ verfaßt hat!! Es dürfte unnötig sein, diese Schlußweise näher zu charakterisieren.

Ich benutze diese Gelegenheit, um zu betonen, daß es meines Erachtens verkehrt ist, aus einem einzigen Verweise eine bestimmte Folgerung zu ziehen, die sofort hinfällig wird, wenn es sich herausstellt, daß ein einfacher Druckfehler vorliegt Nimmt man in diesem Falle an, daß 237 statt 37 zu lesen ist, so beziehen sich ja die beiden Verweise auf das Schreiben von 1711, und die Stelle hat also gar nichts mit dem „Account" zu tun!

G. Enestrom.

---

3 : 320—321. Der ganze Passus (S. 320 Z. 8 v. u. — S. 321 Z. 14): „und sonst wäre gewiß . . . Unkenntlichkeit zu tilgen" sollte gestrichen werden. In der ersten Auflage der *Vorlesungen* konnte der entsprechende Passus am Platze sein, aber seitdem es sich als wahrscheinlich herausgestellt hat, daß Leibniz seine Antwort auf den zweiten Newtonschen Brief zwar am Empfangstage angefangen, aber nicht besonders weit fertiggestellt hatte, ist der Passus wertlos geworden.

G. Enestrom.

---

3 : 321. Die Angabe (Z. 25—27): „Von London aus muß er [Conti] ihm [Leibniz] abermals geschrieben und dabei, wie es kaum anders möglich war, den Prioritätsstreit berührt haben" ist seit 1899 als veraltet zu betrachten. C. I. Gerhardt hat nämlich (*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern* **1**, Berlin 1899, S. 258—262) nach dem in Hannover aufbewahrten Original einen langen Brief von Conti an Leibniz veröffentlicht, auf den Leibniz am 6. Dezember 1715 erwiderte, und dieser Brief, der weder Datum noch Ort hat, ist offenbar der von Herrn Cantor gemeinte. Am Ende des Briefes sagt Conti: „je parts demain pour l'Angleterre" — der Brief ist also nicht in London, sondern in Paris geschrieben — und der Prioritätsstreit wird im Briefe nicht berührt.

G. Enestrom.

---

3 : 323. Nachdem Herr Cantor S. 322 die Bemerkung von Newton, die Leibnizsche Differentialrechnung sei die gleiche, die Barrow 1670 veröffentlichte, erwähnt hat, fügt er hinzu (Z. 1—8): „Es ist merkwürdig genug und ein Beleg dafür, wie blind die Leidenschaft den Menschen macht, daß Newton das Zweischneidige dieses Vorwurfes nicht erkannte und Leibniz gewissermaßen die Antwort in den Mund legte. Wenn Leibnizens Tangentenmethode die gleiche war wie die Barrows, wenn sie zugleich mit der Newtons übereinstimmte, so war auch kein Unterschied zwischen den Methoden Newtons und Barrows, und ersterer war der anerkannte Schüler des letzteren!" Aber daß Newton in dem Anhang zu der Schrift von J. Raphson: *The history of fluxions* die Schlußfolgerung, die Leibniz aus der Bemerkung von Newton zog ausführlich widerlegt hat, davon sagt Herr Cantor kein Wort, sondern fertigt den Anhang damit ab, „besonders Erwähnenswertes" stehe nicht darin! Ich erlaube mir darum, hier unten einen kurzen Auszug aus der Antwort von Newton zum Abdruck zu bringen (siehe C. I. Gerhardt, *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, **1**, Berlin 1899, S. 293):

> Dr. Barrow printed his differential method of tangents in the year 1670. . . . In my letter of the 10th of Decemb. 1672, I sent the like method to Mr. Collins and added, that I mentioned it to Dr. Barrow when he was printing his lectures; and that . . . it was but a branch

or corollary of a general method, which without any troublesome calculation extended not only to tangents, buth also to other abstruser sorts of problems concerning the crookedness, area's, lengths, centers of gravity of curves etc. and did all this, even without freeing equations from surds. . . . Dr. BARROW . . . saw my tract of Analysis in the year 1669, and was pleased with it. And before his lectures came abroad, I had deduced the method of tangents of GREGORY and SLUSIUS from my general method.

In Wirklichkeit ist also die von LEIBNIZ beanstandete Bemerkung NEWTONS gar nicht „zweischneidig", denn dieser geht davon aus, daß die Tangentenmethode BARROWS eine sehr einfache Folgerung seiner allgemeinen Methode war; überdies betrachtete NEWTON als allgemein bekannt, daß er seine Methode vor 1670, unabhängig von BARROW, entdeckt hatte.

Der von mir oben zitierte Passus der *Vorlesungen* sollte also auf ganz andere Weise redigiert werden. G. ENESTRÖM.

3: 326. Z. 14—18 sagt Herr CANTOR: „eine Veränderung des *Commercium epistolicum* selbst, Zusätze innerhalb des 1712 Gedruckten, ohne daß sie als solche gekennzeichnet wurden, das waren ebensoviele Fälschungen, welche auf den, der sie beging, einen nicht zu tilgenden Makel werfen" und am Ende der Seite spricht er von „Fälschungen gleichkommenden Änderungen" des Textes des Buches. Allein meiner Ansicht nach ist es in diesem Falle durchaus sinnlos, das Wort „Fälschungen" zu benutzen. Auf dem Titelblatte der Originalausgabe vom Jahre 1712 stand: „Commercium epistolicum D. JOHANNIS COLLINS et aliorum de analysi promota: jussu societatis regiae in lucem editum" und dadurch war der wesentliche Inhalt der Schrift deutlich angegeben; mit dem übrigen Inhalt hatte die „Royal Society" nichts anderes zu tun gehabt, als daß sie die ganzen Druckkosten bezahlte. Im Jahre 1722 erschien eine neue Auflage mit dem Titel „Commercium epistolicum D. JOHANNIS COLLINS et aliorum, de analysi promota, jussu societatis regiae in lucem editum . . . iterum impressum" und was 1712 auf den Befehl der „Royal Society" gedruckt wurde, ist hier wieder abgedruckt worden. Nun kommen aber in der Originalausgabe außer dem offiziellen Inhalt zahlreiche Fußnoten vor, und in betreff dieser Fußnoten wurden bei der Drucklegung der neuen Auflage gewisse Änderungen oder Zusätze vorgenommen. Für einen Historiker wäre es natürlich schön gewesen, wenn die Herausgeber dieser Auflage alle Änderungen oder Zusätze besonders angegeben hätten, aber in diesem Falle das Wort „Fälschungen" zu benutzen, finde ich, wie gesagt, durchaus sinnlos. Als auffallendstes Beispiel der angeblichen „Fälschungen" hebt Herr CANTOR S. 327 die Fußnote in betreff der „Historiola" (siehe BM 11_3, 1910/11, S. 83) hervor. Aber wenn die Angabe dieser Fußnote richtig gewesen wäre, so würde ja der Umstand, daß sie nicht in der ersten Auflage steht, belanglos sein. In Wirklichkeit enthielt die Fußnote eine kleine Ungenauigkeit, und aus diesem Grunde müßte man sie bemängeln, auch wenn sie ganz einfach aus der ersten Auflage abgedruckt gewesen wäre. G. ENESTRÖM.

3: 394. Nachdem Herr CANTOR angegeben hat, daß NEWTON in Cambridge Vorlesungen über allgemeine Arithmetik hielt, fügt er hinzu (Z. 21—22):

„William Whiston scheint dieselben im Jahre 1685 noch selbst gehört zu haben." Aber wenn man die von Herrn Cantor zitierte Quelle (W. W. R. Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge 1889, S. 83) zu Rate zieht, findet man dort die Notiz: „Whiston . . . entered in 1685 at Clare, and mentions in his biography that he attended Newton's lectures". Ball sagt also weder, daß Whiston im Jahre 1685 die Vorlesungen Newtons hörte, noch daß die Vorlesungen Newtons, die Whiston hörte, die allgemeine Arithmetik behandelten. Bekanntlich (vgl. z. B. W. W. R. Ball, *Account of the history of mathematics*, 4th ed., London 1908, S. 330) begannen diese Vorlesungen 1673 und endeten schon 1683, also bevor Whiston Student wurde. Ich gebe hier nach Edleston (*Correspondence of Isaac Newton and Cotes*, London 1850, S. XCII—XCV) die Vorlesungen der verschiedenen Jahre an; die Seitenzahlen in den Klammern beziehen sich auf die Originalausgabe (1707) der *Arithmetica universalis*.

1673 (S. 1—21). **1674** (S. 21—38). **1675** (S. 39—65). **1676** (S. 65—81). **1677** (S. 81—100). **1678** (S. 100—111). **1679** (S. 111—120). **1680** (S. 120—134). **1681** (S. 134—172). **1682** (S. 172—215). **1683** (S 216—251).

G. Enestrom.

---

3 : 395. Die Worte (Z. 21—24): „oder ob er sein Wissen der nicht ganz reinen, wenn auch überaus reichen Quelle von Wallis' englischer Algebra von 1685 entnahm, die er zur Zeit, als Whiston die Vorlesung hörte, gerade studieren mochte", sollten gestrichen werden. Bekanntlich wurde die Vorlesung während der Jahre 1673—1683 gehalten (siehe die Bemerkung zu **3** : 394), und Wallis' englische Algebra hat, wie Herr Cantor richtig angibt, das Druckjahr 1685. Allerdings war das Manuskript der Algebra schon 1676 druckfertig und wurde dann im April 1677 von Wallis nach London gesandt (siehe Rigaud, *Correspondence of scientific men of the seventeenth century* **2**, Oxford 1841, S. 606—607), aber ganz gewiß hat Newton, der ja in Cambridge wohnhaft war, das Manuskript zur Zeit, als er seine Vorlesung über „Arithmetica universalis" hielt, nicht gesehen. Abgesehen von der tatsächlichen Unrichtigkeit sind die Worte: „zur Zeit, als Whiston die Vorlesung hörte" auffällig, denn S. 394 hat Herr Cantor nur bemerkt, daß Whiston die Vorlesung gehört zu haben scheint.

Die Angabe (Z. 15—18), daß das grundsätzliche Verschweigen von Vorgängern bei Newton die Prüfung, was in der *Arithmetica universalis* neu war, ungemein (!) erschwert, ist ebenfalls auffällig. Wer sich vornimmt, in zwei starken Bänden die Geschichte der Mathematik von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1668 zu behandeln und dann in einem dritten Bande die historische Darstellung weiterzuführen, sollte wohl für diesen Zweck so eingehende Studien in betreff der Geschichte der elementaren Algebra und ihrer Anwendungen gemacht haben, daß er in den meisten Fällen sofort entscheiden könnte, was in der *Arithmetica universalis* wirklich neu war. Anderseits weiß jeder Kenner der Geschichte der Mathematik, wie selten die älteren (und wohl auch die neueren?) Mathematiker sich der Mühe unterziehen, ihre Quellen regelmäßig zu zitieren, so daß es in allen Fällen für den nicht Sachkundigen ungemein schwierig ist, zu entscheiden, was in einer mathematischen Arbeit als neu anzusehen sein muß.

G. Enestrom.

---

3 : 400. Die Behauptung (Z. 7—9 v. u.): „Daß NEWTON die Stelle ... nicht schrieb, ohne von FERMATS Arbeiten Kenntnis zu haben, dürfte unabweisbar sein", beruht natürlich in erster Linie auf der unrichtigen Mutmaßung des Herrn CANTOR, daß die Vorlesungen über die „Arithmetica universalis" 1685 gehalten wurden. In Wirklichkeit wurde die Vorlesung, um die es sich hier handelt, 1673 oder 1674 gehalten (siehe EDLESTON, *Correspondence of Isaac Newton and Cotes*, London 1850, S. XCII), während die *Varia opera* von FERMAT erst 1679 erschienen. Allerdings wurde ein kurzer Artikel von FERMAT über Wegschaffen von Irrationalitäten schon 1667 veröffentlicht (siehe *Oeuvres de Fermat*, publ. par P. TANNERY et CH. HENRY **2**, Paris 1894, S. 282—283), aber dieser Artikel enthielt keine Lösung des Problems.

Als Gründe, warum es „unabweisbar" sein dürfte, daß NEWTON von FERMATS Arbeiten Kenntnis hatte, nennt Herr CANTOR teils das Verfahren, teils die Benennung „Asymmetrie". Allein Herr CANTOR hat selbst darauf hingewiesen, daß die Benennung schon bei VIÈTE vorkommt, und überdies war der Term „asymmetria" für Irrationalität noch in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts sehr gewöhnlich (siehe z. B. C. RENALDINI, *Ars analytica mathematum* **1**, Florentiae 1665, S. 255), so daß in diesem Falle die Benennung keine Beweiskraft besitzt. Kaum mehr bedeutet der Umstand, daß NEWTON 1673 oder 1674 dasselbe Verfahren als FERMAT benutzte. Schon bei seinen ersten mathematischen Studien hatte NEWTON den großen Nutzen, den man durch passende Substitutionen erzielen kann, deutlich erkannt, und auch die sogenannte „Transmutationsmethode" LEIBNIZens vom Jahre 1676 beruht auf demselben Verfahren. Nur wenn es bewiesen wird, daß NEWTON schon 1674 von dem 1679 veröffentlichten Artikel FERMATS Kenntnis hatte, oder daß NEWTON nach 1679 sein Vorlesungsheft über „Arithmetica universalis" ergänzt hat, kann die Ansicht des Herrn CANTOR in betreff des Einflusses FERMATS auf NEWTON irgendeinen Grad von Wahrscheinlichkeit bekommen, und einen solchen Beweis zu bringen, hat Herr CANTOR nicht einmal versucht. G. ENESTRÖM.

---

3 : 457. Was Herr CANTOR (Z. 5—10) über die Geschichte des Ausdruckes „transzendente Funktion" sagt, ist nicht ganz genau. Erstens benutzte JOHANN BERNOULLI diesen Ausdruck schon 1724 (*Methodus commoda et naturalis reducendi quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad longitudines curvarum algebraicarum*; Acta erud. 1724, S. 365; *Opera omnia* **2**, S. 591). Zweitens bezog er nicht den Ausdruck nur auf Integrale algebraischer Funktionen; die fraglichen Integrale nannte er nämlich transzendente Funktionen ersten Grades, während die Integrale dieser Funktionen transzendente Funktionen zweiten Grades genannt wurden, usw.

Die Bemerkung (Z. 11—14): „1706 ... erscheint [bei JOHANN BERNOULLI] das Zeichen Δ, welches aber ... einen Differentialquotienten bedeutet". ist nicht unrichtig, aber kaum gut redigiert. Bei JOHANN BERNOULLI bedeutet nämlich Δx nicht den Differentialquotienten von x, sondern den Differentialquotienten einer gewissen Funktion von x. G. ENESTRÖM.

---

3 : 468. Statt der Worte (Z. 26—28): „wenn wir auch nicht wissen durch wessen Vermittelung" sollte: „und zwar durch Vermittelung von CONTI"

gesetzt werden. Als Beleg bringe ich hier unten einen Auszug aus dem Briefe Leibnizens an Conti vom 14. April 1716 (vgl. *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, herausgeg. von C. I. Gerhardt I, Berlin 1899, S. 295).

> En attendant qu'ils trouvent le moyen de parvenir à la solution générale, ils pourront essayer ce qu'ils peuvent en fixant les idées sur un cas particulier, qu'on leur propose dans le papier ci-joint . . . .
>
> Super recta AG tanquam axe ex puncto A constructis curvis quotcunque, qualis est ABD, ejus naturae ut radius osculi ex singulis singularum curvarum punctis B eductus BO secetur ab axe AG in C in data semper constante ratione, ut nempe sit $BO : BC = 1 : n$. Construendae jam sunt trajectoriae qualis est ENF, priores curvas ABD secantes ad angulos rectos. G. Eneström.

---

3 : 473. Wie Johann Bernoulli in dem von Herrn Cantor (Z. 11—12) zitierten Briefe ausdrücklich erwähnt, beschäftigte sich auch Nikolaus I Bernoulli gleichzeitig mit der Differentialgleichung $z^2 d^2x = 2x\,dz^2$. Aus einem Briefe von diesem an Leibniz vom 24. Oktober 1716 (*Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I Gerhardt **3** : 2, Halle 1856, S. 993) geht hervor, daß Nikolaus Bernoulli als Integral die Gleichung $z^3 = axz + abc$ gefunden hatte, so daß es kaum nötig ist, „die heutige Integralrechnung" zu Rate zu ziehen, um zu konstatieren, daß Johann Bernoulli das Integral der fraglichen Differentialrechnung gekannt haben muß. G. Eneström.

---

3 : 691. Z. 4—6 zitiert Herr Cantor aus einem Briefe von Nikolaus I. Bernoulli an Euler vom 29. November 1743 den folgenden Passus: „Die Unterscheidung zwischen einem absoluten Unendlichen und einem bestimmten Unendlichen gebe ich nicht zu." Da dieser Passus schwer verständlich ist, wenn man nicht weiß, was der Brief Eulers vom 14. Mai 1743 enthielt, erlaube ich mir, aus diesem Briefe einige Zeilen hier zum Abdruck zu bringen (siehe L. Euler, *Opera postuma* **1**, Petropoli 1862, S. 538):

> Quod primum de seriebus divergentibus scribis, earum summas dari omnino non posse, quoniam licet in infinitum continuentur, tamen exhauriri nequeant, . . . hoc dubium mihi quidem eximi posse videtur, si ad distinctionem inter numerum infinitum determinatum atque infinitum absolutum attendatur. Quamvis enim statui non possit
>
> $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . + x^\infty,$$
>
> quia hic numerus terminorum etsi infinitus, tamen tamquam definitus spectatur, atque adeo series revera terminari censetur; tamen sine errore mihi quidem statui posse videtur
>
> $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}$$
>
> in infinitum, hoc est seriei nusquam ullo termino constituto. Sic falsum foret
>
> $$0 = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots . \pm (2\infty + 1),$$

at omni finitionis idea etiam cogitatione sublata, sine errore affirmari potest esse $0 = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 -$ in infinitum. In hac autem opinione eo magis confirmor, quod nullus mihi adhuc obtigerit casus, in quo ejusmodi serierum summatio me in errorem deduxisset.

Euler scheint selbst durch die Bemerkungen von Bernoulli eingesehen zu haben, daß der Unterschied zwischen „infinitum determinatum“ und „infinitum absolutum“ schwerlich festgehalten werden kann, denn in seinem Antwortschreiben vom 4. Februar 1744 (*Opera postuma* **1**, S. 538—541) sagt er nichts hierüber, sondern stellt seine bekannte Definition: „summa seriei est valor quantitatis finitae, ex cujus evolutione series resultat“ auf. Auch nicht in der Abhandlung *De seriebus divergentibus* (Novi comm. acad. sc. Petrop. **5**, [1754 55], 1760, S. 205—237) erwähnt Euler ausdrücklich zwei Arten unendlicher Größen, obgleich man aus dem § 5 (S. 207—208) ersieht, daß er seinen ursprünglichen Gedankengang nicht ganz aufgegeben hat.

G. Enestrom.

3 : 718. Wie Herr Cantor richtig angibt, behauptet Euler im 15. Kapitel des 1. Buches der *Introductio in analysin infinitorum*, es sei offenbar („manifestum est“) daß wenn

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\ldots} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$$

die $A, B, C, D, \ldots$ aus den $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ so zusammengesetzt sind, daß A die Summe dieser Zahlen einzeln genommen, B die Summe der Produkte aus zwei Zahlen (ungleiche und gleiche) u. s. w. ist. In betreff des Ausdruckes „manifestum est“ bemerkt Herr Cantor: „Euler dachte sich mutmaßlich die Herleitung mittels auf einander folgender Divisionen durch die einzelnen Nennerfaktoren“ und fügt die Herleitung des Eulerschen Satzes auf diese Weise hinzu. Indessen hat Euler selbst die Herleitung in seiner Abhandlung *Observationes analyticae variae de combinationibus* (Comm. acad. sc. Petrop. **13** [1741/43], 1751, S. 64—93) gebracht, und diese Abhandlung wurde nach den Protokollen der Petersburger Akademie am 6. April 1741 vorgelegt. Euler geht von den Identitäten

$$\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \alpha^4 z^4 + \ldots$$
$$\frac{1}{1-\beta z} = 1 + \beta z + \beta^2 z^2 + \beta^3 z^3 + \beta^4 z^4 + \ldots$$
$$\frac{1}{1-\gamma z} = 1 + \gamma z + \gamma^2 z^2 + \gamma^3 z^3 + \gamma^4 z^4 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

aus; wenn man nun das Produkt sowohl der linken wie der rechten Glieder bildet und dann in betreff des zweiten Produktes die Multiplikationen ausführt, findet man sofort, daß der Eulersche Satz richtig ist. G. Enestrom.

3 : 731—732. Die Angabe (S. 731 Z. 1 v. u. und S. 732 Z. 1—2): „Die an dieser Stelle zuerst auftretende Reihenentwicklung von $\frac{\varphi}{2}$ wurde in späterer Zeit vielfach bestätigt“ kann kaum als richtig betrachtet werden. Es handelt sich um die Abhandlung *Subsidium calculi sinuum*, die 1760 in den

Novi comm. acad. sc. Petrop. **5** (ad annum 1754 et 1755) erschien. Aber schon im 4. Kapitel des zweiten Teiles der *Institutiones calculi differentialis*, die im Manuskript schon vier Jahre vor der zitierten Abhandlung fertig waren und im Druck fünf Jahre vor derselben erschienen, hatte Euler auf eine andere, freilich wenig befriedigende Weise die Reihe

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{1}\sin u + \frac{1}{2}\sin 2u + \frac{1}{3}\sin 3u + \frac{1}{4}\sin 4u + \text{&c.}$$

hergeleitet, und wenn man $u = \pi - \varphi$ setzt, bekommt man hieraus sofort

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \ldots$$

Übrigens bemerke ich, daß die Reihe der *Institutiones calculi differentialis* schon in einem Brief von Euler an Goldbach vom 4. Juli 1744 steht (siehe *Correspondance mathématique* publ. par P. H. Fuss **1**, St. Pétersbourg 1843, S. 279).

G. Eneström.

---

3 : 787. Der kurze Bericht über die Abhandlung *De superficiebus ad aequationes locales revocatis, variisque earum affectionibus* (Comm. acad. sc. Petrop. **6** [1732/3], 1738, S. 36—67) von J. Hermann endet auf folgende Weise: „Er [Hermann] gibt auch die Gleichung verschiedener krummer Oberflächen, von Kurven doppelter Krümmung aber nur die kürzesten auf einer gegebenen Oberfläche zwischen zwei gegebenen Punkten zu ziehende Linien." Hier möchte ich statt „verschiedener krummer Flächen" eine genauere Angabe bringen, z. B. etwa: „einiger Flächen zweiten Grades sowie der Fläche 4. Grades, die Wallis Cono-Cuneus genannt hat". Anderseits sollten die folgenden Worte „von Kurven . . . Linien" entweder gestrichen oder auf eine Weise formuliert werden, die belehrend sein kann. Es handelt sich im 114. Kapitel von der Geschichte der analytischen Geometrie und wer die fraglichen Worte liest, kann nicht umhin anzunehmen, daß Hermann die Gleichung einiger geodätischer Linien unter der Form $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ gegeben hat. Dies ist indessen nicht der Fall. Hermann hat nämlich nur versucht, das allgemeine Problem zu lösen, und der betreffende Teil seiner Abhandlung sollte also eigentlich nicht hier, sondern im 117. Kapitel (z. B. S. 853) erwähnt werden.

G. Eneström.

---

3 : 789. Die Form der Angabe (Z. 7—8): „Damit ist die Gerade $WNKR$ gegeben nebst ihrem Durchschnittspunkte Z mit der CB" ist ein wenig auffallend, denn die Gerade $WNKR$ ist ja eben der ursprünglich gegebene Träger RKN. Viel besser wäre wohl, nach dem Wort „schneidet" (Z. 7) den Passus zu streichen und dann zu setzen: „und eine dritte Gerade durch B, C, welche den Träger RKN in Z schneidet". Auch die Bemerkung (Z. 13—15): „das Verhältnis ihrer Seiten zu einander ist mithin bekannt und kann durch $\frac{GR}{GK} = \frac{a}{g}$ und $\frac{DG}{GK} = \frac{a}{k}$ dargestellt werden" ist nicht ganz gut redigiert, denn jedes der zwei Dreiecke hat ja noch eine dritte Seite außer den erwähnten; ich schlage darum folgende Verbesserung vor: „das Verhältnis ... bekannt und darum kann $\frac{GR}{GK} = \frac{a}{g}$ und $\frac{DG}{GK} = \frac{a}{k}$ gesetzt werden, wo g und k unveränderliche Größen sind".

G. Eneström.

3 : 871. Aus den Worten: „Maclaurin hat sich dabei . . . geometrischer Methoden bedient . . . Sei EAE' eine solche gleichseitige Hyperbel" wird der Leser versucht, anzunehmen, daß das Folgende wenigstens im wesentlichen ein Bericht über das Verfahren Maclaurins ist. In Wirklichkeit rührt aber das meiste des Textes der Seite 871 nicht von Maclaurin, sondern von Felix Müller her. Allerdings zitiert Herr Cantor in der Fußnote die Müllerschen *Studien über Mac* [nicht „Max", wie es in den beiden Auflagen der *Vorlesungen* steht!] *Laurin's geometrische Darstellung elliptischer Integrale,* aber aus diesem Zitat kann man natürlich nicht ersehen, daß die von Herrn Cantor angeführten Beweise der geometrischen Sätze nicht auf Maclaurin, sondern auf Müller zurückgehen. Dieser sagt selbst in seinen *Studien* (S. 6): „Wir . . . werden im Folgenden, wo wir den einen oder den andern [Satz] anwenden müssen, denselben analytisch beweisen, falls er nicht in den gebräuchlichsten Lehrbüchern über Kegelschnitte zu finden ist." Nun umfassen die *Studien* 30 Druckseiten, und es kann darum gebilligt werden, daß Müller eine dieser Seiten dazu verwendet, wichtige Hilfssätze zu beweisen. Aber in den *Vorlesungen* nimmt die Darstellung weniger als zwei Druckseiten in Anspruch, und dann ist es kaum angebracht, etwa eine Seite den Müllerschen Beweisen zuzuweisen.

Allein auch die Art und Weise, wie Herr Cantor über diese Beweise berichtet, ist recht eigentümlich. Bei Müller werden verschiedene Transformationen Maclaurins ausführlich auseinandergesetzt, und für diesen Zweck benutzt Müller gewisse Größen, die er m, n, μ, ν, t, ϱ nennt. Herr Cantor beschränkt sich auf die Transformationen, in denen die vier Größen m, n, μ, ν vorkommen, aber dennoch gibt er nach Müller einige Sätze und Formeln an, die für t und ϱ gelten und welche Formeln also in dem Cantorschen Berichte nicht zur Anwendung kommen können. Auch wenn man davon absieht, daß es sich hier um Maclaurin und nicht um Felix Müller handeln sollte, muß die Darstellung als schlecht redigiert bezeichnet werden. G. Enestrom.

Vermischte historische Notizen.

Bemerkung zu dem Aufsatze „Über Jacobis Auffassung des realen Integrals als einer mehrdeutigen Funktion" Herr A. Pringsheim war so gütig, mich darauf hinzuweisen, daß meine (Biblioth. Mathem. $\mathbf{11}_3$, 1911, S. 138) gemachte Angabe: „die Behauptung, es sei nicht möglich, die Mehrdeutigkeit eines Integrals hervortreten zu lassen, so lange man die Variable auf die realen Werte beschränkt, sei bisher noch niemals angefochten worden" nicht den Tatsachen entspricht. Es hat nämlich Herr M. Pasch in seiner *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* (Leipzig 1882, S. 124ff.) die Unendlichvieldeutigkeit des trigonometrischen Integrals

$$\int^{\circ} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

nach genau derselben Methode abgeleitet wie Jacobi in seiner nicht publizierten und folglich bis zum Erscheinen des Gundelfingerschen Aufsatzes (Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908/09, S. 211—226) unbekannt gebliebenen Vorlesung von 1835/36, und hat auch im Vorwort (S. IV) die prinzipielle Bedeutung dieser

Methode mit folgenden Worten betont: „indem jene [nämlich die trigonometrischen] Funktionen aus dem Kreisbogenintegral erzeugt wurden, bot sich zugleich Gelegenheit, den Begriff des Integrationsweges zu erweitern und die Periodizität ohne Zuziehung von komplexen Variabeln zu erklären."

Leider war diese Stelle des Werkes von Herrn Pasch meinem Gedächtnis entschwunden; da, wie es scheint, auch andere Mathematiker im gleichen Falle waren, so bleibt mir doch die Genugtuung, durch meinen Aufsatz die Aufmerksamkeit von neuem auf diese bedeutungsvolle *Pasch-Jacobische Methode* hingelenkt zu haben.

Gießen. L. Schlesinger.

Anfragen.

151. Über die Erfindung des Algorithmus der Newtonschen Fluxionsrechnung. In dem „Synoptical view of Newton's life", das Edleston am Anfange (S. XXI—XL) der *Correspondence of Isaac Newton and Cotes* (London 1850) eingefügt hat, wird (S. XXI) behauptet, daß Newton am 20. Mai 1665 einen Aufsatz über Fluxionen geschrieben hat, worin diese durch punktierte Buchstaben bezeichnet worden sind. Als Beleg verweist Edleston (S. XLI) auf „Rigaud's *Appendix,* p. 23 compared with Raphsons *History of fluxions,* p. 116". Hier bedeutet „Rigaud's Appendix" wahrscheinlich den Anhang der Schrift *Historical essay on the first publication of I. Newton's Principia* (Oxford 1838), die mir nicht zugänglich ist. Indessen kann ich nicht umhin, die Behauptung bis auf weiteres als verdächtig zu betrachten, denn weder in dem langen Bericht über die Entdeckung der Fluxionsrechnung, den Newton 1716 verfaßte und die dann am Ende der *History of fluxions* von Raphson zum Abdruck gebracht wurde, noch in der kurzen Notiz über denselben Gegenstand, die Newton vielleicht ein paar Jahre früher redigierte (siehe *A catalogue of the Portsmouth collection of books and papers, written by or belonging to Isaac Newton,* Cambridge 1888, S. XVIII) habe ich etwas über das Vorkommen von Fluxionszeichen in einem Aufsatze vom Mai 1665 entdecken können. Aus den fraglichen Aktenstücken ersieht man nur, daß Newton im Mai 1665 die Slusesche Tangentenmethode gefunden hatte.

Aber auch wenn die von Edleston zitierte Schrift seine Behauptung bestätigt, sollte untersucht werden, ob die Bestätigung wirklich als definitiv betrachtet werden kann. Bekanntlich verzeichnet der oben zitierte *Catalogue of the Portsmouth collection* (siehe S. 2) verschiedene handschriftliche Aufsätze von Newton über die Fluxionsrechnung, und durch eine genaue Untersuchung dieser Aufsätze könnte vielleicht die Behauptung von Edldston definitiv entweder bestätigt oder als unrichtig nachgewiesen werden. G. Enestrom.

Rezensionen.

Codex Leidensis 399,1. Euclidis elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg. Partis II Fasc. I, II; Partis III Fasc. I. Hauniae, in libraria Gyldendaliana, 1900—1910. 79, 148 und 81 S. 8°.

In der Zeitschrift für Mathematik und Physik (**38**, 1893, hist. Abt. S. 192—195; **44**, 1899, hist. Abt. S. 60—62) habe ich den ersten und zweiten Faszikel des ersten Teils dieses arabischen Euclids besprochen, die das erste Buch der Elemente umfaßten. Vor zehn Jahren (1900) erschien der erste Faszikel des zweiten Teils, das zweite Buch enthaltend, 1905 der zweite Faszikel des zweiten Teils mit dem dritten und 1910 der erste Faszikel des dritten Teils mit dem vierten Buche Euklids. Wir haben nun noch das fünfte und sechste Buch zu erwarten, denn bekanntlich umfaßt das Leidener Manuskript 399,1 der arabischen Übersetzung bloß die sechst ersten Bücher des Werkes.

Von den hier zu besprechenden drei Büchern bietet das erste (zweite Euklids) das größte historische Interesse dar, indem hier zu den zehn ersten Sätzen andere Beweise Herons gegeben sind, und zwar jeweilen nach der Methode der Analysis, wie auch der Synthesis; dieselben sind mehr algebraisch gehalten als diejenigen Euklids, Heron vermeidet die Euklidische Darstellung durch Quadrate, Rechtecke und Gnomone. Auch sind zu den ersten fünf Sätzen Zahlenbeispiele, wahrscheinlich von Nairīzī, gegeben, wie es verschiedene spätere arabische Kommentatoren getan haben. (Vgl. besonders meinen Artikel *Über den Kommentar des Muh. b. Abdelbaqi zum zehnten Buche des Euklides*, Biblioth. Mathem. $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 234—251).

Als Kommentar zum elften Satze des zweiten Buches (goldener Schnitt) gibt Heron die in den heutigen Lehrbüchern meist gebräuchliche Konstruktion worauf schon Curtze in seiner Ausgabe der Gerhardschen Übersetzung des Kommentars des Nairīzī aufmerksam gemacht hat (*Euclidis Opera omnia, Supplementum*, S. 108). Der Beweis wird aber nicht auf die heutige Art geführt, sondern mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes und des zweiten und vierten Satzes des zweiten Buches.

Der letzte (14.) Satz des zweiten Buches ist in dieser Ausgabe insofern etwas vereinfacht, als nur verlangt wird, ein Quadrat zu zeichnen, das einem gegebenen Dreieck gleich sei, und nicht einer beliebigen geradlinigen Figur.

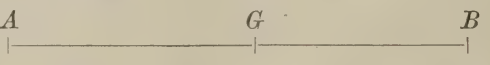
Über das dritte Buch ist im allgemeinen nicht viel zu bemerken. Von griechischen Kommentatoren tritt nur noch Heron auf, nur einmal (32. Satz) wird Simplicius zitiert, jedenfalls von Nairīzī. Aus einigen Stellen dieses Buches können wir den Schluß ziehen, daß Nairīzī öfters der Heronschen Anordnung der Sätze folgt; so sind in der arabischen Ausgabe die Sätze fünf („Wenn sich zwei Kreise schneiden, so haben sie nicht das gleiche Zentrum") und sechs („Wenn sich zwei Kreise berühren, so haben sie nicht das gleiche Zentrum") der griechischen Ausgabe Heibergs umgestellt, denn Heron bemerkt in seinem Kommentar: „Die Berührung haben wir vor das Schneiden gesetzt, weil die Berührung früher ist (eintritt) als das Schneiden." So zieht ferner Nairīzī nach Heron die beiden Sätze elf und zwölf über die innere und äußere Berührung zweier Kreise in einen zusammen, so daß also das dritte Buch in vorliegender Ausgabe nur 36 statt 37 Sätze zählt. Dieselbe Anordnung befolgt übrigens auch Naṣīr ed-dīn, ohne aber von dem Kommentar Herons etwas zu sagen.

Im vierten Buche sind die im Anfang der griechischen Ausgabe stehenden sieben Definitionen von Heron etwas abweichend gefaßt und geordnet worden, die siebente fehlt ganz. Naṣīr ed-dīn zieht diese Definitionen noch kürzer zusammen, und wir können ihm in der Tat hierin nicht ganz Unrecht geben; denn erstens ist Euklid gerade in diesem Punkte, wie bekanntlich auch noch in andern, etwas zu weitschweifig, und zweitens beabsichtigte Naṣīr ed-dīn, wie er in seiner Ausgabe selbst bemerkt, nicht eine genaue Wiedergabe des griechischen Euklids in arabischer Sprache zu veröffentlichen, sondern eine für besondere Zwecke verfaßte Bearbeitung der Elemente. Er ließ also, wie jedenfalls teilweise schon seine Vorgänger, Definitionen, Lehrsätze usw., die für das Verständnis des Folgenden nicht absolut notwendig waren, weg (besonders im achten, zehnten und zwölften Buche), fügte aber dafür oft Zusätze bei, die nicht im griechischen Texte standen. Man kann also wirklich, wie schon Heiberg in seinen *Studien über Euklid* ganz richtig bemerkt hat, auf die arabischen Übersetzungen (bzw. Bearbeitungen) für die Textkritik der Euklidischen Elemente nicht abstellen.[1])

Im vierten Buche gibt Nairīzī zu verschiedenen Lehrsätzen (sechsten bis elften) auch einen analytischen Beweis nach dem Vorgang Herons im zweiten Buche; nach dem Wortlaut des Textes müssen wir wirklich annehmen, daß sich diese analytischen Beweise im Kommentar Herons nicht vorgefunden haben.

Zum arabischen Text und seiner Übersetzung durch die Herren Besthorn und Heiberg haben wir noch einige wenige Bemerkungen hinzuzufügen.

Pars II, Fasc. I, p. 37: Diese Analysis bietet keine „miras ambages" dar, wie Herr Heiberg in der Note bemerkt, sie stützt sich auf Satz 3 und 4 des zweiten Buches und heißt in moderner Darstellung:



1) Bei diesem Anlaß sei es uns noch gestattet, einen Fehler Heibergs in seinen *Literargesch. Studien über Euklid* zu korrigieren: Er sagt in seiner vergleichenden Tabelle (S. 19), das erste Buch Euklids habe bei Naṣīr ed-dīn 47 Sätze, das zweite 13; in den Ausgaben (Roma 1594) mit 13 und 12 Büchern hat aber das erste Buch 48, das zweite 14 Sätze, wie bei Campanus und wie bei August.

Es ist nach II, 4: $AB^2 = AG^2 + GB^2 + 2AG \cdot GB$

$GB^2 = GB^2$

also $AB^2 + GB^2 = 2AG \cdot GB + 2GB^2 + AG^2$

aber nach II, 3 ist $2AG \cdot GB + 2GB^2 = 2AB \cdot GB$

also: $2AG \cdot GB + 2GB^2 + AG^2 = 2AB \cdot GB + AG^2$

oder: $AB^2 + GB^2 = 2AB \cdot GB + AG^2$ q. e. d.

P. II. F. II, p. 4, Z. 3 v. u. rekonstruiert Herr Besthorn ein unleserliches arabisches Wort mit *waʿind,* es muß wohl heißen: *waʿaks* = und umgekehrt.

Ibid. p. 80 ist die erste Zeile doppelt gedruckt.

Ibid. p. 112 (113): Zu dem, was der Kommentator (al-Nairīzī) zu dem Zusatz Herons hinzufügt, bemerken die Herausgeber: Textus Anaritii (Curtze p. 136) valde corruptus est, nec Arabs satis clare exposuit, quod vult. — Ich glaube, daß im arabischen Text nur ein kleiner Fehler stecke, durch dessen Verbesserung der Sinn wesentlich klarer würde; es muß wahrscheinlich (p. 112, Z. 5 v. u.) statt *lakāna* heißen: *lā kāna;* nach den strengen Regeln der arabischen Grammatik sollte allerdings in einem negativen Nachsatz nach einem mit *lau* beginnenden hypothetischen Satze *mā* oder *lamā* stehen. Dann hieße die ganze Stelle in Übersetzung so: Es sagt der Kommentator: Er (Heron) teilt den Bogen AG in zwei gleiche Teile, damit dann klar sei, daß die Sehne des Bogens AB gleich der Sehne des Bogens BG sei; denn, wenn er die Linie AG in zwei gleiche Teile geteilt hätte, so hätte er freilich den Satz 29 nicht nötig gehabt, der zeigt, wie man einen gegebenen Bogen in zwei gleiche Teile teile, aber es wäre ihm nicht klar geworden, daß die Sehne des Bogens AB gleich der Sehne des Bogens BG sei, wenn er nicht den Bogen ABG in zwei gleiche Teile geteilt hätte; also mußte er notwendig den von ihm bewiesenen Satz (ein Kreissegment sei gegeben, man soll den Kreis, zu dem es gehört, vervollständigen) nach diesem Satz (29) setzen.

P. III, F. I. Der arabische Satz p. 6, Z. 7 v. u.: *qāla Īrun hādā aschschakl ʿalā mā qālahu ar-rijādī* ist hier lateinisch wiedergegeben mit: Hero dixit: haec propositio, ut dixit geometra, ita recte se habet. So könnte man meinen, der eingeschobene Satz „ut dixit geometra" wolle sagen, die Worte „haec propositio ita recte se habet" seien ein Zitat aus dem Geometer (Euklides); p. 75, Z. 14 ist der ganz gleiche Satz übersetzt mit: Hero dixit: haec propositio cum iis, quae docet Geometra, consentit; dies ist besser, aber genauer noch, wenn auch weniger gut lateinisch, ist die Übersetzung Gerhards (Curtze, 139 u. 142): de prima figura dixit Yrinus, quod ipsa est secundum quod Euclides dixit. Es ist damit wohl gemeint, daß der Satz von Euklides so und nicht anders bewiesen worden sei, er (der Kommentator) könne auch keinen anderen Beweis dafür geben.

Ibid. p. 45 u. 51 übersetzt Herr Heiberg *ṭarīq al-ḥall* mit *ratio solvendi;* das ist ja wohl wörtlich ganz richtig, aber hier bedeutet *ṭarīq al-ḥall* genau dasselbe wie an anderen Orten (z. B. P. II. F. I, p. 30 etc.) *ṭarīq at-taḥlīl* = analytische Methode; in der Tat übersetzte auch Herr Heiberg *ṭarīq al-ḥall* in den früheren Faszikeln ganz richtig mit *via analytica,* so P. II. F. I, p. 21 u. 51. P. III. F. I, p. 36, 42 u. 54 steht sogar nur *al-ḥall* ohne *ṭarīq,* aber auch dieses bedeutet „analytische Methode", nicht einfach bloß *solutio,* wie die

zwei ersten der zuletzt genannten Fälle deutlich zeigen, wenn der Verfasser nach „adtinet“ fortfährt: supponimus, quadratum circum circulum constructum esse; also was in der Aufgabe verlangt wird, wird schon als ausgeführt angenommen.

Ibid. p. 74 (75) muß es natürlich im Kommentar von Heron statt „Zwölfeck“ heißen „Fünfzehneck“, dann wird die Sache verständlicher, und die erste Fußnote (p. 75) muß dann etwas anders abgefaßt sein. Man vergleiche über diesen Gegenstand (warum die Konstruktion des Fünfzehnecks von Euklides behandelt worden sei) außer den in der genannten Note zitierten Stellen auch Nallino, *Al Battānī opus astronomicum*, II, XXI—XXII.

Wir wollen hoffen, daß die gesundheitlichen Verhältnisse der beiden gelehrten Herausgeber es ihnen ermöglichen werden, dieses schöne Unternehmen glücklich zu Ende zu führen.

Zürich. H. Suter.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Abu Kamil el-Misri, 32.
Ahrens, 21, 67.
Al-Hadschdschadsch, 33.
Al-Narizi, 33.
Archimedes, 28.
Auerbach, 8.
Ball, 52.
Besthorn, 33.
Billy, 49.
Bjelopolskij, 86.
Bortolotti, 85.
Bosmans, 40, 46.
Brocard, 70
Buchka, 2.
Buhl, 90.
Burkhardt, 60.
Cajori, 45, 61.
Cantor, 9.
Cardinaal, 6.
Carlebach, 38.
Castelnuovo, 7.
Chatelet, 98.
Couturat, 100.
Dannemann, 17, 18.
Darboux, 98.
Decourdemanche, 19.
Del Lungo, 41.
Dyck, 44.
Eneström, 3, 39, 48, 58.
Euklides, 33.
Farault, 20.
Favaro, 41.
Frankland, 14.
Fueter, 75.
Fuss, 67.
Galilei, 41.
Giacomelli, 43.
Gosiewski, 82.
Guareschi, 57.
Guimarães, 22.
Günther, 10, 16.
Hahn, 74.
Heath, 29.
Heegaard, 91.
Heiberg, 28, 33.
Hensel, 71, 72.
Huygens, 50.
Jacobi, 67.
Jeremias, 24
Jourdain, 12.
Kapteyn, 6.
Karpinski, 34, 35.
Kluyver, 6.
Königsberger, 65.
Kowalewski, 53.
Kucharzewski, 51.
Lampe, 5.
Langenkamp, 54.
Lebon, 77, 78, 79 80.
Lietzmann, 96.
Lorey, 88, 103.
Loria, 4, 13, 15, 27.
Michl, 47.
Mikami, 55, 56.
Milhaud, 25.
Miller, 62, 73.
Moreux, 95.
Müller, Felix, 11, 59, 64.
Naber, 26.
Newton, 53.
Painlevé, 98.
Picard, 98.
Poincaré, 76.
Schaewen, 49.
Schlesinger, 68.
Schoute, 6.
Schütte, 15.
Simon, 23, 63.
Stäckel, 67, 102
Stadler, 2.
Stamm, 101.
Stern, 66.
Strunz, 30.
Sudhoff, 2.
Suter, 32.
Tannery, J., 69.
Torelli, 84.
Turrière, 90.
Valentin, 99.
Vries, 6.
Wiedemann, 31, 36, 37.
Wohlwill, 42.
Wölffing, 93.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. [Rezension des Heftes 28:] Mathesis 1_4, 1910, 43—44. [1

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von Buchka, H. Stadler, K. Sudhoff. Leipzig. 8°. [2
3 (1910/11) : 2—3.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [3
11_3 (1910/11) : 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [4
12 (1910) : 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [5
39 (1908) : 2—3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, J. Cardinaal, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [6
19 : 1 (avril — octobre 1910).

Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 6—11 Aprile 1908). Pubblicati per cura di G. Castelnuovo (1909). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 249—250 (G. J.) [7

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker Herausgegeben von Felix Auerbach (1909). — [Rezension:] *Stuttgart*, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. **11**, 1909, 20 (H. Wieleitner.) — Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 701—702. (E. Lampe.) — Monatsh. für Mathem. **22**, 1911; Lit.-Ber. 12. [8

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 160—170. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 170—181. (G. Eneström.) [9

Günther, S., Geschichte der Mathematik. I (1908), [Rezension:] *Stuttgart*, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. **11**, 1909, 29. (Wölffing.) — Monatsh. für Mathem. **22**, 1911; Lit.-Ber. 15. (R. v. St.) [10

Müller, Felix, Führer durch die mathematische Literatur (1909). [Rezension:] Nyt Tidsskr. for Mathem. **20**, 1909, B: 93—94. [11

Jourdain, Ph. E. B., The development of theories of mathematical logic and the principles of mathematics. [12
Quart. journ. of mathem. **41**, 1910, 324–352.

Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Terza edizione (1907). [Rezension:] Časopis pro pěstov. mathem. **38**, 1909, 313—314. [13

Frankland, W. B., Theories of parallelism. An historical critique (1910). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 312—314. (D. E. Smith.) — Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 13—14. (Er. L.) [14

Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. Zweite verbesserte Auflage. Zweiter Teil. Leipzig, Teubner 1911 [15
8°, VIII + 384 S. + 6 Taf. — [12.50 Mk.] — [Rezension des ersten Teiles:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 219. (J. G.) — Mathesis 1_4, 1911, 15—18. (H. Bosmans.)

***Günther, S.,** Geschichte der Naturwissenschaften. Zweite Auflage. Leipzig, Reclam 1911. [16
8°, 136 + 290 S. + Porträt + 16 Taf. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **42**, 1911, 179. (H. Wieleitner.)

Dannemann, Fr., Aus der Werkstatt großer Forscher. Aufl. 3 (1908). [Rezension:] *Stuttgart*, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. **11**, 1909, 27—28. (Wölffing.) [17

***Dannemann, Fr.,** Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und ihrem Zusammenhange. Erster Band. Von den Anfängen bis zum Wiederaufleben der Wissenschaften. Leipzig, Engelmann 1910. [18
8°, VI + 373 S. + 1 Taf. — [9 Mk.]

Decourdemanche, J. A., Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes (1909). [Rezension:] L'enseignement mathém. **13**, 1911, 74. [19

***Farault, P. G.,** Astronomie cambodgienne. Saïgon, Schneider 1910. [20
4°, 283 S. + 1 Taf. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 9—10. (Er. L.) — L'enseignement mathém. **13**, 1911, 173—174.

Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Aufl. 2. I (1910). [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1911, 355—356. (E. Hoppe.) — L'enseignement mathém. **13**, 1911, 71—72. (A. Buhl.) [21

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal. Ed. 2 (1909). [Rezension:] *Stuttgart*, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. **12**, 1910, 28. (Wölffing.) — Nouv. ann. de mathém. 10_4, 1910, 509—511. (C. A. L.) — Wiadomości matem. **14**, 1910, 237—238. (S. Dickstein.) — Wiskundig tijdschr. **6**, 1910, 260—261. [22

b) Geschichte des Altertums.

Simon, M., Geschichte der Mathematik im Altertum (1909). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 634—637. (H. Wieleitner.) [23

Jeremias, A., Das Alter der babylonischen Astronomie. Aufl. 2 (1909). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 439—440. (E. Mahler.) [24

Milhaud, G., La géométrie d'Apastamba. Revue génér. d. sc. **21**, 1910, 512—520. [25

Naber, H. A., Das Theorem des Pythagoras (1908). [Rezension:] *Stuttgart*, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. **12**, 1910, 61. (H. Wieleitner.) [26

Loria, G., Sopra una relazione che passa fra due antiche soluzioni del problema di Delo. [27
Biblioth. Mathem. 11_2, 1910/11, 97—99.

Archimedis Opera omnia. Iterum edidit J. L. Heiberg. I (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 27—29. (K. Manitius.) [28

Heath, Th. L., Diophantus of Alexandria. Second edition (1910). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 15—17. (Er. L.) [29

c) Geschichte des Mittelalters.

Strunz, Fr., Geschichte der Naturwissenschaften im Mittelalter (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 119—121. (J. Pagel.) — Wiadomości matem. **14**, 1910, 238—242. (S. Dickstein.) [30

Wiedemann, E., Über einen astrologischen Traktat von al Kindi. [31
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik **3**, 1911, 224—226.

Suter, H., Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el-Misri. Übersetzt und mit Kommentar versehen.
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 100—120. [32

Besthorn, R. O. et **Heiberg, J. L.,** Codex Leidensis 399, 1. Euclidis elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine. Partis III fasciculus I. Köbenhavn, Gyldendal 1910. [33
8°, (2) + 81 S.

Karpinski, L. C., Hindu numerals in the Fihrist. [34
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 121—124.

Karpinski, L. C., Robert of Chesters translation of the algebra of Al Khowarizmi. [35
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 125—131.

Wiedemann, E., Zur Optik von Kamal al Din. [36
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik **3**, 1911, 161—177.

Wiedemann, E., Zu den optischen Kenntnissen von Qutb al Din al Schirazi. [37
Archiv für d. Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik **3**, 1911, 187—193.

Carlebach, J., Lewi ben Gerson als Mathematiker. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden. Berlin, Lamm 1910. [38
8°, 234 + (3) S. + 3 Taf. — [5 Mk.]

d) Geschichte der neueren Zeit.

Eneström, G., Über die Geschichte der ersten algebraischen Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. [39
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 182—183. — Anfrage.

Bosmans, H., Un émule de Viète: Ludolphe van Ceulen. Analyse de son „Traité du cercle" (1910). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 241—242. (J. T.) [40

Del Lungo, I. e Favaro, A., La prosa di Galileo per saggi criticamente disposti ad uso scolastico e di cultura. Firenze, Sansoni 1911. [41
8°, XXIV + 551 S. — [3.50 lire.] — Biblioteca scolastica di classici italiani.

Wohlwill, E., Galilei und sein Kampf für die Copernicanische Lehre I (1909). [Rezension:] Götting. gel. Anzeigen 1911, 1—14. (P Duhem). [42

Giacomelli, R., Un teologo e apologeta riformatore della fisica e dell' astronomia. [43
Rivista di filosofia (Modena) 3, 1911. 8 S. — Betrifft zum Teil Galilei.

Dyck, W. von, Zwei wiederaufgefundene Prognostica von Johann Kepler auf die Jahre 1604 und 1624. [44
München, Akad. d. Wiss., Abhandl. (Mathem. Kl.) 25 : 5, 1910. 61 S.

Cajori, F., On the invention of the slide rule. [45
British association for the advancement of science, Report 79, 1909, 391.

Bosmans, H., La première édition de la „Clavis mathematica" d'Oughtred. Son influence sur la „Géométrie" de Descartes. [46
Bruxelles, Soc. scient., Annales 35 : 2, 1911, 24–78.

Michl, Fr., Ev. Torricelli. [47
Časopis pro pěstov. mathem. 38, 1909, 257—262. — Böhmisch.

Eneström, G., Über die älteste Geschichte der sogenannten Simpsonschen Annäherungsformel. [48
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 183.

Schaewen, P. von, Jacobi de Billy Doctrinae analyticae inventum novum (1910). [Rezension:] L'enseignement mathém. 13, 1911, 77—78. (D. Mirimanoff.) — Wiskundig tidschr. 6, 1910, 265—266. [49

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tome douzième. Travaux de mathématiques pures. 1652—1656. La Haye, Nijhoff 1910. [50
4°, 297 S. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 19_3, 1911, 257—262. (H. Bosmans.) — [Rezension des Bandes 11:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 19_3, 1911, 255—257. (H. Bosmans.)

Kucharzewski, F., De momentis gravium. Polemika mechaniczna z XVII w. [51
Wiadomości matem. 14, 1910, 197—203.

Ball, W. W. R., A school course in mathematics in the XVIIth century. [52
The mathem. gazette 5, 1910, 202—205.

Kowalewski, G., Newtons Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1908). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 22, 1911; Lit.-Ber. 6—7. (H. Hahn.) [53

Langenkamp, O., Über Saccheris Untersuchungen des Parallelenaxioms (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem, 12, 1910, 116. [54

Mikami, Y., A remark on T. Hayashi's article on the Fukudai. [55
Tôkyô, Sûgaku Buturigakkwai, Kizi 5_2, 1910, 392—394.

Mikami, Y., On the history of the circle-principe. Reply to T. Hayashi's remarks. [56
Tôkyô, Sûgaku Buturigakkwai, Kizi 5_2, 1910, 372—392.

Guareschi, I., Daniele Bernoulli ed Amedeo Avogadro e la teoria cinetica di gaz. [57
Torino, Accad. d. sc., Atti (sc. matem.) 45, 1910, 423–444.

Eneström, G., Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. I (1910). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 8—9. (C. J.) — Deutsche Literaturz. 32, 1911, 378–380. (F. Engel.) [58

Müller, Felix, Namenregister für den mathematischen Inhalt der Nova Acta Eruditorum a. 1732—1776. [59
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 20, 1911, *57–62*.

Burkhardt, H., Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750—1860. [60
Mathem. Ann. 70, 1911, 169—206.

Cajori, F., Fouriers improvment of the Newton-Rawson method of approximation anticipated by Mourraille. [61
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 132—137.

Miller, G., The founder of group theory. [62
The mathem. monthly 17, 1910, 162—165.

Simon, M., Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Nyt Tidsskr. for Mathem. 20, 1909, B : 91. [63

Müller, Felix, Der mathematische Sternenhimmel des Jahres 1811. Rückblicke auf die Mathematik vor hundert Jahren. [64
Zeitschr. für mathem. Unterr. 42, 1911, 115—138.

Königsberger, L., Zur Erinnerung an Jacob Friedrich Fries. [65
Heidelberg, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 1911, 28 S.

Stern, S., Ein Beitrag zur Geschichte der elektrischen Strahlenerscheinungen. [66
Archiv für die Gesch. d. Naturwiss. und d. Technik 3, 1911, 236—237.

Stäckel, P. und Ahrens, W., Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers (1908). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. **22**, 1911; Lit.-Ber. 16—17. (R. v. St.) [67

Schlesinger, L., Über Jacobis Auffassung des realen Integrals als einer mehrdeutigen Funktion. [68
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 138—152.

Tannery, J., Manuscrits de E. Galois (1908) [Rezension:] Časopis pro pèstov. mathem. **38**, 1909, 454—455. [69

Brocard, H., Au sujet de Labatie. [70
L'interméd. d. mathématiciens **17**, 1910, 277—278. — Der Entdecker des Labatieschen Theorems in der Eliminationstheorie, Aristide Gabriel Marguerite Labatie, wurde am 4. März 1786 zu Marlieu geboren und starb am 14. Dezember 1866 zu Nattage.

Hensel, K., Gedächtnisrede auf E. E. Kummer (1910). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 371—372. (L. E. Dickson.) [71

Hensel, K., E. E. Kummer und der große Fermatsche Satz (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 889. (E. Netto.) [72

Miller, G. A., Kronecker and the Galois theory of equations. [73
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 182.

Hahn, H., Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. [74
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, 69—117.

Fueter, R., Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Bericht, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. [75
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, 1—47.

Poincaré, H., Prix Bolyai. Procès verbal des séances de la commission internationale de 1910. Budapest 1911. [76
8°, 38 S. — Enthält eine Würdigung der mathematischen Arbeiten D. Hilberts. — [Wieder abgedruckt:] Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911 67—100. — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti **31**, 1911, 109—132.

Lebon, E., Henri Poincaré (1909). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 204—205. (J. T.) — Wiskundig tijdschr. **6**, 1910, 175—176. [77

Lebon, E., Emile Picard (1910). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 205. (J. T.) — Mathesis 10_2, 1910, 269. (P. M.) — Revue scient **14**, 1910, 318. [78

Lebon, E., Gaston Darboux (1910). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 258. (J. W. Young.) — Revue génér. d. sc. **21**, 1910, 485. [79

Lebon, E., Paul Appell. Biographie, bibliographie analytique des écrits. Paris, Gauthier-Villars 1910. [80
Groß 8°, VIII + 71 S. + Porträt. — [7 fr.] — „Savants du jour". — [Rezension:] Arch. der Mathem. 17_3, 1911, 350. (E. Jahnke.) — Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 15. — L'enseignement mathém. **13**, 1911, 174—175.

Stadtbibliothek Frankfurt am Main. Katalog der mathematischen Abteilung. Frankfurt a. M. 1909. [81
8°, X + 327 S. — [Rezension:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 184—186. (G. Eneström.)

e) Nekrologe.

Tytus **Babczyński** (1830—1910). [82
Wiadomości matem. **14**, 1910, 249—251 (W. Gosiewski.)

Eugen Moritz **Baur** (1832—1908). [83
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. 10_2, 1908, 66.

Alfredo **Capelli** (1855—1910). [84
Giorn. di matem. **48**, 1910, 5—15 [mit Schriftenverzeichnis]. (G. Torelli.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [85
Modena, Accad. d. sc., Memorie 8_3, 1909, 77—82. (E. Bortolotti.)

William **Huggins** (1824—1910). [86
St. Pétersbourg, Acad. d. sc, Bulletin 1910, 811—814. (A. A. Bjelopolskij.)

Charles **Méray** (1835—1911). [87
L'enseignement mathém. **13**, 1911, 151.

Eugen **Meyer** (1871—1909). [88
Mathem.-naturw. Blätter 8, 1911. 3 S. (W. Lorey.)

Simon **Newcomb** (1835—1909). [89
Manchester, Philos. soc., Proceedings **54**, 1910, XXXIII—XXXV.

Amédée **Paraf** (1861—1911). [90
L'enseignement mathém. **13**, 1911, 151—152. (A. Buhl, E. Turrière).

Julius **Petersen** (1839—1910). [91
L'enseignement mathém. **13**, 1911, 58—59. (P. Heegaard.)

Richard August **Reiff** (1855—1908). [92
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. 10_2, 1908, 65.

Carl **Reuschle** (1847—1909). [93
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. 12_2, 1910, 34—56. (E. Wölffing.)

Eugène **Rouché** (1832—1910). [94
Revue génér. d. sc. **21**, 1910, 761.

Giovanni **Schiaparelli** (1835—1910). [95
Revue génér. d. sc. **21**, 1910, 629—630. (Th. Moreux). — Revue scientifique **14**, 1910, 58.

Max **Schuster** (1856—1910). [96
Zeitschr. für mathem. Unterr. **42**, 1911, 88—92 [mit Porträt]. (W. Lietzmann.)

Hermann **Staigmüller** (1857—1908). [97
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein, Mitteil. 10_2, 1908, 65.

Jules **Tannery** (1848—1910). [98
Bullet. d. sc. mathém. 34_2, 1910, 193—197. (G. Darboux, E. Picard, P. Painlevé.) — L'enseignement mathém. **13**, 1911, 56—58. (A. Chatelet).

f) Aktuelle Fragen.

Valentin, G., Über den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie. [99
Biblioth. Mathem. 11_2, 1910/11, 153-157.

Couturat, L., Internaciona matematical lexiko en ido, germana, angla, franca e italiana. Jena, Fischer 1910. [100
8°, II + 36 S. — [1.50 Mk.] — [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 321. (J. B. Shaw). — Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 118—119. (F. Müller.) — Wiadomości matem. **14**, 1910, 246.

Stamm, E., Czem jest i czem będzie matematyka? [101
Wiadomości matem. **14**, 1910, 181—196. — Was ist die Mathematik und was soll die Mathematik sein?

Stäckel, P., Geltung und Wirksamkeit der Mathematik. Festrede bei dem feierlichen Akte des Rektoratswechsels an der großherzoglichen technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe am 19. November 1910 gehalten. Karlsruhe 1910. [102
8°, 18 S. — [Wieder abgedruckt:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, 117—128.

Lorey, W., Die mathematischen Wissenschaften und die Frauen (1909). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 1022—1023. (E. Lampe.) [103

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Königsberg 1910.] [104
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 172—176.

[Italienische Mathematiker-Versammlung in Neapel 1910.] [105
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 268—269. — L'enseignement mathém. **13**, 1911, 56.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— L. Aubry zum Dozenten der Mathematik an der Universität in Alger.

— Privatdozent C. Benedicks in Upsala zum Professor der Physik an der Universität in Stockholm.

— Observator Ö. Bergstrand in Upsala zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— „Preceptor" G. D. Birkhoff in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor E. Borel in Paris zum Subdirektor der „Ecole normale supérieure" daselbst.

— Professor P. Boutroux in Nancy zum Professor der Mathematik an der Universität in Poitiers.

— Professor S. Carrus in Besançon zum Professor der Mathematik an der Universität in Alger.

— Dr. M. Cipolla in Palermo zum Professor der Analysis an der Universität in Catania.

— Dr. A. Claeys in Gent zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. F. F. Decker in Syracuse zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent M. Dehn in Münster zum Professor der Mathematik an der Universität in Kiel.

— A. Demoulin in Gent zum Professor der höheren Analysis an der Universität daselbst.

— Professor H. Dulac in Alger zum Professor der Mathematik an der Universität in Lyon.

— Dr. M. Fréchet in Poitiers zum Professor der rationellen Mechanik an der Universität daselbst.

— Privatdozent P. Gast in Darmstadt zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Aachen.

— Direktor Fr. Gonnessiat in Alger zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent Fr. Hartogs in München zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dozent P. J. Headwood zum Professor der Mathematik an der Universität in Durham.

— Professor E. Husson in Caen zum Professor der höheren Analysis an der Universität in Nancy.

— Privatdozent Fr. Jung in Wien zum Professor der analytischen Mechanik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Dr. J. J. Laub in Heidelberg zum Professor der Physik an der Universität in La Plata.

— Dr. H. Lebesgue in Poitiers zum Dozenten der Mathematik an der Universität in Paris.

— Professor B. Levi in Cagliari zum Professor der Mathematik an der Universität in Parma.

— Privatdozent St. Meyer in Wien zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— W. S. Pemberton in Columbia zum Professor der Mathematik am „Wheaton college", Wheaton, Ill.

— „Lecturer" H. J. Priestley in Manchester zum Professor der Mathematik und Physik an der neuen Universität von Queensland.

— Professor L. Schlesinger in Klausenburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Gießen.

— Professor R. Schumann in Aachen zum Professor der höheren Geodäsie an der Technischen Hochschule in Wien.

— Privatdozent E. von Schweidler in Wien zum Professor der Physik an der Universität in Innsbruck.

— R. R. Shumway in Minneapolis zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota daselbst.

— Prizatdozent W. Sierpinski in Lemberg zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— I. W. Smith in Fargo, N.-Dak. zum Professor der Mathematik am „College of agriculture" daselbst.

— J. B. Smith in Charlotteville zum Professor der Mathematik am „Hampden-Sydney college", Va.

— Dr. H. Villat zum Dozenten der Mathematik an der Universität in Caen.

— Dr. A. Viterbi in Pavia zum Professor der Geodäsie an der Universität daselbst.

— Privatdozent M. Winkelmann in Karlsruhe zum Professor der Mathematik an der Universität in Jena.

Todesfälle.

— Edmund Autenrieth, Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule in Stuttgart, geboren in Tübingen den 21. Februar 1842, gestorben im Dezember (?) 1910.

— Frank Kelton Bailey, „Instructor in physics" an der Universität von Ohio in Columbus, gestorben im Juli 1909.

— Eduard Hagenbach-Bischoff, früher Professor der Physik an der Universität in Basel, geboren in Basel den 20. Februar 1833, gestorben den 23. Dezember 1910.

— Woldemar Heymann, Professor an der Gewerbeakademie in Chemnitz, geboren in Chemnitz den 17. Februar 1855, gestorben den 20. November 1910.

— Michael Jullien, Verfasser der „Problèmes de mécanique rationnelle", gestorben in Cairo den 1. Januar 1911, 84 Jahre alt.

— Karl Koppe, früher Professor der Geodäsie an der technischen Hochschule in Braunschweig, geboren in Soest den 9. Januar 1844, gestorben in Köln im Dezember 1910.

— Gustave Leveau, Astronom an der Sternwarte in Paris, geboren in Paris den 4. März 1841, gestorben den 10. Januar 1911.

— Charles Méray, Professor der Mathematik an der Universität in Dijon, geboren in Chalons s. S., den 12. November 1835, gestorben den 2. Februar 1911.

— Amédée Paraf, Professor der rationellen Mechanik an der Universität in Toulouse, geboren in Mülhausen den 28. Oktober 1861, gestorben in Toulouse den 16. Februar 1911.

— Bruno Peter, Professor der Astronomie an der Universität in Leipzig, geboren zu Weida den 11. Dezember 1853, gestorben den 21. Februar 1911.

— Constant Rozé, Professor der Mathematik an der „Ecole de physique et chemie" in Paris, geboren in Paris den 26. Dezember 1840, gestorben 1911.

— Cooper D. Schmidt, Professor der Mathematik an der Universität von Tennessee, gestorben in Knoxville (Tenn.) den 9. Dezember 1910, 51 Jahre alt.

— Eugenio Semmola, Professor der Experimentalphysik an der Universität in Neapel, gestorben den 21. Januar 1911.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1911 eine zweistündige Vorlesung über Geschicht der mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Heidelberg hat Professor Ramsauer für das Sommersemester 1911 mathematische und historische Erläuterungen zur Experimentalphysik angekündigt.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. Simon für das Sommersemester 1911 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik in der Renaissanee angekündigt.

— Die Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, die seit einigen Jahren von den Herren Amodeo und Favaro an den Universitäten in Neapel und Padua regelmäßig gehalten wurden, haben bis auf

weiteres aufgehört, weil nach dem Beschluß des „Consiglio superiore della istruzione pubblica in Italia“ für das akademische Jahr 1910—1911 keine öffentlichen Universitätsvorlesungen über Geschichte der Wissenschaften vorkommen werden.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1912. Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850.

— *Accademia delle scienze dell' istituto di Bologna.* Tema a concorso per l'anno 1912. Esporre, con metodo storico-critico, lo sviluppo organico della teoria delle funzioni ellitiche ed i vari punti di vista sotto ai quali questa teoria è stata considerata dalla fine del secolo XVIII fino ai nostri giorni. Indicare l'influenza che hanno avuto, su altri rami dell' analisi, le vedute presentatesi successivamente nella nominata teoria.

— *Société hollandaise des sciences à Haarlem.* Concours de l'année 1911. On demande à déterminer les nombres premiers p, qui satisfont à la congruence $g^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^a}$, où g et a sont des nombres entiers donnés et $a > 1$.

— *Academia de ciencias exactas de Madrid.* Concurso del año 1912. Estudio geométrico de la polaridad en las figuras planas y radiales de orden superior al segundo.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'année 1913. Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques.

Vermischtes.

— Le prix Binoux a été décerné en 1910 à M. E. Lebon, pour l'ensemble de ses travaux relatifs à l'historie des sciences et particulièrement à l'histoire de l'astronomie.

— In einer Sitzung des Senats der Universität in Calcutta hat Maharadja Manindra Chandra Nundy von Cossimbazar eine Summe von 20000 Rs. (etwa 27000 Mk.) zur Verfügung gestellt, damit wichtige Schriften der alten indischen Mathematiker und Astronomen nebst englischen Übersetzungen herausgegeben werden können.

Some notes on Hindu mathematical methods.

By G. R. Kaye in Simla.

1. The position of Mathematics.

Ancient Hindu works generally claim to be either directly revealed or founded upon inviolable tradition and consequently they were accepted by the orthodox as infallible. But mathematics is itself the 'infallible science' and the usual Hindu attitude must have been somewhat modified by the fact that the rules enunciated were always open to verification or correction by the unorthodox and in many cases even by the unlearned. Aryabhata was bitterly opposed and vilified by the orthodox Brahmans for introducing innovations in astronomy simply because his suggestions were not in accordance with "the Veda[1]) and the book Smriti composed by Mannu", and his best teaching was never wholly accepted in India. Indeed reverence for tradition interfered with new developments and, to a considerable extent, with the form of presentation of the subject, and also probably with the methods of teaching. Possibly also it explains the fact that certain incorrect rules and faulty demonstrations have persisted until quite recent times. However, it had in its influence on this particular subject certain limitations and it naturally could not wholly prevent obvious improvements and the introduction of new rules. Rules and theorems introduced from foreign countries could, however, never be acknowledged as coming from such unhallowed sources.[2]) They would either be absorbed without remark or vaguely referred to 'ancient authors'.

In India mathematics was always ancillary to religious ritual which embraced certain aspects of astronomy and astrology, and to commercial affairs; and it is doubtful whether the science of pure mathematics was ever cultivated for itself in this country. The rules were taught more or less as rules of thumb which it was necessary to know in order to make calculations pertaining to the proper carrying out of certain reli-

1) Alberuni's *India* ed. E. C. Sachau 2, p. 112.

2) Libri naively suggests that the Hindus would have rejected with disdain any foreign material; but Libri knew very little of the Hindu people (*Histoire des sciences mathématiques en Italie,* 1 p. 120).

gious or semi-religious ceremonies or to serve for commercial purposes. The subject of mathematics was never considered as essential for a proper education and very rarely forms part of the curriculum of the Sanskrit schools in India to-day. Occasionally *Jyotish* is taught and there is a constant but limited demand for some crude astronomy and astrology but beyond that there seems to be no demand for mathematical teaching in the system of higher indigenous education.

Of definite references to the subject in the early literature of the Hindus there is none. Certainly in the *Lalitavistara* the Bodhisattva is made to use numbers of considerable magnitude and Sanatkumāra includes *Rāsi*, which has been translated as 'the science of numbers', amongst a host of other subjects with which he professes to be acquainted[1]); but mathematics as a subject of study is pratically ignored in the sacred writings and even in the indigenous schools of to-day. We do not forget the *Śulvasūtras* which contain certain mathematical rules; neither do we forget that there is a so-called indigenous system[2]) of arithmetic still in vogue in India but in both these cases nothing beyond a few practical rules or the elements of reckoning are touched upon and the Hindu mathematicians themselves ignore both.

In the twelfth century of our era, however, there was an attempt made to found a school in which at least some mathematics should be taught. An inscription[3]) found in a ruined temple at Paṭṇa, a deserted village of Khandesh in the Bombay Presidency, refers to the mathematician Bhāskara and, after certain rather extravagant compliments, states that his grandson "Changadeva, chief *astrologer* to king Singhana, who spread the doctrine promulgated by the illustrious Bhāskarācarya, has founded a college, that in this college the *Siddhānta-Siromani* and the other works composed by Bhāskara, as well as the works of the members of his family, shall be necessarily expounded."

It should be noted that the college was founded to teach not astronomy or mathematics but the works of Bhāskara and his family. This is a characteristic touch.

2. Exposition.

About actual teaching and learning we have no direct information but we infer that the mathematical rules were committed to memory without much reference to the theory of the subject and that a good

1) *The Khandogya-Upanishad* VII, 1—2 (The sacred books of the east **1**, p. 109).

2) Perhaps this was the system Avicenna learnt from the oil merchant (Libri, l. c. **1**, p. 378). 3) *Epigraphia Indica,* vol. **1**, 345.

deal of the calculation was done 'mentally' or in a semi 'mental' way. This is indicated by the wording of the rules and also by the practice of astrologers and others of the present day who follow indigenous methods. A statement of the problem was briefly set down and the calculations made with the aid of a board covered with sand (nothing of the nature of an abacus but more like a slate) and the details of each step as soon as completed were rubbed out and only the result preserved. The custom no doubt varied with the period and place but beyond what is here indicated we have no information. A good deal has been written about the use of the abacus in India but the latest researches on this point tend to show that it is of comparatively recent introduction.[1])

The mathematical works consist of collections of rules to be learned by heart with the addition, in some cases, of examples. Definitions[2]), proofs and demonstrations are generally absent. Following the fashion of other Hindu works the rules are written in verse, possibly as an aid to memory, but more probably as a matter of custom. It has been stated that the earlier religious works were passed down from one generation to another by word of mouth for a long period before committing them to writing became fashionable; but this point of view need hardly be considered with respect to mathematics for, with the exception, perhaps, of the *Sulvasūtras*, no mathematical works earlier than about the fifth century of our era are known.

Naturally the custom of writing their mathematical rules in verse affected somewhat the form of exposition and it has been stated that certain ambiguities in the rules and some lack of mathematical preciseness and other unmathematical characteristics are the result of this custom; and that the prevalence of this custom forms a suitable and sufficient apology for such faults. This, however, is not a sound criticism for most of the faults that occur are not due to versification, which, for example, cannot affect the order of propositions; and the mathematicians employed prose when they thought fit. Possibly, however, this custom of writing in verse had an important effect, which will be explained in due course, upon the use and development of the arithmetical and algebraic notations employed.

3. Order.

At first inspection the formal mathematical works of the Hindus appear to be devoid of all logical sequence and a closer examination

1) Kaye, Journ. of the asiatic soc. of Bengal 1908, p. 293.

2) Two or three definitions are given in Āryabhata's *Gaṇita*. Later works give none.

shows that although some sort of order is followed it is seldom strictly a mathematical one. This is particularly noticeable in Āryabhaṭa's *Ganita* and in the works of Brahmagupta. Indeed we find in most of the Hindu works isolated theorems announced without any indication of the necessary preparatory processes by which they were achieved; we find theorems placed before others upon which they are based; etc. etc.

M. Chasles, many years ago[1]), rearranged Brahmagupta's geometrical section, numbered 21 to 42 in the original work, as follows: 24, 22, 21, 27, 35, 33, 34, 21, 28, 26, 23, 25, 29, 30, 31, 32, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42.

Brahmagupta writes[2]): "He who distinctly and severally knows addition and the rest of the twenty operations and the eight determinations including measurement by shadow is a mathematician".

Chaturveda states that the twenty operations are:

A. 1. Addition
2. Subtraction
3. Multiplication
4. Division
5. Square
6. Square-root
7. Cube
8. Cube-root
9—14. Six rules for reduction of fractions
15. Rule of three terms
16. „ „ five „
17. „ „ seven „
18. „ „ nine „
19. „ „ eleven „
20. Barter.

The eight determinations he gives as:

B. 1. Mixture
2. Progression
3. Plane geometry
4. Excavations
5. Stacks
6. Saw
7. Mounds
8. Shadows.

Brahmagupta gives (§ 66) two other topics viz: 1. Derivation of semi-chords. 2. Indeterminate equations; and Chaturveda puts into the second class the following eleven topics:

C. 1. Indeterminates of the first degree
2. Symbols
3. Positive and negative quantities
4. Surds
5. Concurrence
6. Dissimilar operation
7. Simple equations
8. Equations with several unknowns
9. Quadratics
10. $ax + by + cxy = d$
11. Indeterminates of the second degree.

1) *Aperçu historique sur l'origine des méthodes en geométrie*, p. 424.

2) Colebrooke, *Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit*, p. 277.

Bhāskara also speaks[1]) of the 'thirty operations' which, perhaps, correspond to the lists *A* and *B* with the addition of trigonometry and indeterminate equations. Again he speaks[2]) of the 'eight operations' (of arithmetic) where he refers to the first eight of list *A*.

Ganeśa in commenting on the section dealing with indeterminates in the *Līlāvati*[3]) asks why the subject was admitted into a treatise of arithmetic (gaṇita)[4]) and points out that a passage of Aryabhaṭa expressly distinguishes it from both arithmetic and algebra. But the terms 'arithmetic', 'algebra' and 'geometry' do not exactly correspond to any of the Sanskrit terms employed by the Hindu mathematicians. "The science of computation *(gaṇita)*" they say "is pronounced two-fold, denominated *distinct* (vyacta) and *indistinct* (avyacta)"; and where as *gaṇita* includes what we term 'arithmetic' and 'mensuration', *vija* or 'the elements'[5]) corresponds pretty closely to our idea of algebra and may be taken to be defined by list *C* above. Of pure geometry according to the Greek standard the Hindu works do not treat.

4. Proof.

Demonstrations and proofs were more or less ignored by the early Hindu mathematicians. None is given in the earlier works and the first formal attempts at rigorous proof occur in the commentaries of the sixteenth century A. D. The works of Āryabhaṭa, Brahmagupta, Śrīdhara and Mahāvīra contain no 'proofs' but Bhāskara gives some 'demonstrations', specimens of which will be exhibited in due course.

Neither was it invariably the custom to give illustrative examples. Āryabhaṭa gives none and Brahmagupta only in connection with equations and surds. The latter gives also detailed workings of a good number of examples but Śrīdhara and Mahāvīra. exhibit no workings. The Bakhshāli manuscript consists of examples with solutions and so-called proofs which, however, are no more than examples of simple verification. Bhāskara's *Lilavati* and *Vija gaṇita* are the most complete in this respect and hence, possibly, their popularity in comparison with other works.

Some of these illustrative examples may be likened to those of Diophantus and amount to demonstrations for, although only numerical in form they often exhibit the principles of the problem in a fairly general form. The earliest and most notable of such 'demonstrations' is one in which Bhāskara (12th century A. D.) finds the hypotenuse

1) *Vija Gaṇita* § 1. 2) *Līlāvati* § 12. 3) § 248.

4) The *Līlāvati,* out of 277 paragraphs, devotes 113 to geometry.

5) Colebrooke translates *vija* by 'analysis'.

of a right-angled triangle whose sides are respectively fifteen and twenty.[1])

"Here" he says "the hypotenuse (Fig. 1) is put x . . . the side and upright in each of the triangles situated on either side of the perpendicular let fall in the proposed triangle are similar to the former. Hence the proportion: if when x is hypotenuse this be the side then the hypotenuse being 15 what is (the side). Thus the side is found and is the segment contiguous to the original side $225/x$. Again etc. . . . the upright is $400/x$. The sum of the segments is equal to the hypotenuse and from so framing the equation the value of the hypotenuse is deduced, the square-root of the sum of the squares of the side and upright, viz. 25 etc.[2])."

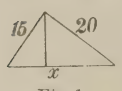


Fig. 1.

Now Ranganātha (17th century) censures the *Sringāra-tilaka* for denying any proof of the rule besides experience. This is significant and it is not an isolated example of denying the possibility of proof of a well known theorem. It is also worthy of note that Bhāskara's demonstration is based upon proportion but no strict theory of geometrical proportion is propounded by him or by any other Hindu mathematician. They were, however, fairly well acquainted with its application to simple cases and most of them illustrate it by a section on the 'shadow of a gnomon'. Bhaskara says in this section[3]): "In like manner is all this, which has been before declared, pervaded by the rule of three *(trairāsika)* with its variations as is the universe by the Deity." Here and elsewhere he looks upon proportion from the arithmetical standpoint and it is doubtful whether he had any conception regarding its application to incommensurable quantities.

Another case in which a lack of acquaintance with a particular proof is intimated where we might have expected a fairly complete knowledge of the subject occurs in the commentary of Gangādhara (c. 1420 A. D.). Referring to the rule[4]) for finding the sum $\underline{s}$ of the first n natural numbers and 'the sum of the sums', i. e. $\Sigma_n^1 s$ he gives a demonstration of the first but says "the only proof of the rule for the sum of sums is acceptation". This implies that he knew of no proof for the formula $\Sigma_n^1 s = (n+2)\frac{s}{3} = \frac{1}{2}(\Sigma n^2 + \Sigma n)$ although Āryabhaṭa, Brahmagupta, Srīdhara, Mahāvīra, Bhāskara and others all dealt with the subject pretty fully and most of them give formulae for Σn^2 and even Σn^3.

1) *Vija ganita* § 146. Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 1^3, p. 655) quotes this but in a form which imputes to Bhaskara a greater generality than is due.

2) See Euclid X, 33 Lemma. 3) *Lilāvati* § 245. 4) *Lilāvati* § 115.

There is another demonstration by Bhāskara[1]) that also gives some hint of the mathematical attitude of the Hindus. The problem is to find a diagonal of a quadrilateral when the four sides and the other diagonal are given. He states a correct rule to the effect (Fig. 2) that $BD^2 = (BE + FD)^2 + FE^2$ and illustrates it by an example where $AB = 68$, $BC = 75$, $CD = 40$, $DA = 51$, $AC = 77$. He states, without showing any detailed working that $FD = 24$, $BE = 60$, $CF = 32$, $CE = 45$ and therefore $FE = 13$ and finally that $BD = \sqrt{84^2 + 13^2} = \sqrt{7225} = 85$.

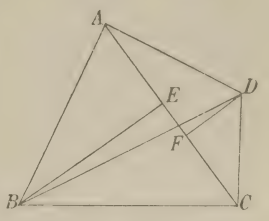


Fig. 2.

A detailed examination of this example shows that Bhāskara worked by steps, preserving only the results, as described above, and that the rule was intended to be only arithmetical in its application. It has little or no theoretical interest and it is doubtful whether Bhāskara could have expressed the result in terms of the data. It will be noticed that Bhāskara's example is a cyclic quadrilateral and could be solved in a much simpler manner and that one term of the data is redundant. Brahmagupta had already dealt with cyclic quadrilaterals fairly completely but Bhāskara inveighs against him for giving rules that do not apply generally. Not only did Bhāskara not understand that Brahmagupta's rules applied only to cyclic quadrilaterals but, apparently, he did not know that the examples he himself used were cyclic and particular cases too. He actually quotes[2]) one of Brahmagupta's rules but says "the objection to this mode of finding the diagonals is its operoseness as I shall show by proposing a shorter method . . . why an operose method was practised by former writers we know not." The shorter method he proposes is to build up a quadrilaterial by two pairs of similar right-angled triangles and then to find the diagonals! This is based upon a rule of Brahmagupta's (§ 38) and produces only cyclic quadrilaterals with diagonals at right angles! The aim of these rules is to construct a *rational*-cyclic-quadrilaterial. It is doubtful whether Brahmagupta understood the idea and it is certain that Bhāskara did not.

Sūryadasa (16th century A. D.) gives many 'proofs' but some of them appear to be merely examples of 'fudging' and it is a wonder that they have been perpetuated. However, this occurrence of faulty rules, demonstrations, etc. is one of the most interesting features in the history of Hindu mathematics and indicates, to some extent, that our material is genuine.

1) *Lilāvati* §§ 181—182. 2) *Lilāvati* § 190.

Here is Sūryadasa's 'demonstration' regarding the pentagon[1]): — "Draw a line between the extremeties of two sides at pleasure and two figures are thus formed one of which is a trapezium and the other a triangle and the line drawn is common to both. *Assume that chord arbitrarily.* Its arrow, found as directed, will be the perpendicular. Thus in the same triangle two rectangular triangles are formed in which half the base is the side, the perpendicular is the upright and the square-root of the sum of the squares is the hypotenuse and is the side of the pentagon."

Again regarding the area of the triangle he states[2]) that

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{p^2 b^2}{4}$$

where p is the perpendicular on the base b and says "This is a square quantity, for a square (p^2) multiplied by a square $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ gives a square. The square-root being extracted the product of the perpendicular by half the base is the result, and that is the area of the triangle. Therefore the *true area* is thus found. In a quadrilateral the product of the multiplication does not give a square quantity but an *irrational* one. Its approximate root is the area of the figure, *not, however, the true one.*"

Ganeśa, who flourished (c. 1545) a little later than Sūryadasa is on the whole much more dependable although, like his predecessors, he is weak with respect to fundamentals. To find the volume of a sphere he proceeds as follows[3]): "Suppose the sphere divided into as many little pyramids, or long needles with an acute tip and *square base,* as is the number by which the surface is measured, and in length equal to half the diameter of the sphere: *the base of each pyramid is a unit of the scale by which the dimensions of the surface are reckoned,* and the altitude being a semi-diameter, one-third of the product of their multiplication is the content . . . therefore a sixth part of the diameter is the content of one such pyramidical portion; and that multiplied by the surface gives the solid content of the sphere."

V. Examples.

There is one notable feature with regard to nearly all examples given to illustrate inverse operations. In these cases the examples that have been utilised for the direct operation are again employed for the inverse. This is the general practice as will be seen by referring to the examples

1) Colebrooke, l. c. p. 93. 2) Colebrooke, l. c. p. 72.
3) Colebrooke, l. c. p. 89.

in division, square-root, cube-root, &c. given by Mahāvīra, Śridhara and Bhāskara. The first named goes to an extreme in the following: "What is the cube-root of the numbers 1 to 9 all cubed?"

This practice may simply indicate a desire to show that the processes in question are inverse processes but it is, very probably, an indication of the difficulties these inverse processes entailed in connection with a non-place-value arithmetical notation.

The practice of utilising known examples is also seen in their geometrical illustrations. The cyclic quadrilateral whose sides are 25, 39, 60, 52 is the stock example used by Chaturveda, Śrīdhara, Bhāskara, and Gaṇeśa and as a variation they give the same disguised with sides 125, 195, 300, 260. These quadrilaterals are, in their turn, built up of stock right-angled triangles. Chaturveda confined himself to the triangles 3, 4 5 and 5, 12, 13 but Bhāskara employed also the 8, 15, 17 and the 12 35, 37 triangles. All these were given in the *Śulvasūtras* but as pointed out elsewhere the Hindu mathematicians either ignored or were ignorant of these ancient rules.

Many of the examples given are inadequate and indeed in some cases show a lack of comprehension of the rules or theorems they pretend to illustrate. For example in connection with the rule for the area of a cyclic quadrilateral $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, Chaturveda gives an isosceles trapezium with sides 4, 13, 14, 13 and another with sides 25, 39, 25, 25 and his most general case is the stock quadrilateral 25, 52, 60, 39. Again to illustrate the rule $x = \sqrt{ac+bd}$ giving the diagonal of a cyclic quadrilateral with equal diagonals he gives a square, and so on. The classic example, however, of this lack of comprehension of the rules dealt with is where Bhāskara condemns Brahmagupta and others for their treatment of the cyclic-quadrilateral. "How can a person", he says[1]), "neither specifying one of the perpendiculars, nor either of the "diagonals, ask the rest? Such a questioner is a blundering devil and "still more so is he who answers the question".

We find many similar instances of misunderstanding. Even Brahmagupta sometimes gives inappropriate illustrations and also criticises his predecessors unjustly. To find integral solutions of the equation $axy - bx - cy = d$ the formula $x = \frac{bc+ad}{a^2n} + \frac{c}{a}$, $y = \frac{an+b}{a}$ is indicated. Brahmagupta solves the particular case $xy - 3x - 4y = 90$ by putting $n = 17$ and obtains $x = 10$, $y = 20$. But he thinks this rather stupid and proceeds: "With the exception of a selected unknown put arbitrary values for the rest .... Thus the solution is effected without an equation of

1) *Līlāvati* § 171.

the second degree. What occasion is there for it?" In the equation $xy - 3x - 4y = 90$ he thereupon gives y the arbitrary value 20 and obtains a solution. One wonders whether he tried any other arbitrary values, e. g. $y = 3$, &c.!

That the illustrations often lack that generality that we consider essential is exemplified in numerous cases and there is some indication that the Hindu mathematicians even avoided perfectly general illustrations. Possibly one cause of this may have been the prevalent objection against surd and even fractional results and another cause may have been the desire for easy methods of verification.

VI. Conclusion.

The remarks of the Hindu mathematicians themselves on method and matters relating thereto are rather meagre but still of considerable interest. "It is apparent to men of clear understanding", says Bhāskara[1]), "that the rule of three terms constitutes arithmetic and sagacity algebra." Again[2]) "If they are to be discovered by the mere exercise of sagacity what occasion is there for algebra?" To this doubt the *text* replies — "because sagacity alone is the chief elemental analysis but colours (? symbols) are its associates and therefore ancient teachers[3]), enlightening mathematics as the sun irradiates the lotus, have largely displayed their own sagacity, associating with it various symbols and that has now obtained the name algebra." And again it is said[4]) "The conditions, a clear intellect, assumption[5]) of unknown quantities, equation and the rule of three are means of operation in all analysis." After an example[6]), quoted from an 'ancient author', which Bhāskara treats in a manner that would not satisfy the modern schoolmaster he excuses his weak treatment of the problem by the following remark: "In the like suppositions, when the operation, owing to restriction, disappoints, the answer must by the intelligent be elicited by the exercise of ingenuity"!

The Hindus have never been good critics of their own methods and we must not neglect the opinions of contemporaneous foreigners when they are available. Fortunately we can cite the views of Alberuni, a fair mathematician and an honest critic, who visited India between the periods of Brahmagupta and Bhāskara. The views of Alberuni are not particularly favourable to the Hindus as regards their mathematical powers but

1) *Vija gaṇita* § 223. 2) ib. § 174.

3) Obviously these 'ancient teachers' were not Indians.

4) *Vija gaṇita* § 170.

5) The method of 'assumption' is dealt with in a note on the *Regula duorum falsorum.* 6) *Vija gaṇita* § 170.

this does not detract, as some Hindus seem to think it does, from the value of his criticism. He writes[1]) as follows: "You mostly find that even the so-called scientific theorems of the Hindus are in a state of utter confusion, devoid of any logical order .... since they cannot raise themselves to the methods of strictly scientific deduction." And again he says: "I began to show them the elements on which this science rests, to point out to them some rules of logical deduction and the scientific method of all mathematics and then they flocked together around me from all parts."

The illustrations we have given tend to confirm ALBERUNI's view and we conclude that the Hindu mathematicians had no interest in what is termed mathematical method. They gave no definitions; preserved little logical order; they did not care whether the rules they used were properly established or not and were generally indifferent to fundamental principles. They never exalted mathematics as a subject of study and indeed their attitude to learning generally may be described as decidedly unmathematical.

1) ALBERUNI's *India* ed. E. C. SACHAU **1**, p. 25.

On Michel Rolle's book "Methode pour résoudre les egalitez" and the history of "Rolle's theorem".

By FLORIAN CAJORI in Colorado Springs.

The main purpose of this article[1]) is to give an account of the historically important parts in ROLLE's *Démonstration d'une Methode pour résoudre les Egalitez de tous les degrez; suivie de deux autres Méthodes, dont la première donne les moyens de resoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie, et la seconde, pour resoudre plusieurs questions de DIOPHANTE qui n'ont pas encore esté resoluës.* A Paris, Chez Jean Cusson, ruë Saint Jacques, à l'Image de Saint Jean Baptiste. M. DC. XCI. Avec Permission.

The title of this rare book is given by MONTUCLA[2]), but inaccurately, and he gives no information regarding the contents of the book. MARIE[3]) makes no mention of it, while CANTOR[4]) and ENESTRÖM[5]) refer to it, without having had the opportunity to examine it; nor do J. BOYER and S. RINDI, who prepared a joint note on "ROLLE's theorem"[6]), even mention the book.

The book can be found in the "Bibliothèque Nationale", the "Bibliothèque de L'Arsenal" and the "Bibliothèque de l'Institut de France", in Paris. The present writer has used a transcription made for him from the copy in the "Bibliothèque Nationale". ROLLE's *Démonstration* is a duodecimo publication of 128 pages, devoted to the three subjects indicated in the title page.

I.

The first subject is *Démonstration d'une methode pour résoudre les egalitez de tous les degrez.* This part gives a demonstration of ROLLE's famous "method

1) In the preparation of this article I gratefully acknowledge the help I have received from Mr. ALBERT R. ELLINGWOOD, a Rhodes scholar at Oxford, who has consulted for me publications in the Bodleian Library and the British Museum.

2) *Histoire des mathématiques* **2**, Paris, An VII, p. 167.

3) *Histoire des sciences mathématiques et physiques* **7**, 1885, page 69.

4) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3^2, 1901, p. 123.

5) Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, p. 302.

6) L'Intermédiaire des mathématiciens **2**, 1895, p. 96—98.

of cascades" in the theory of equations, which was first published without demonstration in Rolle's *Traité d'algebre*. It is of special interest to us as containing the theorem which now goes by the name of "Rolle's theorem" — the theorem according to which $f'(x) = 0$ has at least one real root lying between two successive real roots of $f(x) = 0$. In recent time a few writers have expressed doubts as to whether this theorem is really due to Rolle. Thus, A. Loewy[1]) calls it the „sogenannten Rolleschen Satz", as does also A. Pringsheim[2]), while A. v. Braunmühl[3]) said right out that the theorem is wrongly attributed to Rolle. Braunmühl based his assertion upon the fact that Rolle's *Algebre* (1690) does not contain the theorem, but contains merely what we recognize as an easy deduction from it, to the effect that between two successive real roots of $f'(x) = 0$ there cannot be more than one real root of $f(x) = 0$. For convenience of reference we shall call the latter theorem "Rolle's corollary", in distinction to "Rolle's theorem". It was G. Enestrom[4]) who made the conjecture that Rolle's book, the *Démonstration*, contained "Rolle's theorem"; our examination of the text shows that such is actually the case.

The reasons for the writing of the *Démonstration* are set forth in the Journal des sçavans[5]) as follows: "La metode des Cascades que Mr. Rolle a donnés dans son traité d'Algebre, a fait assez de bruit parmi les Mathematiciens, pour obliger son auteur à répondre aux principales objections qu'on y a faites. Elles se réduissent à deux. La premiere, que Mr. Rolle n'ayant point donné de démonstration, on est toujours en droit de douter de l'infallibilité de sa metode. La seconde, qu'elle engage à un calcul plus long que l'ancienne qui se fait par extraction. Mr. Rolle répond d'abord à cette derniere objection, que si l'on convient que la metode des cascades est seule suffisante pour extraire toutes les racines des toutes les égalitez determinées, quelque nombre de termes qu'elles ayent, et que la seconde ne suffit que pour les égalitez de deux termes seulement, et ne découvre qu'une seule racine, on ne doit pas trouver étrange que la metode des cascades oblige à un plus grand calcul, puis que son objet est beaucoup plus vaste."

We shall outline Rolle's demonstration of his theory of cascades and shall use his own words whenever his statements are sufficiently compact for quotation. Finally we shall add certain memoranda bearing on the later history of "Rolle's theorem".

---

1) Ostwald's Klassiker Nr. **127**, p. 251.
2) Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 454.
3) Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p. 399.
4) Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, p. 302.
5) Journal des sçavans, Mars 3, 1692, p. 77.

In the *Démonstration* ROLLE assumes that the reader is familiar with the contents of his *Algebre*. From the latter work we quote ROLLE's conception of roots of equations. "On suppose aussi que dans chaque égalité il y a autant de racines que de dimensions, et s'il y en a moins, celles qui manquent s'appelleront *Racines défaillantes*."[1]) Thus, complex roots, as well as all but one root of each multiple root, fall under the head of "racines défaillantes". The limits of a root ROLLE calls its "hypotheses". "Si l'on substituë deux nombres au lieu de l'inconnuë, chacun separément, et si l'un de ces nombres donne un resultat positif, et l'autre un resultat negatif, il y a toûjours une racine qui surpasse le plus petit des nombres, et qui est surpassé par le plus grand. Ces deux nombres s'appelleront *Hypotheses*".[2]) His distinction between multiple roots and complex roots is brought out in the following sentences: "S'il arrive que les hypotheses donnent θ au lieu de donner + ou —, alors chacune de ces hypotheses sera une des racines de la cascade où se fait la substitution, et il faudra compter dans cette cascade une racine défaillante de la premiere espece, pour chacune de ces hypotheses qui produiront cet effet."[3]) "Si la substitution des hypotheses ne donne ny θ, ny le + ou le — que l'on demande, . . . alors on comptera deux racines défaillantes. . . . Lorsque les racines manquent de cette maniere, elles s'appelleront *Défaillantes de la seconde espece*."[4]) The roots which are not "racines défaillantes" are called "racines effectives".[5]) Notice that ROLLE's θ stands for 0.[6])

Before applying to an equation his method of cascades ROLLE effects a tranformation of equations, a "preparation des égalitez"[7]), so that the coefficient of the highest power becomes unity and all the coefficients become integral numbers and with alternately plus and minus signs. To render all these signs + and — he takes the largest negative coefficient $-g$, divides g by the coefficient of the highest power of the unknown, then adds 1 to the quotient and enough more to get a positive integer h This is an upper limit for all the real roots. He then puts $z = h - x$ and obtains the equation whose signs alternate. That this process always actually yields the desired result is not proved by ROLLE either in his *Algebre* or in his *Démonstration*. After an equation has been subjected to the above transformation it has all its real roots + and is called "preparée".

1) *Algebre*, p. 124. 2) *Algebre*, p. 103. 3) *Algebre*, p. 129.
4) *Algebre*, p. 130, 131. 5) *Algebre*, p. 124.
6) On this strange use of *theta* (θ) for our 0, see a note by G. ENESTRÖM in L'intermédiaire des mathématiciens **2**, 1895, p. 283.
7) *Algebre*, p. 118.

Proceeding now to Rolle's book, the *Démonstration*, published the year after the appearance of his *Algebre*, we outline his proof of his method of cascades. It will be interesting to observe that the argument is strictly algebraic. It was conjectured by H. G. Zeuthen that Rolle's proof was geometric[1]), but as a matter of fact it shuns geometry. Klein says, "Er ist einer von den wenigen alten Mathematikern, die sich nicht mit der Anschaulichkeit der Theoreme genügen ließen, sondern streng logische Definitionen und Beweise verlangten."[2]) Rolle's emphasis upon rigor is also referred to in a notice of one of Rolle's articles which appeared in 1708[3]) as follows: "On ne s'apperçoit que trop souvent en fait de Mathematique, que ce qui n'est pas démontré à toute rigueur, n'est point du tout prouvé, et qu'il n'y a aucune certitude, si elle n'est entiere." Rolle distributes the proof of his method of cascades over 15 articles and 22 corollaries. Assuming, to begin with, that all roots are "effectives, differentes, et positives", he reaches results which he uses later "pour faire des Démonstrations qui conviennent à toutes les formations d'égalitez, et à toutes leurs racines."[4])

After explaining the rule of signs in multiplication and cognate subjects, he shows (in Art. VI) that in an equation with the roots 3, 7, 12, 20 etc. and the factors $z-3$, $z-7$, $z-12$, $z-20$, etc., if $z<3$, all factors are $-$; if $3<z<7$, all factors are $-$, except one factor; if $7<z<12$, all factors are $-$, except two; and so on. Giving to z successively the values here indicated, the resulting successive products of all the factors have signs alternately $+$ and $-$, or $-$ and $+$. "Il est encore évident que si toutes les hypoteses, excepté la premiere et la derniere, ne sont pas moyennes entre les racines, comme on vient de le dire, l'entresuite reguliere des signes sera rompuë."[5]) "Il est clair aussi que les racines sont des nombres moyens entre les hypoteses, et par consequent les racines estant substituées dans l'égalité qui renferme les hypoteses, leur substitution doit donner des resultats alternativement positifs et negatifs, ou negatifs et positifs. En voicy un exemple.

$$y-6\cdot y-21\cdot y-30\cdot \text{Rac. de l'ég.}$$
$$y-\theta\cdot y-12\cdot y-26\cdot \text{Rac. de la Cascade."}[6])$$

He points out that the roots 6, 21, 30 of the given equation are hypoteses of the roots of the given cascade, yielding successively products

1) *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, Deutsche Ausg. von R. Meyer, Leipzig 1903, p. 329.

2) F. Klein, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig 1902, p. 114.

3) Histoire de l'academie roy. d. sciences de Paris, année 1708, p. 71.

4) *Démonstration*, Art. I. 5) l. c., Art. VI, Cor. II. 6) l. c., Art. VI, Cor. III.

whose signs are alternating. "Ainsi les racines sont hypoteses des hypotheses mêmes."[1]) This last quotation and the one which follows are the first references to what we now call "ROLLE's theorem", restricted as yet to the case of equations all of whose roots are real and positive. "C'est pourquoy on pourra conclure que la Cascade immediate renferme les hypoteses des racines de l'égalité dont elle est Cascade; pourveu que l'on ait prouvé auparavant que ces racines étant substituées dans cette Cascade, donnent des resultats alternativement positifs et negatifs, ou negatifs et positifs."[2]) He points out next that between every two successive distinct roots one has the choice of an infinite number of hypoteses, "qui donneront l'entresuite reguliere des signes, lorsque cette regularité est possible; Mais comme elle n'est pas toujours possible, il faut que les hypoteses que donne la Methode, ayant encore une détermination par laquelle on puisse conclure les impossibilitez."[3]) This reference to equations whose roots are not all "effectives, differentes, et positives" is followed by the passage: "Si l'on prouve que la Methode donne necessairement les hypoteses de toutes les racines; il s'ensuit qu'il y a des racines défaillantes, lorsqu'elle ne donne point ces hypoteses. Mais pour établir ces veritez, il faut encore d'autres Principes."[4])

He gives next the following definition: "Si je dis qu'une égalité est multipliée par une progression, il faut entendre que le premier terme de l'égalité est multiplié par le premier terme de la progression; Que le second terme de l'égalité est multiplié par le second terme de la progression, et ainsi de suite. Et la somme de ces produites estant supposée égale à θ, on dira que cette égalité est produite par une progression."[5])

Nowhere in the *Démonstration* does ROLLE give a formal definition of a "Cascade". But it is repeatedly implied in what he says that, if in an equation $f(x) = 0$, $f(x)$ is "multiplied by a progression", the result when equated to zero, is a cascade, namely the "cascade immédiate". According to this, the general expression for the proximate cascade may be of the same degree as the equation from which it has been derived. "Si l'on ne prend pas θ pour un des termes de la progression, et si ce θ n'est pas placé sous le dernier terme, ou sous le premier terme de l'égalité, la Cascade immediate seroit d'un degré aussi élevé que l'égalité même: ainsi la Methode supposeroit ce qui est en question. Mais prenant θ pour une des extrémités de la progression, et marquant d'ailleurs cette progression en termes generaux, la lettre qui sert à cette expression generale se trouve au premier degré seulement

1) *Démonstration,* Art. VI, Cor. III. 2) l. c., Art. VI, Cor. IV.
3) l. c., Art. VI, Cor. V. 4) l. c., Art. VI, Cor. VI. 5) l. c., Art. VII.

dans chaque terme de la Cascade, et aprés l'effacement ordinaire elle s'evanoüit. D'ou il suit que cette progression ne fait point d'autre effet sur les hypoteses que celle-cy, $\theta \cdot 1 \cdot 2$ etc."[1]) In Art. XIV, Rolle "multiplies $z^2 - pz + q = 0$ by the progression $4 \cdot 1 \cdot -2$" and obtains a "cascade" of the second degree, but this and other examples are given merely to show the superiority in practice of "multiplying" an equation $a + bz + cz^2 + \cdots = 0$ "by the arithmetical progression 0, 1, 2, 3, . . ." and then dividing the result by z. The advantage of this last process is that the proximate cascade is of a degree one lower than that of the equation from which it is derived. This process yields the cascades which he uses in his *Algebre,* and upon which the proof of his method of cascades really rests. In his *Algebre* he refers to several processes by which his cascades may be derived[2]), but the rule he actually uses is as follows: "On multipliera tous les termes de l'égalité chacun par son propre exposant, on divisera la somme de tous les produits par l'inconnuë, et l'on supposera que le quotient est égal à θ."[3])

In Art. VIII, Rolle "multiplies" the product of $z - a$ and $z - b$, namely $ab - (a + b)\, z + z^2$, "by the progression y, $y + v$, $y + 2v$", and shows that the result, $aby - (ay + by + av + bv)z + (y + 2v)z^2$, contains the factor $b - a$, when $z = b$. More generally[4]), $b - a$ is still a factor, if instead of $ab - (a + b)\, z + z^2$, we take this trinomial multiplied by mz^n.

If the regular product (arranged according to ascending powers of z) of the trinomial $ab - (a + b)\, z + z^2$ and the polynomial $f + gz + hz^2 + vz^3 + \ldots$ be "multiplied by the progression 0, 1, 2, 3, . . .", the result is the same as if the partial product $\{ab - (a + b)\, z + z^2\}f$ had been "multiplied by the progression 0, 1, 2"; the partial product $\{ab - (a + b)z + z^2\}gz$ had been "multiplied by the progression 1, 2, 3"; and so on. When $z = b$, the expression obtained, upon "multiplying by each of these progressions" has $b - a$ as a factor.[5])

If $f + gz + hz^2 + rz^3 + \cdots = (z - c)\,(z - d)\,(z - e)\cdots$, then what has been shown for $z = b$, with respect to a, holds for any letter (here tacitly assumed by Rolle to be positive) with respect to any of the remaining such letters. Hence the result of "multiplying by the progression 0, 1, 2, 3, . . ." is an expression having the factors $a - b$, $a - c$, $a - d$, etc., when $z = a$.[6])

Accordingly, if the roots of the given equation (are positive and) satisfy the relations $a > b > c > \ldots$ etc., then the left member of the

1) *Démonstration,* Art. XII. 2) *Algebre,* p. 126. 3) *Algebre,* p. 125.
4) *Démonstration,* Art. VIII, Cor. 5) l. c., Art. IX and its Cor. I and II.
6) l. c., Art. IX, Cor. IV.

proximate cascade is plus when $z = a$, minus, when $z = b$, and so on. In other words, the roots of the given equation are hypoteses of the roots of the proximate cascade. This is "ROLLE's theorem", proved here for equations whose roots are all positive; "ses racines sont les hypoteses des racines de la Cascade immédiate."[1])

From this it follows at once that the roots of the proximate cascade are hypoteses of the positive roots of the given equation. This theorem is the foundation of ROLLE's method of cascades. "La progression donnant une Cascade divisible par l'inconnuë, on voit de-là que θ est une des racines; et il est clair d'ailleurs que θ est la petite hypotese, selon nos suppositions."[2])

Then follows the important statement: "Puisque chaque racine doit avoir deux hypoteses, et que chaque hypotese doit servir à deux racines, il est facile de sçavoir combien il y a de racines défaillantes dans chaque égalité proposée. Car l'entresuite des signes que l'on attend des hypoteses ne sçauroit estre rompuë, si les racines sont toujours effectives, et differentes; et les hypotheses ne peurent la rompre qu'en donnant θ, ou un signe contraire à celuy que l'on demanderoit pour la conserver. Il est encore évident que les racines défaillantes d'une Cascade, doivent servir à marquer les défaillantes de l'égalité: Mais comme ce Corrollaire est important, il est à propos d'en donner icy une explication plus abondante."[3])

In Art. X, ROLLE proves that in a (complete) equation with alternating signs all the real roots are positive.

Then follows in Art. XI, the important generalization to complex roots: "Si les racines sont en partie effectives, et en partie défaillantes de la seconde espece; ces défaillances n'empêchent point les hypoteses de donner des signes convenables aux effectives. Car l'égalité proposée peut toûjours être conçuë comme si elle estoit formée par la multiplication de deux égalités plus simples, l'une toute effective, et l'autre toute défaillante; et par l'article IX la Cascade renfermera les hypoteses qui conviennent aux racines effectives. Et on peut voir comment les défaillantes ne trouvent point l'entresuite qui convient aux effectives . . ." The conclusions in this passage follow from the consideration that the polynomial $f + gz + hz^2 + \cdots$, given in Art. IX, may have complex roots. This passage also carries with it the validity of "ROLLE's theorem" for equations having some of its roots complex.

By a *reductio ad absurdum* in the application of "ROLLE's theorem" it is shown in Art. XII, that an equation has at least as many complex roots as has its proximate cascade.

---

1) *Démonstration,* Art. IX, Cor. VI. 2) l. c., Art. IX, Cor. VII.
3) l. c., Art. IX, Cor. XI.

When a real root of a proximate cascade is substituted into the left member of the given equation, "il arrivera toûjours que ces resultats seront les plus grands, ou les plus petits qu'on puisse trouver dans chaque égalité, selon que l'entresuite reguliere des signes est rompuë ou conservée; et on peut en faire voir la démonstration par des égalitez fort simples. Si l'on prend pour premier exemple $zz - 6z + 17 = 0$, dont l'hypotese donné $+ 8$; et si l'on pretend qu'un autre nombre puisse donner un plus petit resultat comme le resultat $+ 2$. Qu'on ôte du dernier terme un nombre tel qu'on voudra, pourveu qu'il soit moyen entre les deux resultats; et il arrivera qu'en substituant l'hypotese veritable et l'hypotese pretenduë dans l'égalité ainsi changée, l'une doit rompre l'entresuite, et l'autre doit la rétablir: d'où il sera aisé de conclure une absurdité, et faire voir que cette absurdité n'a esté concluë qu'en supposant qu'il pouvoit y avoir un résultat moindre que $+ 8$."[1]) Observe that in this proof of the theorem on maxima and minima no geometrical ideas are brought into play. The quotation shows also that at times Rolle's writings are obscure. He is fond of new terminologies and peculiar modes of expression.

That the method of cascades continued to engage the attention of Rolle even after the publication of the *Démonstration* is evident from the *Extrait d'une lettre, sur la theorie des cascades algébriques* which appeared in 1697.[2]) It says there: "Les trois manières dont Mr. Rolle s'est servi dans son traité d'Algebre (pages 126 et 127) pour la generation des Cascades, lui ont fourni trois démonstrations qui suffiroient chacune séparément, pour s'assûrer de la méthode qu'il a donnée sur ce sujet; et comme cette méthode est fort utile pour la résolution des égalités, c'est un avantage d'en avoir des preuves qui s'accommodent aux différentes voyes où les Algébristes sont entrés." Then follows a rough outline of the argument.

Before leaving the method of cascades we refer briefly to an alleged attack upon its validity. Saverien says of the method[3]): "Quel dommage qu'elle soit vicieuse! Selon M. Bernoulli, non-seulement on n'approche point de la racine, mais encore il arrive souvent qu'après quelques opérations on s'en éloigne; et cela, parce qu'on est obligé de négliger certaines quantités; d'où naît une erreur considérable. Bernoulli Op. T. III, p. 533." Upon consulting this reference to John Bernoulli's works one finds that Bernoulli does not even mention the method of cascades, but attacks a memoir on the approximation to the roots of numbers published by Rolle[4]) in 1692.

1) *Démonstration,* Art. XIII. 2) Journal des sçavans, 29 Avril 1697, p. 168.
3) *Dictionnaire universel de mathématique,* Paris 1753, Art. "Cascades".
4) Mémoires de l'acad. roy. d. scienc. de Paris, T. 10, p. 19, 38. Rolle's and Lagny's approximations to the roots of numbers are referred to in the correspondence between John Bernoulli and Leibniz 1696; see *Got. Gul. Leibnitii et*

II.

In view of the importance attached to "ROLLE's theorem" in modern analysis we add a few notes relating to its later history. As we have seen, ROLLE gave the theorem as applicable to equations with or without complex roots, but he laid no special stress upon it. He established it incidentally in his demonstration of the method of cascades. ENESTRÖM has pointed out that CHARLES REYNEAU stated the theorem in connection with equations free from complex roots, in his *Analyse demontrée.*[1]) The theorem is given again in unaltered form in the second edition of REYNEAU's work, which appeared in 1736. Statements which amount to "ROLLE's theorem" are made by L. EULER.[2]) The theorem is given as applicable to equations having complex roots by J. R. MOURRAILLE.[3]) Under the restriction to equations with only real roots it occurs again in ODOARDO GHERLI.[4]) In the *Encyclopédie méthodique*[5]), "ROLLE's theorem" is given in connection with a cubic whose roots are all real. The theorem appears somewhat more prominently with LAGRANGE.[6]) It is also given by PAOLO RUFFINI.[7]) But it must be emphasized that none of the eighteenth century writers whom we have cited calls "ROLLE's theorem" by the name of its discoverer or directly attributes it to ROLLE, or lays stress upon the theorem, or even allows it to stand out conspicuously as a "theorem"; it is stated only in passing, usually as leading up to what we call "ROLLE's corollary". In the eighteenth century this corollary received greater attention than "ROLLE's theorem" and was explained by some of the authors who do not give "ROLLE's theorem" at all.

This attitude continues with many writers of the first half of the nineteenth century. We have seen "ROLLE's theorem" stated but not attributed to ROLLE, nor assigned a conspicuous place, by the following authors: V. BRUNACCI[8]), E. H. DIRKSEN[9]), J. A. GRUNERT[10]), R. STEVENSON[11]), R. MURPHY[12]), J. R. YOUNG.[13])

JOHAN. BERNOULLII Commercium philosophicum et mathematicum **1**, Lausannae et Genevae 1745, p. 232.

1) *L'analyse demontrée* **1**, Paris 1708, p. 290.

2) *Institutiones calculi differentiales,* 1755, caput XII, § 295, 297, p. 658 and 659.

3) *Traité de la résolution des équations en général,* Marseille et Paris 1768, p. 64.

4) *Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure* **2**, Modena 1771, p. 151.

5) *Encyclopédie méthodique. Mathématiques* **1**, Paris 1784, p. 311, article "Cascade".

6) *Résolution des équations numériques de tous les degrés,* Paris 1798, Note 8.

7) *Teoria generale delle equazioni*, Bologna 1799, p. 66, 67.

8) *Corso di matematica sublime* **2**, Firenze 1806, p. 149.

9) *Die Trennung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen*, Berlin 1837, p. 10.

10) *Supplemente zu KLÜGEL'S Wörterbuch* **2**, Leipzig 1836, Art. "Gleichung", p. 468.

11) *Algebraic equations,* Cambridge 1835, p. 55.

12) *Algebraical equations*, London 1839, p. 28.

13) *Algebraical equations*, London 1843, p. 113.

In 1834 M. W. Drobisch[1]) gives both "Rolle's theorem" and "Rolle's corollary", and both are attributed to Rolle, on the strength of Note 8 in Lagrange's *Résolution*. But Note 8 contains no such acknowledgment. Of course, Lagrange attributes the method of cascades to Rolle; in the course of Lagrange's discussion of it, there occur statements of "Rolle's theorem", but he does not attribute the theorem to Rolle. Lagrange nowhere mentions Rolle's *Démonstration*. In 1860 Giusto Bellavitis, a man unusually well versed in the literature of the theory of equations, ascribes "Rolle's theorem" to Rolle[2]) and calls it the "teorema del Rolle". In 1868 the theorem is given in the German edition of Serret's algebra[3]) under the name of "Rollerscher Satz".[4]) Since then the theorem came to be generally ascribed to Rolle and to be called by his name.

The earliest mathematical article given in the Royal society *Catalogue of scientific papers*, 1800—1900, Subject index, Vol. I, (Mathematics), which embodies in its title the name "Rolle's theorem", is an article published in 1876 by Paul Mansion[5]), in which Mansion points out that "from a geometrical point of view, the theorem of Rolle is completely equivalent to Lagrange's and Cauchy's theorems".

During the second half of the nineteenth century we see the strange spectacle of "Rolle's theorem", which had been in the theory of equations a star of the seventh or eighth magnitude, become in the wider region of mathematical analysis a star of the first magnitude. "Rolle's theorem" is used now in proving the theorem of mean value, from which radiate some of the wonderful illuminations which make the modern development of the calculus so admirably rigorous.

At first the theorem of mean value and "Rolle's theorem" existed apart. The former was given by Lagrange in 1797 as a consequence of Taylor's theorem[6]) and called it a "théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et sa généralité." It was given by Ampère[7]) and then by Cauchy.[8])

1) *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen,* Leipzig 1834, p. 179.

2) *Appendice alle memorie sulla risoluzione numerica delle equazioni* in the Memorie dell' Istituto Veneto **9**, 1860, § 14, p. 187.

3) *J. A. Serret's Höhere Algebra,* deutsche Übers. v. Wertheim **1**, 1868, p. 216.

4) The first edition of Serret's *Cours d'algèbre supérieure,* Paris 1849, we have not had the opportunity to consult.

5) Messenger of mathem. 5_1, p. 34—35.

6) *Théorie des fonctions analytiques,* Paris 1797, p. 49; *Oeuvres* **9**, Paris 1881, p. 83.

7) Journal de l'école polytechnique, cahier **13**.

8) *Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal,* Paris 1823; *Oeuvres* 4_2, p. 46.

Perhaps the first author to bring together the theorem of mean value and "ROLLE's theorem" was OSSIAN BONNET whose derivation of the theorem of mean value from "ROLLE's theorem" is given by SERRET.[1]) SERRET does, however, not mention the name of ROLLE in this proof.[2])

According to a statement of HERMITE, the proof of TAYLOR's theorem by "ROLLE's theorem", as set forth for instance by A. PRINGSHEIM[3]), was first given in its essentials by HOMERSHAM-COX and ROUCHÉ.

A number of extensions of "ROLLE's theorem" have been suggested. The mean value theorem may be considered a generalization of it as is done by L. KIEPERT.[4]) J. F. MCCULLOCH[5]) reached a generalization of the theorem as usually stated by unwittingly returning to the very process originally explained by ROLLE. MCCULLOCH proves the theorem: "If the $n+1$ terms of any algebraic equation arranged in order of powers of x be multiplied respectively by any $n+1$ terms of any series in arithmetical progression, the resulting equation has an odd number of real roots between every two adjacent positive or negative real roots of the equation so operated upon." Extensions of "ROLLE's theorem" to the complex roots of the equations with real coefficients were made by several writers. The matter was really considered by C. F. GAUSS[6]) as early as 1816. Later E. N. LAGUERRE studied this subject.[7]) He says that his generalization achieves for the theorems of ROLLE and DESCARTES what CAUCHY's theorem on contours accomplished for the theorem of STURM. Still later this subject was treated by G. J. LEGEBEKE[8]) and F. J. VAN DEN BERG[9]), while F. DE BOER[10]) proceeds a step farther and considers equations with complex coefficients.

The proofs of "ROLLE's theorem" as given in some elementary texts of our time depend upon geometric intuition. The schools of WEIERSTRASS

1) J. A. SERRET, *Cours de calcul différentiel et intégral* **1**^{2}, 1868, p. 17.

2) In A. HARNACK's *Elemente der Diff. u. Integralr.,* Leipzig 1885, p. 66, the mean value theorem itself is called "das Theorem von ROLLE", a designation which cannot be justified on historical grounds.

3) A. PRINGSHEIM, Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, p. 454, 455; HERMITE, *Cours d'analyse* **1**, 1873, p. 49, 50.

4) *Grundrisse der Diff. u. Integralr.,* Hannover 1901, p. 154.

5) Annals of mathem. **4**, 1888, p. 5.

6) Gött. gel. Anzeigen 1816.

7) Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **78**, 1874, p. 278—280.

8) Nieuw archief voor wiskunde **8**, 1881, p. 75—80.

9) Nieuw archief voor wiskunde **9**, 1882, p. 1—14.

10) Versl. en Meded. d. Akad. van Wetensch. [Amsterdam] **19**, 1884, p. 207—240 and 384—416.

and Peano have considered minutely the various questions of continuity and differentiability of $f(x)$ and $f'(x)$.[1])

We return to the second part of Rolle's *Démonstration*, namely *Methode pour resoudre les égalitez par la geometrie*. This deals with the determination of the roots of equations by the intersections of circles and parabolas, and does not seem to need special mention here.

III.

The third part is entitled *Methode pour resoudre les principales questions de Diophante.*

This part supplies "un moyen pour connoître les nombres qui sont composez de deux quarrez", and contains results of historical interest. He calls a prime which is not the sum of two squares a "nombre exclusif". His "methode" consists of four tests as follows:

I. and II. An integer is (is not) the sum of two squares if, when divided by its largest square factor, the quotient does not contain (does contain) a nombre exclusif as a factor.

III. and IV. If the form of a fraction is altered so that its denominator is a perfect square, the fraction is (is not) the sum of two squares, if its numerator is (is not) the sum of two squares.

These tests are made to rest upon four propositions and corollaries, of which we mention the following:

"I. *Proposition.* La somme de deux quarrez étant multipliée ou divisée par un quarré, ou par la somme de deux quarrez; le produit et le quotient sont toûjours chacun la somme de deux quarrez en nombres entiers, ou en fractions."

"Pour la démonstration, il suffit de voir que $\frac{aa+bb}{cc+dd}$ est la somme de ces deux quarrez $\frac{aacc+2abcd+ddbb}{c^4+2ccdd+d^4}$, $\frac{aadd-2abcd+bbcc}{c^4+2ccdd+d^4}$."

Then follow three corollaries, as follows:

1. An integer which is not divisible by any nombre exclusif is the sum of two squares, both in integers and in fractions.

2. If the sum of two squares is multiplied by a number which is neither a square nor the sum of two squares, the product is not the sum of two squares.

---

1) See Paul du Bois-Reymond, Journal für Mathem. 79, 1875, p. 21; G. Peano, *Differentialr. u. Grundz. d. Integralr.*, deutsche Übers. v. G. Bohlmann u. A. Schepp, Leipzig, 1899; P. Mansion, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale*, Paris 1887, p. 79: *Encyklopädie d. mathem. Wiss.* 2 : 1, Leipzig 1899, p. 65 (II A 2).

3. A number is not the sum of two squares, if when divided by a square or a sum of two squares, the quotient is not a square nor the sum of two squares.

ROLLE travels here over much the same territory covered again later by EULER, particularly in his paper *De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum.*[1]) The following results of EULER of 1752 are included in those of ROLLE of 1691: If p is the sum of two squares, so are $2p$, n^2p, $2n^2p$; if p and q are each the sum of two squares, so is pq; if pq is the sum of two squares, and p is the sum of two squares and prime or the product of prime factors each itself the sum of two squares, then q is the sum of two squares.

"IV. *Proposition.* Si ayant divisé un nombre proposé par le plus grand des quarrez qui le mesurent, le quotient de cette division est mesuré par un nombre premier, et si ce nombre premier ne peut pas mesurer la somme de deux quarrez quelconques sans mesurer chacun de ces deux quarrez; le nombre proposé ne peut pas estre la somme de deux quarrez ni en nombres entiers, ni en fractions."

The part of this relating to fractions is proved by an absurdity resulting from the FERMATian method of indefinite descent from larger to smaller numbers.

With the view of introducing short cuts ROLLE establishes a fifth proposition:

"V. *Proposition.* Un quarré quelconque estant divisé par un nombre impair donné, trouver tous les nombres qui peuvent rester après la division."

"Ostez l'unité du nombre donné et prenez la moitié du reste. Prenez aussi le quarré de cette moitié avec tous les autres quarrez qui sont plus petits. Divisez tous ces quarrez chacun separément par le nombre donné, les restes de toutes ces divisions seront ceux qu'on s'est proposé de trouver."

After this theorem on residues he established special results, some of which are historically interesting: No number of the form $7a^2b$ is the sum of two squares, either in integers or in fractions; no integer which is not the sum of two integral squares can be the sum of two fractional squares; no number of the form $8c - 1$ can be expressed as the sum of three squares; no number of the form $4n + 3$ can be expressed as the sum of two squares.

This last theorem is of historical interest because, if FERMAT's restoration of a corrupted passage in DIOPHANTUS, Book V, Problem 12, is correct, then this theorem was known to DIOPHANTUS. EULER has been

1) Novi comm. acad. sc. Petrop. 4 (1752/53), 1758, p. 3—40; *Commentat. arithm.* 1, Petropoli 1849, p. 155—173.

credited with the earliest published proof of the theorem[1]); he proved first that no prime of the form $4n + 3$ can be the sum of two squares and from this deduced the general theorem; ROLLE proved the general theorem directly and made no mention of the special theorem. ROLLE did not proceed so far as to prove the theorem that all primes of the form $4n + 1$ can be expressed as the sum of two squares; it remained for EULER to prove this over half a century later.

But EULER's article[2]) giving the proof of this FERMATian theorem contains among others the following theorems which are included in ROLLE's research:

If a number is the sum of two squares, it is not divisible by a prime of the form $4n - 1$, unless each square is itself divisible by that prime.[3])

To[4]) find all the residues which may arise from dividing square numbers by any odd number p is equivalent to finding the residues of the square numbers from 1 up to $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

---

1) Novi comm. acad. sc. Petrop. **1** (1747/48), 1750, p. 20—48; *Commentat. arithm.* **1**, p. 53.

2) Novi comm. acad. sc. Petrop. **5** (1754/55), 1760, p. 3—13; *Commentat. arithm.* **1**, p. 210—215.

3) Novi comm. acad. sc. Petrop. **5** (1754/55), 1760, p. 42; *Commentat. arithm.* **1**, p. 227.

4) Novi comm. acad. sc. Petrop. **5** (1754/55), 1760, p. 20; *Commentat. arithm.* **1**, p. 218.

Note on William R. Hamilton's place in the history of abstract group theory.

By G. A Miller in Urbana.

On November 10th 1856 William R. Hamilton presented to the royal Irish academy a paper entitled *A new system of roots of unity*[1]), in which he considered the equations

$$1 = i^2 = k^3 = \lambda^r, \qquad ik = \lambda, \; r = 3, \; 4, \; 5.$$

He observed that these equations are sufficient to restrict the elements i, k, when they are combined as regards multiplication under the associative law in every possible manner, so that the total number of the distinct products may be interpreted on the regular polyhedrous. The case when $r = 5$ received especial attention, and this case is also considered very briefly in a note which appeared about a month later, December 1856, under the title: *Memorandum respecting a new system of roots of unity* in the London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine.

Hamilton called the groups generated by i and k under the given restrictions a "family of systems of noncommutative roots of unity, which are entirely distinct from the i, j, k of the quaternions, though having some general analogy thereto; and which admit, even more easily than the quaternion symbols do, of geometrical interpretation". He seems to have been especially interested in the case when $r = 5$ and he called the resulting group the "Icosian calculus", observing that every result of this long train of consistent calculations may be interpreted geometrically by means of either the regular icosahedron or the regular dodecahedron.

By making $r = 4$ he "obtains other symbolical results which are interpreted by the (regular) octohedron and the (regular) hexahedron", and by making $r = 3$ he obtains results which are "almost too simple to be interesting" and which have their corresponding geometrical interpretation in the theory of the regular tetrahedron.

These facts may suffice to make it evident that Hamilton at this early date was familiar with the properties of the groups of the regular

1) Proceedings of the royal Irish academy 6, 1853—7, p. 415.

solids, as generated by two operators or elements, and he proved that these groups may be completely defined by the orders of their two generating operators and the order of their product. His form of statement of these results coincides with that now employed with the exception of the use of certain terms. HAMILTON did not use the technical term group, and he evidently was in search for things lying beyond these groups, just as his main interest as regards quaternions was beyond the quaternion group.

Notwithstanding this fact, the great importance of the groups of the regular solids as defined abstractly and the discovery of the first example of a system of numbers whose units constitute a non-commutative group as regards multiplication should secure for HAMILTON an important place in the history of abstract groups. Hence it seems very appropriate that DEDEKIND[1]) named the non-abelian groups in which every subgroup is invariant *Hamiltonian* groups in view of the fact that the smallest and simplest of them is the group of order 8 which is known as the *quaternion*[2]) group on account of its intimate relation with the noted number creation by HAMILTON.

The commonly accepted date (1854) of the founding of the theory of abstract groups by CAYLEY is two years earlier than the given paper by HAMILTON on the groups of the regular polyhedrons, and it is eleven years later than the discovery of the quaternions. In fact, CAYLEY illustrated his first paper on abstract groups by means of the laws of combination of the quaternion imaginaries, and a few years later[3]) he explicitly called attention to the fact that the quaternion units constitute the group of order 8 now known as the quaternion group, when they are combined by multiplication.

From these facts it is clear that CAYLEY was assisted in his study of abstract groups by HAMILTON's earlier work and that the latter developed some very interesting and fundamental groups without receiving due credit by later writers. This lack of credit may be partly due to the fact that HAMILTON's paper on the groups of the regular solids does not appear in lists under his name in the London Royal society *Catalogue of scientific papers.* It may also be partly due to the fact that HAMILTON did not employ the technical terms of group theory, while CAYLEY, on the other hand, made use of these terms and hence his early papers are more directly accessible to workers in this field.

1) Mathem. Annalen **48**, 1897, p. 548.

2) See KEMPE, Transactions of the Royal society [London] **177**, 1886, p. 45.

3) The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine 18_4, 1859, p. 34.

Anton von Braunmühl.

Von HEINRICH WIELEITNER in Pirmasens.

ANTON VON BRAUNMÜHL entstammte einem alten bayrischen Geschlechte. Sein gleichnamiger Vater aber, ein vielversprechender Schüler des von König LUDWIG I. von Bayern so bevorzugten Architekten FRIEDRICH VON GÄRTNER, war von der russischen Krone nach Tiflis berufen worden, dort ein Thronfolgerpalais zu erbauen. So kam es, daß ANTON VON BRAUNMÜHL in der Hauptstadt Transkaukasiens, am 22. Dezember 1853 (neuen Stils), geboren wurde. Schon drei Jahre später riß ein plötzlicher Tod seinen Vater im 36. Lebensjahre mitten aus seiner Tätigkeit. Die Mutter kehrte mit dem Knaben nach München zurück, das letzterer nun nicht mehr verlassen sollte. Auch die Mutter besaß der schwächliche Knabe, der wegen fortwährender Krankheit die Volksschule nur ganz kurze Zeit besuchen konnte, nicht zu lange. Immerhin stand sie ihm noch auf der größeren Strecke des Gymnasialweges, den A. v. BRAUNMÜHL am K. Ludwigsgymnasium durchlief, zur Seite. Nach ihrem Tode, der etwa 10 Jahre nach dem ihres Gatten erfolgte, nahm ein Onkel, noch mehr als schon bis dahin, sich des jungen Mannes an, der im Jahre 1873 das Gymnasium mit sehr gutem Zeugnisse verließ.

Er immatrikulierte sich nun an der K. Universität München, hörte dort Mathematik, Physik und Astronomie bei G. BAUER, L. VON SEIDEL, PH. VON JOLLY, J. VON LAMONT und FR. NARR, Literaturgeschichte bei M. BERNAYS und Kulturgeschichte bei B. RIEHL. Gleichzeitig besuchte er als Hospitant, wie das in München bei Lehramtskandidaten auch heute noch üblich ist, mathematisch-physikalische Vorlesungen an der K. Technischen Hochschule (damals noch „Polytechnikum“ genannt), und zwar bei A. BRILL, F. KLEIN, J. N. BISCHOFF und W. BEETZ. Im Herbst 1877 unterzog er sich der Prüfung für das Lehramt in Mathematik und Physik, die er gut bestand und, wie damals gefordert, durch Ablegung einer „Spezialprüfung“, zu der eine wissenschaftliche Arbeit eingereicht werden mußte, im darauf folgenden Jahre ergänzte. Mit der gleichen

Arbeit [2][1]) promovierte er am 3. August 1878 an der K. Universität und erwarb das Prädikat „summa cum laude“. Unterdessen war A. v. Braunmühl schon im Staatsdienste verwendet worden und zwar vom 9. Nov. 1877 bis 25. Sept. 1878 als Assistent am K. Realgymnasium und aushilfsweise im Januar, Februar und März des Jahres 1878 an der K. Industrieschule München, deren Rektor Kleinfeller in einem glänzenden Zeugnis schon damals ein besonders hervortretendes Lehrtalent betonte. Vom 25. Sept. 1878 an wurde A. v. Braunmühl zum Lehramtsverweser an der damals einzigen K. Realschule (jetzigen Ludwigskreisrealschule) ernannt, welche Stelle vom 1. Juli 1879 an in die endgültige eines K. Reallehrers umgewandelt wurde. Am 1. Januar 1885 trat er an das K. Maximiliansgymnasium unter dem Titel K. Studienlehrer über, nachdem er sich kurz vorher, am 11. Juli 1884, an der K. Technischen Hochschule die venia legendi erworben hatte.

Diese anstrengende Doppelstellung als Mittelschullehrer und Privatdozent behielt A. v. Braunmühl bei bis zum 1. Nov. 1888, wo Professor Bischoff in den Ruhestand trat, an dessen Stelle der junge Gelehrte zum Extraordinarius an der K. Technischen Hochschule ernannt wurde, mit dem Auftrage, über „Algebraische Analysis und Trigonometrie“, sowie über „Projektivische Geometrie in synthetischer Behandlung“ zu lesen. Der 1. Juni 1892 brachte ihm die Beförderung zum ordentlichen Professor ohne Änderung des Lehrauftrages. Von 1903/4 ab trat erst hierin eine Änderung ein, indem die allgemeine Vorlesung über höhere Mathematik in 4 Teile geteilt und eine Vorlesung „Grundzüge der höheren Mathematik für Architekten und Chemiker“ hinzugefügt wurde, welcher Vorlesungskomplex jetzt den drei Ordinarien (W. v. Dyck, S. Finsterwalder und v. Braunmühl) gleichmäßig übertragen wurde, so daß v. Braunmühl 1903/4 die „Grundzüge“, 1904/5 „Höhere Mathematik I. u. II. Teil“, 1905/6 „Höhere Mathematik III. u. IV. Teil“ las. Daneben liefen noch abwechselnd die zwei schon erwähnten Vorlesungen, zu denen er 1905/6 eine solche über „Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie“ fügte. Aber es war ihm nicht vergönnt, den dreijährigen Zyklus öfter als einmal ganz durchzumachen. Am 7. März 1908 entriß ihn der Tod seinen Schülern, seiner Familie und der Wissenschaft. Im Februar noch hatte er sich mit äußerster Anstrengung in den Vorlesungen aufrecht erhalten.

Zu dieser öffentlichen Pflichttätigkeit fügte der Verblichene, wie ja allen Lesern dieser Zeitschrift wohlbekannt ist, noch eine selbstgewählte, die ihm innerlich sicher bald zur Hauptsache wurde. Schon im Winter-

1) Die eingeklammerten Ziffern beziehen sich auf das am Schlusse der Abhandlung beigefügte Verzeichnis der Veröffentlichungen A. v. Braunmühls.

semester 1893/4 begann er eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik, von den ältesten Zeiten bis zur Mitte des Zeitalters der Renaissance, zu halten, der sich im Wintersemester des darauf folgenden Jahres eine ebensolche anschloß, die die Zeit vom Beginn der Renaissance bis zur Mitte des 17. Jahrh. umfaßte. Gleichzeitig begründete er im Wintersemester 1893/4 sein einzig dastehendes mathematisch-historisches Seminar, das er bis an sein Lebensende ununterbrochen führte [22]. Dort hielt er entweder selbst Vorträge, teils wies er vorgerückteren Teilnehmern Themata zu, in deren Behandlung Quellenstudien verlangt wurden. In den nächsten Jahren bildete sich ein Stamm von älteren Herren in diesem Seminar, Lehrern an Münchener Mittelschulen und Assistenten der Technischen Hochschule, um den sich Studierende verschiedener Semester und sogar einige Techniker gruppierten [29]. Auf diese Weise entstanden wertvolle Veröffentlichungen von W. END über die Geschichte der Dezimalbrüche, von St. CHRZASZCZEWSKI (später HALLER) über DESARGUES, von W. KUTTA über die Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung. Füllten die Vorträge der Teilnehmer nicht das ganze Semester aus, so ergänzte er die Lücken selbst durch Referate über eigene Studien. In diesen Jahren — 1895/96 — hielt er auch die erste (einstündige) Spezialvorlesung über Geschichte der Trigonometrie, die er fast ganz aus den Quellen heraus arbeitete, aber zunächst nur bis REGIOMONTAN führen konnte. Die direkte Frucht davon für die breitere Öffentlichkeit waren zwei Abhandlungen [27, 28], auf die wir noch unten zu sprechen kommen. Zum letzten Male berichtete er über sein geliebtes Seminar im Jahre 1904 [43]. Dieses war unterdessen zu einem zweistündigen ausgestaltet worden. Seit 1899 waren Zyklen von Vorträgen eingerichtet, die zwei Semester umfaßten. Der erste Zyklus behandelte die Geschichte der Quadratur des Kreises von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, der zweite die ersten Anfänge des Infinitesimalkalküls, beginnend mit der Antike und endigend mit den Entdeckungen von NEWTON und LEIBNIZ. Der dritte Zyklus setzte die Geschichte der Differential- und Integralrechnung von LEIBNIZ und NEWTON an bis auf GAUSS fort, während der vierte sich mit der Geschichte der Geometrie im 16. und 17. Jahrhundert und im besonderen mit der Entstehung der analytischen Geometrie befaßte. Ein fünfter Zyklus entwickelte die Geschichte der unendlichen Reihen seit N. MERCATOR und NEWTON bis auf unsere Tage. Zu den schon erwähnten Schülern kamen A. A. BJÖRNBO, G. HEINRICH und C. R. WALLNER hinzu, die mit eigenen Arbeiten an die Öffentlichkeit traten.

Bevor wir uns zu den wissenschaftlichen Veröffentlichungen A. v. BRAUNMÜHLS wenden, noch einige Worte über sein Leben. Die Gesundheit des ursprünglich schwächlichen Knaben hatte sich offenbar

während der Jünglingsjahre gekräftigt und wir sehen in dem reifen Manne einen ausdauernden Fußgänger und Bergsteiger, der auch im Dienst den Begriff Schonung nicht kannte. Lauten Freuden abhold, hatte er sich seit 1879 ein ruhiges Familienglück gesichert, wo er Fräulein Fanny Stölzl, einer Beamtenstochter, die Hand am Altare reichte. Drei Mädchen entsprossen dieser Ehe. Aber nur zwei erwachsene Töchter trauerten an des Vaters Bahre. Im Blütenalter von 17 Jahren hatte im Jahre 1902 der Tod die jüngste Tochter hinweggerafft. Dies war ein harter Schlag für den bis dahin gesunden Mann. Es ist nicht ausgeschlossen, daß ein Nierenleiden, das schließlich seinen Tod herbeiführte, von da ab infolge öfterer Gedrücktheit seiner Seele auch leichter Einfluß auf seinen Körper gewann. An äußeren Ehren, die dem Verlebten zuteil wurden, sind nur seine Aufnahme in die Leopoldinisch-Karolinische Akademie (1897) und die Verleihung des Verdienstordens vom hl. Michael IV. Klasse (1904) zu erwähnen. Die größte Ehrung aber, die einem Lehrer widerfahren kann, das ist die Anhänglichkeit und Dankbarkeit seiner Schüler. Hieran hat es v. Braunmühl nie gefehlt, ebensowenig, wie an dem Vertrauen und der Freundschaft der Kollegen, die dem schon nicht mehr auf der Höhe der Leistungsfähigkeit stehenden Manne 1904—1907 das arbeitsreiche Amt des Vorstandes der Allgemeinen Abteilung der K. Technischen Hochschule übertrugen.

Überblicken wir nun die Reihe der Veröffentlichungen des Dahingegangenen, so sind diese sehr leicht zu klassifizieren. Seine ersten Arbeiten beziehen sich mit einer Ausnahme [6] durchweg auf die Differentialgeometrie der geodätischen Linien [2—5, 8—10], denen er auch durch Modelle Anschaulichkeit verlieh [1, 7]. Um diese Linien auf beliebige Erstreckung hin rechnerisch zu verfolgen, bedurfte er der elliptischen und hyperelliptischen Transzendenten, und er erweiterte hier insbesondere das Formelsystem für Thetafunktionen mit gebrochenen Charakteristiken [11—14]. Mit diesen Arbeiten, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, ist um 1890 die rein mathematische Periode abgeschlossen. Von da ab ist alles Weitere entweder biographisch oder historisch, und zwar beschränkte sich diese Arbeitsrichtung nicht auf die reine Mathematik, sondern umfaßte mit die Astronomie, über die A. v. Braunmühl im Münchener Volkshochschulverein gelegentlich auch einen Zyklus von 6 Vorträgen hielt. Dieser Zug hat seine Studien zur Geschichte der Trigonometrie sehr günstig beeinflußt, in der man bis dahin, wie er selbst sagt [29], den astronomischen Werken, die oft die einzige Quelle darstellen, zu wenig Beachtung geschenkt hatte.

Seine erste biographisch-historische Arbeit über den im bayrischen Schwaben geborenen Jesuiten Christoph Scheiner [17], kam als 24. Bänd-

chen der von A. v. Braunmühls Kollegen K. v. Reinhardstoettner und dem Münchener Archivar und Lokalforscher K. Trautmann begründeten Bayerischen Bibliothek heraus. Sie bot dem Verfasser gleich Gelegenheit genug, sich mit astronomisch-historischen Fragen zu beschäftigen, hier insbesondere mit der Entdeckung der Sonnenflecken. Mit großer Objektivität erkennt er Galilei die Priorität vor Scheiner, letzterem die Unabhängigkeit zu, Johann Fabricius aber die Priorität der Veröffentlichung. Das Büchlein zeigt schon einen der Hauptvorzüge seines Verfassers aufs deutlichste: die Fähigkeit, ein gewaltiges Material klar zu übersehen und die Ergebnisse unter Beiseiteschiebung alles Sekundären auf knappem Raume leicht lesbar darzustellen. Mit dieser Arbeit in engem Zusammenhange stehen zwei kleinere Notizen über die Entdeckung der Sonnenflecken [15, 20], die A. v. Braunmühl bald darauf durch die Veröffentlichung eines in der Münchener Universitätsbibliothek aufgefundenen Beobachtungsmaterials [21] wesentlich ergänzen konnte. Durch den letzteren Fund wurde es auch fast sichergestellt, daß Scheiner, erbittert durch die heftigen und ungerechten Angriffe Galileis gegen ihn, wirklich die Rolle des Anzeigers in jenem unseligen Prozesse gegen den großen Forscher gespielt hat, dem A. v. Braunmühl um dieselbe Zeit eine eigene Monographie widmete [19].

Nicht weit ab von Galilei liegt eine biographische Skizze über Nikolaus Coppernicus [24], in der das historische Moment stark hervortritt, und eine geschichtliche Darstellung der Theorien über die Entstehung des Sonnensystems [31], die sich wieder durch ruhige Sachlichkeit besonders auszeichnet. Scharf charakterisiert dort v. Braunmühl den tiefgreifenden Unterschied zwischen der Kantschen und der Laplaceschen Hypothese, die eigentlich nur die Buffon angehörige Idee der Einheit der Weltmaterie gemeinsam hätten, geht dann genauer auf Lockyers Kosmogonie ein und auf die Modifikationen, die G. H. Darwin an dieser Theorie anbrachte, um sie mit der Laplaceschen in Einklang zu bringen. Für letztere tritt er selbst lebhaft ein, nicht ohne auf die Möglichkeit ihrer Ersetzung durch eine andere, bessere hinzuweisen, aber erst, wenn die Grenzen unseres Erkennens noch wesentlich weiter hinaus gerückt würden.

Eine Reihe von Nekrologen in Bettelheims Biographischem Jahrbuch auf in der Neuzeit verstorbene Mathematiker und Physiker, wie Franz Neumann und Christian Wiener [26], dessen wenig bekanntes, philosophisches Werk *Die Grundzüge der Weltordnung* (1863) besonders hervorgehoben wird, auf seinen Kollegen L. Sohncke, auf K. Weierstrass und L. v. Seidel [32], dann noch auf S. Lie [36] schließen sich hier an. Überall nimmt der Verfasser Veranlassung, die Eigenschaften vor allem

herauszuheben, die ihn selbst am meisten zierten, die Zurückhaltung und Neidlosigkeit des Forschers und die Fähigkeit, Schüler zu fesseln. „Alle Schüler hingen mit unbegrenzter Liebe und Verehrung an dem Meister", sagt er bei Weierstrass gleichsam von sich selbst. Nur bei S. Lie fehlt ein solcher Hinweis. Aus freundschaftlicher Zuneigung entstand der Nachruf für den Kollegen L. Muggenthaler [25], einem Festvortrag zum 30. Stiftungsfest des Akademisch-mathematischen Vereins München, am 28. Juni 1907, dankt die Skizze über Euler [45], A. v. Braunmühls letzte Veröffentlichung, ihre Entstehung. Auch hieraus möchten wir die Bemerkung anführen, daß Euler stets lehren und als Lehrer verstanden sein wollte und ihm alles Überraschen- und Verblüffenwollen ferngelegen sei.

Wenn wir nun zu den eigentlich historischen Arbeiten übergehen, so ist als erste die ausgezeichnete Studie über organische Kurvenerzeugung [18] zu erwähnen, der eine Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel [16] vorausgegangen war. Direkt veranlaßt jedenfalls durch die Ausstellung von Modellen und Instrumenten, die die Deutsche Mathematikervereinigung gelegentlich ihrer Jahresversammlung 1892 in München veranstaltete, steht die Abhandlung auch mit der Scheinerbiographie in Zusammenhang durch einen von diesem Gelehrten zum Zeichnen der Schattenkurven konstruierten Kegelschnittzirkel, dessen Grundidee allerdings schon von dem Venetianer F. Barozzi (1566) und den Arabern benutzt worden war. Der Bericht v. Braunmühls ist natürlich mehr mathematisch als technisch, er bespricht auch die Einteilung der Kurven bei den Alten in ebene, körperliche und lineare Örter, die Kritik dieser Einteilung durch Descartes und den Einfluß der Entdeckung der analytischen Geometrie, sowie der Infinitesimalrechnung auf die Konstruktion alter und neuer Kurven. Die doppelte Erzeugung der zykloidalen Kurven (de Lahire 1699), Evoluten und Evolventen, Traktorien, Tschirnhaus' Fokalkurven, die Kardioide, die logarithmische Linie und viele andere spezielle Kurven treten auf. Der Aufsatz schließt mit der Besprechung von Newtons *Enumeratio* (1704), mit Maclaurins und Braikenridges Erzeugungsweisen, mit der sauberen Trennung von Geometrie und Mechanik durch d'Alembert und Euler.

Um diese Zeit, oder wenig später, muß v. Braunmühl den Plan gefaßt haben, eine Geschichte der Trigonometrie zu schreiben. Der erste öffentliche Hinweis auf das zu erwartende Werk findet sich in der Mitteilung [22] im Jahre 1895. Es erschien eine Reihe von Einzeluntersuchungen, in deren Mitte die zwei großen Aufsätze [27, 28] der Leopoldinisch-Karolinischen Abhandlungen von 1897 stehen. Sie werden flankiert von kleineren Notizen über die prosthaphäretische Methode [23, 33] und das sphärische Polardreieck [30], die sich alle noch auf die Zeit vor Erfindung der Logarithmen beziehen. Das war auch die Grenze, die sich der Ver-

fasser in dem 1900 erschienenen ersten Band seines Werkes [34] steckte. In den *Beiträgen zur Geschichte der Trigonometrie* [27] wandte v. BRAUNMÜHL hauptsächlich der von den Historikern vorher ziemlich vernachlässigten graphischen Methode sein Augenmerk zu die in dem Analemma des PTOLEMÄUS wurzelte und deren Kern darin bestand, daß man die Himmelskugel auf drei zueinander senkrechte Ebenen: die Meridianebene, die Horizontebene und die Ebene des ersten Vertikals orthogonal projizierte. Die Verwendung und Umformung dieser Methode bei den Griechen, Indern und Arabern wird ausführlich dargelegt. Von großer Wichtigkeit ist der daraus hervorgehende Nachweis, daß entgegen der Meinung von DELAMBRE, HANKEL und CANTOR die Araber kein Rechenverfahren zur Umformung trigonometrischer Ausdrücke hatten, sondern daß sie alles mittels der geschilderten Projektionsmethode ableiteten, die überall den zweiten Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie ersetzte. So kam es auch, daß dieser Satz, der in dunkler Form schon bei AL BATTÂNÎ vorkommt, erst von REGIOMONTAN, der eine mittelalterliche lateinische Übersetzung von AL BATTÂNÎS Werk über die Bewegung der Sterne mit einem Kommentar versah (1537 nach dem Tode REGIOMONTANS erschienen) als ein für jedes Dreieck gültiger Satz herausgeschält wurde. Diese Tatsache war bis dahin nicht genügend gewürdigt worden.

REGIOMONTAN war überhaupt der erste, der erkannte, daß sich alle trigonometrischen Probleme auf ebene oder sphärische Dreiecksaufgaben zurückführen lassen. Das wird in dem zweiten der größeren Aufsätze [28] näher ausgeführt, der einen Vergleich zwischen diesem großen Reorganisator des Westens gibt mit dem ebenso großen, um etwa 200 Jahre früheren, des Ostens: NAṢÎR EDDÎN ṬÛSI. Die beiden Werke *De triangulis omnimodis libri quinque* und das *Schakl al Kattâ* werden einander gegenübergestellt und nach Inhalt und Methode gegeneinander abgewogen, nachdem die Unabhängigkeit des Deutschen von dem Araber sicher gestellt wurde. Das letztere Werk wird als das erste, von Astronomie freie, rein systematische Lehrbuch der Trigonometrie hingestellt, in Erfindung und Darstellung den „fünf Büchern" REGIOMONTANS vielfach überlegen, die hingegen, Lehr- und Übungsbuch zu gleicher Zeit, von einer weit größeren Wirksamkeit sein konnten, da ihr Verfasser an die praktischen Aufgaben wirklich herantrat. NAṢÎR EDDÎN charakterisiere so den Abschluß einer bereits fertigen Entwicklungsstufe, REGIOMONTAN aber bedeute den Beginn einer neuen Periode.

In dem kleineren Aufsatze [23] wird zuerst gezeigt, daß die prosthaphäretische Methode den Arabern durchaus bekannt gewesen sei, daß sie dieselbe aber eben nicht formelmäßig verwendeten (eine Andeutung erst bei IBN JÛNOS († 1008)), sondern aus ihrer dem Analemma entnommenen

Projektionsfigur entnahmen. Im Abendlande sei aber Johannes Werner († 1528) aus Nürnberg der erste gewesen, der die prosthaphäretischen Formeln zuerst aufgestellt habe. Hierfür wird das Zeugnis des Heidelberger Professors J. Christmann angeführt, da Werners 5 Dreiecksbücher damals noch verschollen waren.[1]) Im zweiten Aufsatze über diese Methode [33] wird ihre Wiederentdeckung und Verwendung durch Tycho Brahe und Paul Wittich (um 1580) geschildert, die Beweise Bürgis und die durch diesen und Melchior Joestel an der Methode angebrachten Verbesserungen besprochen. Wie schwer sich die Astronomen auch nach Erfindung der Logarithmen von der liebgewordenen Methode trennten, wird gezeigt, indem der Verfasser nachweist, daß sie 1634 und 1636 noch benutzt und ausführlich gelehrt wurde. Bezüglich des sphärischen Polardreiecks wies v. Braunmühl durch eine eingehende Analyse der hierauf bezüglichen Ausführungen bei Vieta nach, daß dieser zweifellos schon 1593 den Zusammenhang zwischen sphärischem Dreieck und Supplementardreieck klar durchschaute, und daß nur seine Neigung, neue Entdeckungen in möglichst rätselhafte Form zu kleiden, diese Tatsache verdunkelt habe.

Dies sind auch die wesentlichsten Punkte, in denen die Darstellung der Geschichte der Trigonometrie im I. Bande der v. Braunmühlschen *Vorlesungen* [34] von der bis dahin üblichen Auffassung abwich, wie der Verfasser selbst im Vorwort andeutete. Durch genaue Quellenvergleichung wurden natürlich auch viele kleinere Einzelheiten sichergestellt oder berichtigt, worauf wir hier nicht eingehen können.

Schon 3 Jahre nach dem Erscheinen des ersten Bandes kam der zweite heraus [40], so daß nur wenig Vorarbeiten inzwischen veröffentlicht werden konnten. Von großem Interesse bleibt aber auch neben dem fertigen Buche die Abhandlung über die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie [35], in der von den ersten Abkürzungen an (nämlich $\sin 1^m$ arcus für sin und $\sin 2^m$ arcus für cos), die der Verfasser in der von Maurolico 1558 herausgegebenen Sphärik des Menelaos fand, bis zu der einheitlichen Bezeichnungsweise Eulers all die vielen Stufen beschrieben sind, die durchlaufen werden mußten, oder wenigstens durchlaufen wurden, bevor die Terminologie eine feste wurde. Einschlägig sind außerdem noch zwei Arbeiten. In der einen [38] weist v. Braunmühl nach, daß de Moivre seinen Satz nicht erst 1730 in den *Miscellanea analytica*, sondern, wenn auch noch etwas dunkler, schon 1707 und 1722 in den Philosophical transactions angegeben, ihn aber in der allgemeinsten Weise, der nur die durch Euler üblich gewordene

1) Die Handschrift der Wernerschen Arbeit wurde von A. A Björnbo 1902 wiedergefunden und 1907 zum Abdruck gebracht.

Form noch fehlte, erst in den Philosophical transactions für 1738 begründet habe. Die andere Arbeit macht zunächst verschiedene Werke namhaft, in denen die sogenannten MOLLWEIDEschen Gleichungen lange vor MOLLWEIDE (1808) auch der Form nach genau enthalten sind, und der Verfasser findet als ersten Autor F. W. OPPEL (1746) für beide, während die eine schon bei NEWTON (1707) vorkommt. OPPEL hat auch, wie im zweiten Teile derselben Arbeit gezeigt wird, als erster die Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie aus dem umgelegten Netz des Dreikants abgeleitet, nachdem für den Kosinussatz dasselbe schon von J. CASWELL (um 1690) geleistet worden war. OPPEL habe auch hervorgehoben, daß aus Sinus- und Kosinussatz alle übrigen Formeln hervorgingen, und gezeigt, wie man zu jeder von ihnen mittels des Supplementardreikants die reziproke finden könne. A. v. BRAUNMÜHL hat aber in dem zweiten Bande der *Vorlesungen* nicht, wie fast alle Historiker, an der Schwelle des 19. Jahrhunderts haltgemacht, sondern ist mutig darübergeschritten und hat die Geschichte der Trigonometrie bis zum Abschluß des Manuskriptes hin weitergeführt. Freilich klagt er im Vorwort, daß dies nur habe geschehen können unter beständigem Kampf mit der Fülle des ins Enorme gewachsenen Stoffes, da die Trigonometrie im Laufe der Zeit mit einer ganzen Reihe anderer mathematischer Wissensgebiete in engste Fühlung getreten sei. Und er sagt, es sei dies überhaupt nur möglich gewesen, indem er nach subjektivem Empfinden eine gewisse Grenze gezogen habe. Wiederum zeigt sich so bei diesem Bande, der doppelt so umfangreich leichter zu schreiben gewesen wäre, die große Kunst des Meisters in der Beschränkung.

Um bei der Trigonometrie zu bleiben, sei gleich hinzugefügt, daß, als M. CANTOR sich anschickte, seinen dreibändigen *Vorlesungen* einen vierten (Sammel-)Band, der von 1759 bis 1799 reichen sollte, nachfolgen zu lassen, natürlich A. v. BRAUNMÜHL den Abschnitt: Trigonometrie, Polygonometrie und Tafeln [44] übernahm. Dieser Abschnitt enthält ja begreiflicherweise, da er sichtlich schon 1904 verfaßt wurde, nichts wesentlich Neues; doch wurden z. B. die Gesamtleistungen J. H. LAMBERTS und die Beziehungen zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen in gerundeterer Form dargestellt und auch manche Einzelheiten verbessert.

Außer diesen trigonometrischen Arbeiten hat v. BRAUNMÜHL noch drei andere mathematisch-historischen Inhalts veröffentlicht. Die eine bezieht sich auf die Geschichte der Interpolationsformeln [37]. Zwar hatte hier schon G. ENESTRÖM die Haupttatsachen bis 1715 klargelegt.[1])

1) *Differenskalkylens historia I.* Upsala univ. årsskr. 1879. Vgl. auch die *Notes historiques sur la formule générale d'interpolation de NEWTON* von P. MANSION und G. ENESTRÖM; Bibl. math. 1886, Sp. 141—144.

Diese Abhandlung war aber wenig gelesen worden, so daß v. Braunmühl auf Grund eigener Forschungen die Eneströmschen Resultate bestätigte und erweitert darlegte. Es handelte sich vor allem um den Nachweis, daß weder Stirling noch Cotes eigene Interpolationsformeln jemals aufstellten, sondern daß beide nur solche Formeln mitteilten und bewiesen, die schon Newton angehören. Und zwar hat Newton allein deren sechs gegeben, zwei, die gewöhnlich nach ihm benannt werden, in den *Principia* (1687), vier andere in der *Methodus differentialis* (1711). Unter den letzteren befinden sich die zwei für die sog. Interpolation aus der Mitte, die schon E. Waring (1779) fälschlich Stirling zuschrieb. Alle genannten Autoren neben anderen befaßten sich aber nur mit dem Beweise der ersten zwei Newtonschen Formeln. Erst Theoph. Walz gab, wie v. Braunmühl weiter ausführt, 1745 und 1746 Beweise für die vier ersten Newtonschen Formeln und 1758 ganz ähnlich Ch. Walmesley. Zum Schlusse weist der Verfasser auf die „interessante Tatsache" hin, daß die sog. Lagrangesche Interpolationsformel bereits 1779 von E. Waring gegeben worden sei, sogar mit Herleitung, die bei Lagrange fehlt.

Eine zweite Abhandlung [41] beschäftigte sich mit der Behandlung der sog. trinomischen Integrale

$$(1) \qquad a\int z^{n\eta-1}\sqrt{Z}\,dz \quad \text{und} \quad a\int \frac{z^{(n+1)\eta-1}}{\sqrt{Z}}\,dz,$$

für $n = 0, 1, 2, 3$ und $Z = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$ durch Newton (1671 und 1704), der sich damit begnügte, gewisse Flächenstücke von Ellipsen oder Hyperbeln anzugeben, die durch sie ausgedrückt werden. Die Quadratur dieser Flächenstücke setzte er entweder als geometrisch bekannt voraus, oder er dachte sie sich durch die von ihm gelehrte Methode der Reihenentwicklung geleistet. Roger Cotes ging einen bedeutenden Schritt weiter, indem er solche Integrale auf logarithmische und Kreisfunktionen zurückführte und sie so direkt der rechnerischen Behandlung mit logarithmisch-trigonometrischen Tafeln zugänglich machte (1714). Insbesondere fanden sich im Nachlaß von Cotes weitere Materialien, auch für etwas allgemeinere Klassen von Integralen, die R. Smith in der *Harmonia mensurarum* (1722) zu einer Sammlung von 94 Integraltafeln ausbaute, von denen 6 sich auf trinomische Integrale bezogen. Es ist bekannt, daß Cotes in der *Harmonia mensurarum* jene später nicht-euklidisch genannte Maßbestimmung einführte, und daß in derselben Schrift die fundamentale Beziehung

$$(2) \qquad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

auftritt Der Verfasser gibt genauere Ausführungen über den Gedankengang COTES' und den Zusammenhang mit den in Rede stehenden Integralen.

Mit der letzten hier zu besprechenden Abhandlung [42] trat v. BRAUNMÜHL eigentlich zum erstenmal persönlich in die Öffentlichkeit, indem er auf dem III. Intern. Mathematiker-Kongreß über das erste Auftreten einer PFAFFschen Differentialgleichung

$$2\,dx - dz + x\,dy = 0 \tag{3}$$

in NEWTONS *Methodus fluxionum* (verfaßt um 1670/71) und über das erste Vorkommen von partiellen Differentialgleichungen vortrug. NEWTON hatte den Charakter der Gleichung (3) ganz richtig erkannt und angegeben, daß zwischen zweien der Variablen, etwa x und y, eine ganz beliebige Relation angenommen werden müsse. Nur war ihm, mangels einer Funktionsbezeichnung, die allgemeine Durchrechnung noch unmöglich und auch an eine geometrische Interpretation konnte er sich nicht wagen. Die erste partielle Differentialgleichung stieß EULER auf, da er (1740) die Differentialgleichung

$$dz + P\,dx = 0 \tag{4}$$

durch einen Multiplikator R zu einer Totalen zu machen suchte. Er erhielt in unserer Schreibweise die Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{P\,\partial R}{\partial z} + \frac{R\,\partial P}{\partial z}, \tag{5}$$

und löste sie gleich in der heute noch üblichen Weise. Auf diese Feststellung folgen noch weitere Bemerkungen über die systematische Behandlung der partiellen Differentialgleichungen durch d'ALEMBERT, EULER und LAPLACE.

Der Heidelberger Kongreß hatte auf v. BRAUNMÜHL einen so guten Eindruck gemacht, daß er beschloß, auch den nächsten Internationalen Kongreß im Jahre 1908 in Rom zu besuchen. Aber als am 6. April dieses Jahres der Sindaco von Rom, Herr ERNST NATHAN, die Erschienenen im Konservatorenpalaste begrüßte, da lag v. BRAUNMÜHL schon seit 4 Wochen unter dem kühlen Rasen. Manche Pläne waren mit ihm ins Grab gesunken. So hatte er mit der Verlagsbuchhandlung Vieweg und Sohn in Braunschweig wegen einer Geschichte der Differentialgleichungen abgeschlossen. Aber eine bedeutende, wenn auch unvollendete Arbeit fand sich noch in seinem Nachlasse. Schon 1902 las man auf dem Vorsatzpapier der ersten Auflage des Bändchens *Niedere Analysis*, I. Teil, von H. SCHUBERT, daß für die „Sammlung SCHUBERT" auch eine *Geschichte der Mathematik* von A. v. BRAUNMÜHL und S. GÜNTHER in Aussicht genommen sei. Die beiden befreundeten Gelehrten hatten vereinbart, diese

Arbeit auf zwei Bände der Sammlung zu verteilen, so zwar, daß S. Günther die ältere Geschichte bis zum Auftreten Descartes' und des Infinitesimalgedankens, A. v. Braunmühl aber die neuere Entwicklung, abschließend mit dem 18. Jahrhundert, in Angriff nehmen sollte. Erst im Jahre 1908 erschien Günthers Band, und ein eigentümlicher Zufall wollte es, daß sein Verfasser die Sendung vom Verleger gerade am Todestage des Freundes erhielt. Die Durchsicht des Nachlasses ergab nun, daß der Verewigte schon größere Teile seiner Arbeit ausgearbeitet hatte, insbesondere die Kapitel Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie, Infinitesimalrechnung und Differentialgleichungen. Ganz fehlten noch Geometrie und Trigonometrie, ferner Determinanten, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Differenzenrechnung, Interpolation und Variationsrechnung. Aber auch in dem Vorhandenen klafften noch Lücken. Z. B. fehlten die höheren Transzendenten und bestimmten Integrale und (außer in der Algebra) die Untersuchungen an komplexen Veränderlichen. Außerdem stak noch alles voll von Zetteln mit Verweisungen auf Literatur, Andeutungen zu weiteren Ausführungen usw. So erhielt ich das hinterlassene Manuskript, um es zu ergänzen und für den Druck zu bearbeiten. Diese Bearbeitung [46] ist vor kurzem erschienen.

Ich hatte nicht den Vorzug, v. Braunmühls Schüler zu sein und habe eigentlich nicht in persönlicher Beziehung zu ihm gestanden.[1]) Allein zufolge der letzten Arbeit wurde ich mittelbar durch den jetzt Entschlafenen in ein Gebiet eingeführt, dessen Wichtigkeit ich, besonders als Lehrer, nie verkannte, dessen Reize aber erst offenbar werden, wenn man sich näher mit ihm beschäftigt. In diesem Sinne darf ich v. Braunmühl meinen Lehrer nennen, und habe deshalb gerne durch einen Nachruf meinem Danke Ausdruck geben wollen.

Verzeichnis der Veröffentlichungen A. v. Braunmühls.

1. *Die geodätischen Linien der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung;* Math. Modelle, angefertigt im math. Institut der K. Techn. Hochschule in München, unter Leitung von Prof. Dr. Brill. Abt. II, VIII (1877).

2. *Über geodätische Linien auf Rotationsflächen und ihre Einhüllenden.* Inaug.-Diss. Univ. München. 52 S. 8°.

3. *Über Enveloppen geodätischer Linien;* Math Ann. **14** (1879), S. 557—566.

1) Alles, was über die persönlichen Mitteilungen hinausgeht, die in dem von H. Burkhardt, S. Finsterwalder und S. Günther verfaßten Nekrolog des Jahresberichtes der K. Technischen Hochschule München 1907/8 enthalten sind, verdanke ich der Liebenswürdigkeit von Frau v. Braunmühl.

4. *Über die kürzesten Linien developpabler Flächen;* Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen **15** (1879), S. 402—405.
5. *Über ein Problem des Minimums;* Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen **16** (1880), S. 69—70.
6. *Ein Verfahren zur Division ganzer Zahlen;* Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen **16** (1880), S. 272—274.
7. *Über Enveloppen geodätischer Linien auf dem verlängerten und abgeplatteten Rotationsellipsoid;* Math. Modelle, angefertigt im math. Institut der K. Techn. Hochschule in München unter Leitung von Prof. Dr. BRILL. XVIII (1880).
8. *Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiachsigen Flächen 2. Grades;* Math. Ann. **20** (1882), S. 557—586, m. 1 Tfl.
9. *Über die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren;* Abh. (math.-phys.) Ak. München **14** (1883), 3. Abt., S. 93—110.
10. *Notiz über geodätische Linien auf den dreiachsigen Flächen 2. Grades, welche sich durch elliptische Funktionen darstellen lassen;* Math. Ann. **26** (1886), S. 151—153.
11. *Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunktionen;* Abh. (math. phys.) Ak. München **16** (1887), 2. Abt., S. 327—368.
12. *Note über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind und das Additionstheorem der zugehörigen Thetafunktionen;* Sitzungsber. phys.-med. Soc. Erlangen **18** (1886), S. 37—44.
13. *Über die GÖPELsche Gruppe p-reihiger Thetacharakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Fundamentalrelationen der zugehörigen Thetafunktionen;* Math. Ann. **32** (1888), S. 513—544.
14. *Über Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n^{teln} ganzer Zahlen gebildet sind, und die Relationen zugehöriger Thetafunktionen n^{ter} Ordnung;* Math. Ann. **37** (1890), S. 61—99.
15. *Zur Geschichte der Entdeckung der Sonnenflecken;* Beilage z. Allg. Zeitung, München 1890, Nr. 107.
16. *Über die ersten Kegelschnittzirkel;* Zeitschr. Math. Phys. **35** (1890) hist.-lit. Abt., S. 161—165.
17. *Christoph SCHEINER als Mathematiker, Physiker und Astronom;* Bayer. Bibliothek **24**. Bamberg, Buchner, 1891. 94 S. 8° mit Porträt SCHEINERS als Titelbild.
18. *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts;* Katalog math. u. math.-phys. Modelle etc., herausgeg. v. WALTHER DYCK, München 1892, S. 54—88.
19. *GALILEO GALILEI;* Himmel und Erde **5** (1893), S. 493—504, 541—552.
20. *Geschichtliches über Sonnenflecken;* Beilage z. Allg. Zeitg., München 1893, Nr. 66—67.
21. *Über eine an der Bibliothek der Universität München vorhandene Sammlung von Originalbeobachtungen aus der Zeit der Entdeckung der Sonnenflecken;* Jahrb. f. Münchener Geschichte, herausg. v. TRAUTMANN **5** (1894), S. 53—60.
22. *Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik an der K. Technischen Hochschule zu München;* Bibl. math., Neue Folge **9** (1895), S. 89—90.

23. *Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie;* Bibl. math., Neue Folge **10** (1896), S. 105—108.

24. *Nicolaus Coppernicus;* Biogr. Blätter, herausgeg. v. A. Bettelheim, Berlin, **2** (1896), S. 267—279.

25. [Nekrolog auf] *L. Muggenthaler;* Jahresber. der K. Techn. Hochschule München, 1895/96.

26. [Nekrologe auf] *Franz Neumann und Christian Wiener;* Biogr. Jahrb. u. Deutsch. Nekrolog, herausg. v. A. Bettelheim, Berlin, **1** (1897), S. 205—207, 207—209.

27. *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie;* Abh. Leop. Ak. **71** (1897), S. 1—30, m. 1 Tfl.

28. *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan;* Abh. Leop. Ak. **71** (1897), S. 31—68, m. 2 Tfln.

29. *Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der K. Techn. Hochschule zu München;* Bibl. math., Neue Folge **11** (1897), S. 113—115.

30. *Zur Geschichte des sphärischen Polardreiecks;* Bibl. math., Neue Folge **12** (1898), S. 65—72.

31. *Geschichtliche Darstellungen der hauptsächlichsten Theorien über die Entstehung des Sonnensystems;* Himmel und Erde **10** (1898), S. 289—300, 357—374.

32. [Nekrologe auf] *Leonhard Sohncke, Karl Weierstrass, Ludwig v. Seidel;* Biogr. Jahrb. u. Deutsch. Nekrolog, herausg. v. A. Bettelheim, Berlin, **2** (1898), S. 167—170, 170—173, Ergänzungen u. Nachträge S. 415—417.

33. *Beiträge zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie;* Abh. Gesch. math. Wiss. **9** (1899), S. 15—29.

34. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* Erster Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Leipzig, B. G. Teubner 1900. 260 S. 8°.

35. *Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie;* Bibl. math. (3) **1** (1900), S. 64—74.

36. [Nekrolog auf] *Sophus Lie;* Biogr. Jahrb. u. Deutsch. Nekrolog, herausg. v. A. Bettelheim, Berlin, **4** (1900), S. 324—325.

37. *Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation;* Bibl. math. (3) **2** (1901), S. 86—96.

38. *Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes;* Bibl. math. (3) **2** (1901), S. 97—102.

39. *Zur Geschichte der Trigonometrie im 18. Jahrhundert.* a) Die sogenannten Mollweideschen Gleichungen. b) Graphische Ableitung der Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie; Bibl. math. (3) **2** (1901), S. 103—110.

40. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* Zweiter Teil. Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Leipzig, B. G. Teubner 1903. 264 S. 8°.

41. *Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes.* Bibl. math. (3) **5** (1904), S. 355—365; Atti congr. int. sc. storiche **12** (1904), S. 271—284.

42. *Zur Geschichte der Differentialgleichungen;* Verh. III. Int. Math.-Kongr. Heidelberg 1904. Leipzig 1905, S. 551—555.

43. *Le séminaire d'histoire des mathématiques à l'école polytechnique de Munich;* L'enseign. math. **7** (1905), S. 65—66.

44. *Trigonometrie, Polygonometrie und Tafeln [von 1759 bis 1799].* XXIII. Abschnitt der „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", herausg. v. Moritz Cantor, IV. Bd., S. 403—450. Leipzig, B. G. Teubner 1908.

45. *Leonhard Euler;* Mitteil. z. Gesch. Med. u. Naturw. **7** (1908), S. 1—14.

46. [*Geschichte der Mathematik. II. Teil.* Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Dr. Heinrich Wieleitner I. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Bearbeitet unter Benutzung des Nachlasses von Dr. Anton von Braunmühl. Leipzig, G. J. Göschen 1911. 251 S. 8°.]

Dazu viele Besprechungen in den Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen von **32** (1896) an bis **43** (1907).

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3: 12, 15, 22, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 61.

1^3: 30. Herr Cantor behandelt die Frage, ob die Babylonier eine Null besaßen und bemerkt dabei: „eine Null, das ist ja ein Symbol fehlender Einheiten". Allerdings kann man Null auf diese Weise definieren, aber dann sollte man entweder überall dieselbe Definition benutzen oder wenigstens an den Stellen, wo man dem Worte Null eine andere Bedeutung gibt, diesen Umstand deutlich angeben. Aber Seite 128 behauptet Herr Cantor ausdrücklich, daß in den astronomischen Werken des Ptolemäus nicht von einer Null die Rede ist, obgleich bei Ptolemäus bekanntlich gerade o als Symbol fehlender Einheiten vorkommt (siehe z. B. *Syntaxis mathematica*, ed. J. L. Heiberg **2**, Leipzig 1903, S. 216—219 und die Tafel S. 220—249). Wie leicht eine solche Inkonsequenz irreleiten kann, geht aus der folgenden Bemerkung des Herrn G. A. Miller (Science **29_2**, 1909, S. 392) hervor: „. . . as regards the question of the origin of zero and the positional arithmetic . . . it was generally believed that these discoveries were due to Hindus, while the most recent work of Cantor makes a Babylonian origin appear much more plausible". Aber aus der Cantorschen Darstellung kann man nicht folgern, daß bei den Babyloniern eine Positionsarithmetik vorkam, es sei denn daß man auch den Griechen die Kenntnis einer solchen Arithmetik zuerkennt.

G. Enestrom.

1^3: 33, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 307. — **1^3: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 61—64. — **1^3: 163—165,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1^3: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 64—65. — **1^3: 198, 201,** siehe BM **9_2**, 1908/9, S. 237. — **1^3: 202,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 307—309. — **1^3: 203,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 65, 309. — **1^3: 206,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 237—238. — **1^3: 213, 225, 236,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 65. — **1^3: 244,** siehe BM **10_3**, 1909/10, S. 341. — **1^3: 245,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 65. — **1^3: 252,** siehe BM **10_3**, 1909/10, S. 164. — **1^3: 257,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 139. — **1^3: 270, 287, 297,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66. — **1^3: 298,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66; **10_3**, 1909/10, S. 53—54. — **1^3: 310,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66. — **1^3: 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 174—176.

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

— **1³ : 351,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 66. — **1³ : 365, 368,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 177. — **1³ : 372,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 411—412; 9_3, 1908/9, S. 238. — **1³ : 374, 376,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 412—413. — **1³ : 380,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 66—67. — **1³ : 383—384,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 164—165. — **1³ : 388,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 177. — **1³ : 394,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 165. — **1³ : 401—402,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 239. — **1³ : 406, 409,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 177—178. — **1³ : 409,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 239. — **1³ : 410,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 178. — **1³ : 429,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1³ : 431,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67; 9_3, 1908/9, S. 139—140. — **1³ : 432,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1³ : 433,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 179. — **1³ : 447, 448,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 239—240. — **1³ : 452,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 179. — **1³ : 459,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 309—310. — **1³ : 464,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 179. — **1³ : 470,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 311. — **1³ : 471,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 413. — **1³ : 476,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 71—72. — **1³ : 488,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1³ : 498,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 180. — **1³ : 500,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67; 9_3, 1908/9, S. 321—322. — **1³ : 502,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1³ : 503—504,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 180—181; 9_3, 1908/9, S. 240—241. — **1³ : 509, 510,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1³ : 512,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 140—141. — **1³ : 513, 515, 528, 545,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 68—69. — **1³ : 551,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 141—142. — **1³ : 556,** siehe BM 10_3, 1909/10, S. 54 — **1³ : 563—564,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 69. — **1³ : 567,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 241. — **1³ : 576,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 69—70, 181; 9_3, 1908/9, S. 142. — **1³ : 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70. — **1³ : 706,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70, 181. — **1³ : 710,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 241. — **1³ : 713,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70.

1³ : 713. Die gewöhnliche, auch von Herrn Cantor wiederholte Angabe, daß Atelhard von Bath Mönch war, scheint auf einer Verwechslung mit einem später lebenden Mönch desselben Namens zu beruhen. Ch. H. Haskins (siehe seinen Artikel *Adelard of Bath;* The english historical review 1911, S. 497) hat weder in den Schriften Atelhards noch in den Schriften dessen Zeitgenossen einen Beleg für die Angabe auffinden können. Z. 5 wäre es also angebracht, „einem englischen Gelehrten" statt „einem englischen Mönche" zu setzen.

G. Eneström.

1³ : 715, siehe BM 9_3, 1908/9, S. 241. — **1³ : 715—716,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1³ : 717,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1³ : 718,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71; 9_3, 1908/9, S. 242. — **1³ : 719,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 183—184. — **1³ : 720,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 730,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1³ : 734,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 736,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 242. — **1³ : 736—737,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1³ : 738,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72. — **1³ : 742,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 242. — **1³ : 743, 748, 750,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72. — **1³ : 763,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 242. — **1³ : 764,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 185. — **1³ : 766,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 143. — **1³ : 770,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 185. — **1³ : 771,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 143. — **1³ : 779,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 243. — **1³ : 780, 781,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72. — **1³ : 792,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 143—144. — **1³ : 794,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72. — **1³ : 795,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 243. — **1³ : 798,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 144.

1³ : 798. In betreff des *Liber embadorum* zitiert Herr Cantor die Worte: „translatus anno Arabum DX mense saphar" und bemerkt, daß dadurch die Datierung der Übersetzung auf Juni 1116 gesichert erscheint. Aber der vollständige Text der letzten Zeilen lautet:

> Finit liber embadorum a Savasorda Iudaeo in ebraico compositus et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus anno Arabum DX mense saphar, die XV eiusdem mensis, hora tertia, Sole in XX gradu et XV minuto Leonis, Luna in XII gradu et XX minuto Piscium, Saturno

in VIII gradu et LVII minuto Tauri, Iove in Arietis XXVI gradu et LII minuto, Marte in Libra XXVII. XV, Venere in Libra II. XXVIIII, Mercurio in Leone XIIII. XLV, Capite in Cancro O. I, Cauda in Capricorno O. I.

Auf Grund dieser astronomischen Angaben hat Charles H. Haskins (*The translations of Hugo Sanctelliensis;* The romanic review [Cambridge, Mass.] **2**, 1911, S. 2 des Sonderabdrucks) berechnet, daß das wirkliche Datum 13 August 1145 ist, so daß die richtige Jahreszahl DXL ist; DX muß also auf einem Schreibfehler eines Abschreibers beruhen. Ich habe nicht die Berechnung genauer kontrolliert, aber aus den Tafeln, die ich besitze, kann ich wenigstens schließen, daß Jupiter im August 1145 im Zeichen des Widders, im Juni 1116 dagegen nicht im Zeichen des Widders, sondern im Zeichen der Wage oder des Skorpions gewesen sein muß.

Bekanntlich ist die Datierung auf Juni 1116 den Kennern der jüdischen Literaturgeschichte auffällig erschienen. Beispielsweise bemerkt M. Steinschneider (siehe Biblioth. Mathem. 1896, S. 37), daß die Datierung „einige Schwierigkeit bietet". Durch die Bemerkung von Haskins ist diese Schwierigkeit jetzt erledigt.

G. Enestrom.

1^3 : 800, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73; 9_3, 1908/9, S. 144—145. — **1^3 : 801,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 185—186; 9_3, 1908/9, S. 145. — **1^3 : 802,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1^3 : 805—806,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73. — **1^3 : 809—810,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 243. — **1^3 : 815,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73. — **1^3 : 838,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 415. — **1^3 : 842,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 243. — **1^3 : 854,** siehe BM 10_3, 1909/10, S 55. — **1^3 : 855,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73.

1^3 : 855. Wie (Z. 31—34) „die Tatsache, daß jenes Werk [die Arithmetik des Boetius] damals [d. h. am Ende des 10. Jahrhunderts] am Kaiserhofe [Ottos III.] vorhanden war, durch das Auffinden einer etwa gleichaltrigen Handschrift zur Gewißheit geworden" ist, verstehe ich nicht. Die fragliche Handschrift wurde auf Veranlassung des Bischofs Bernward verfertigt, und dieser starb erst 1022, während Otto III. schon 1002 gestorben ist; ob die Handschrift aus dem Ende des 10. oder aus dem Anfange des 11. Jahrhunderts stammt, ist durchaus unbekannt.

G. Enestrom.

1^3 : 856. In betreff der Worte (Z. 3—4): „durch diesen [Bernward] verbesserte, wenn nicht gar durchweg mit einer älteren Handschrift verglichene" ist folgendes zu bemerken. H. Düker, dessen Abhandlung *Der liber mathematicalis des heiligen Bernward im Domschatze zu Hildesheim* (Hildesheim 1875) die Quelle des Herrn Cantor ist, kam (S. 4) nach einer sehr eingehenden Untersuchung zu dem folgenden Ergebnis: „ob sie [nämlich die Revision der Handschrift] Bernward selbst vorgenommen hat, läßt sich nicht sagen . . . wären dieselben [d. h. die Versen, die in einem Evangeliencodex stehen und möglicherweise von Bernward herrühren] wirklich die authentische Handschrift Bernwards, so würden wir auch in diesen Correcturen seine Hand wiederfinden". Die Behauptung, daß Bernward selbst die Handschrift verbessert hat, ist mithin ebenso unsicher wie die Vermutung, daß er die Abschrift mit einer älteren Handschrift verglichen hat.

G. Enestrom.

1^3: 857, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73; 9_3, 1908/9, S. 243—244. — **1^3: 859, 862, 863,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73—74. — **1^3: 867,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 74, 187. — **1^3: 869, 875—876, 877, 878,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 74—76. — **1^3: 881,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 415—416. — **1^3: 882, 889, 893,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 77—78. — **1^3: 900,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1^3: 901,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 145—146; 10_3, 1909/10, S. 261. — **1^3: 902,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 78—79. — **1^3: 906,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 79, 188—189; 9_3, 1908/9, S. 244.

1^3: 906. Die Frage, ob Atelhard, wie Herr Cantor angibt, wirklich Spanien besucht hat, kann nach Ch. H. Haskins (*Adelard of Bath;* The english historical review 1911, S. 497) bis auf weiteres nicht entschieden werden; in seinen eigenen Schriften sagt Atelhard nichts hierüber, wohl aber erwähnt er, daß er während seiner Reisen Tarsus und Antiochia besucht habe.

G. Enestrom.

1^3: 908, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 79; 9_3, 1908/9, S. 146—147. — **1^3: 909,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 79. — **1^3: 910,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 79, 416.

1^3: 910. Ein weiterer Beleg für die Unrichtigkeit (vgl. BM 8_3, 1907/8, S. 416) der Cantorschen Behauptung, daß es für den Algorithmiker in lateinischer Sprache keine anderen Wörter für Einer und Zehner als „digitus" und „articulus" gab, befindet sich in einem kürzlich von L. C. Karpinski veröffentlichten Artikel (siehe BM 11_3, 1910/11, S. 131). Karpinski bringt zum Abdruck einige Auszüge aus der ältesten, schon 1144 von Robert von Chester verfertigten lateinischen Übersetzung der Algebra Alkhwarismis, darunter auch die Stelle, die in der von Libri herausgegebenen Übersetzung „articuli [multiplicatio] in articulum et unitatum in unitates, et unitatum in articulum, et articuli in unitates" lautet. Die Stelle übersetzt Robert auf folgende Weise: „nodos in nodis multiplica et unitates in nodis et iterum unitates in nodis et unitates in unitatibus". Hier ist „nodi" eine wörtliche Übersetzung des Termes „ʿuqūd" des Originals, und wenn zu Roberts Zeit das synonyme Wort „articulus" allgemein als arithmetisches Kunstwort benutzt worden wäre, hätte Robert sicherlich dieses Wort statt „nodi" gewählt, obgleich es sich hier um eine etwas allgemeinere Bedeutung des Wortes „ʿuqūd" handelt (vgl. BM 8_3, 1907/8, S. 151 Fußnote 4). Von Interesse ist auch zu sehen, daß Robert „unitates" und nicht „digiti" schreibt.

In betreff des Wortes „articuli" bin ich noch unsicher, ob es ursprünglich bei den Algorithmikern Zehner bedeutete, und es ist meines Erachtens wahrscheinlich, daß das Wort erst für Zahlen von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ benutzt wurde. In der soeben zitierten Fußnote habe ich eine Stelle bei Libri als verstümmelt bezeichnet, und diese Stelle lautet in einer anderen Handschrift (Conv. soppr. I. 5. 18, früher Cod. S. Marco Flor. 216, Bl. 80a): „reiterantur mille apud unumquemque articulum usque ad infinitam numerorum comprehensionem", und dieser Text gibt einen guten Sinn, wenn „articulus" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ bedeutet, während der Ausdruck „ad infinitam numerorum comprehensionem" schwieriger zu deuten sein dürfte, wenn „articulus" Zehner bedeutet.

G. Enestrom.

1^3: 911, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 79—80.

2 : 5, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 286; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309. — **2 : 9,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 147. — **2 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 147—148. — **2 : 11,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 17,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 148. — **2 : 26,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 244—245. — **2 : 30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 166—167. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 190. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 148. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 245. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80—81; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 72—73. — **2 : 45,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 148—150. — **2 : 46,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 150. — **2 : 52,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 190—191. — **2 : 53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 207—208; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 262. — **2 : 59—60,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 150.

2 : 62. In der Fußnote 1 behauptet Herr Cantor, daß bei Leonardo Pisano die unmittelbare Aufeinanderfolge von Buchstaben, z. B. *abc*, multiplikative Bedeutung hatte, aber diese Behauptung ist zum mindesten höchst irreleitend. Als Beleg verweist Herr Cantor auf S. 17 des 2. Bandes seiner *Vorlesungen*, und dort findet man das folgende Zitat einer Stelle bei Leonardo: „sit numerus (!) .*a*.*e*.*c*. quaedam coniunctio quae uocetur prima, numeri (!) vero .*d*.*b*.*f*. sit coniunctio secunda“; aus dem Texte der fraglichen Seite der *Vorlesungen* scheint hervorzugehen, daß Herr Cantor „coniunctio“ durch „Produkt“ übersetzt. Aber wenn man näher untersucht, was bei Leonardo nach dem von Herrn Cantor zitierten Passus steht, so findet man, daß jener überall das Produkt von *a* und *b* durch „factus ex numeris .*a*.*b*.“ ausdrückt. Ich gebe hier unten alle Stellen des *Liber abbaci* wieder, die sich auf ein Produkt von zwei durch Buchstaben bezeichneten Größen beziehen; die Seiten- und Zeilenzahlen verweisen auf die Boncompagnische Ausgabe.

(S. 132 Z. 2—3 v. u.) ex multiplicatione numeri .*e*. in factum ex numeris .*a*.*c*.

(S. 132 Z. 1 v. u.) diuisa per factum ex numeris .*d*.*b*.

(S. 133 Z. 1—2) factus ex numeris .*d*.*b*. per .*f*. equabitur multiplicationi .*e*. in factum ex numeris .*a*.*c*.

(S. 133 Z. 2—3) factus ex numeris .*d*.*b*. ad factum ex numeris .*a*.*c*.

(S. 133 Z. 9) factus ex numeris .*b*.*d*. ad factum ex numeris .*b*.*a*.

(S. 133 Z. 12) factus ex numeris .*a*.*b*. ad factum ex numeris .*a*.*c*.

(S. 133 Z. 22—23) est multiplicatio facti ex numeris .*a*.*e*. in numerum .*c*. scilicet 720 equalis multiplicationi facti ex numeris .*d*.*b*. antecedentibus in numerum .*f*.

Wenn bei Leonardo Pisano die unmittelbare Aufeinanderfolge der Buchstaben *a* und *b* multiplikative Bedeutung gehabt hätte, so wäre es wohl unsinnig gewesen, das Produkt von *a* und *b* konsequent durch „factus ex numeris .*a*.*b*.“ auszudrücken. Und warum sollte Leonardo für Produkt das nichtssagende Wort „coniunctio“ anwenden, da er sonst „factus“ sagt?

Unter solchen Umständen kann man nicht umhin, die Richtigkeit der Cantorschen Übersetzung des Wortes „coniunctio“ durch „Produkt“ in Verdacht zu haben. Meiner Ansicht nach ist die von Herrn Cantor zitierte Stelle höchstwahrscheinlich in der von Boncompagni benutzten Handschrift verstümmelt, was ja schon aus den Wörtern „numerus“ und „numeri“ hervorgehen dürfte, und die richtige Fassung ist vermutlich

> sint numeri .*a*.*e*.*c*. quaedam coniunctio quae uocetur prima, numeri vero .*d*.*b*.*f*. sint coniunctio secunda,

also:

> seien die Zahlen a, e, c die erste, die Zahlen d, b, f die zweite Kombination,

und dadurch ist die einzige Stütze der Cantorschen Behauptung in Fortfall gekommen.

Aber auch wenn man das Zitat wie Herr Cantor deuten will, sollte man nicht unterlassen, zu erwähnen, daß bei Leonardo Pisano die unmittelbare Aufeinanderfolge von Buchstaben sonst nie multiplikative Bedeutung hat; vielmehr bedeutet „.*a*.*b*.“ immer „.*a*. et .*b*.“.

Leider wiederholt J. Tropfke (*Geschichte der Elementar-Mathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 136) ohne weiteres die irreleitende Behauptung des Herrn Cantor in betreff der multiplikativen Bedeutung der unmittelbaren Aufeinanderfolge der Buchstaben bei Leonardo Pisano. G. Enestrom.

---

2 : 63, siehe BM 4_3, 1903, S. 206.

---

2 : 63. Herr Cantor bemerkt (Z. 18—24):

> Wir finden das Interesse nämlich darin, daß hier [d. h. bei Jordanus] die Reihenfolge der Aufgaben die umgekehrte ist wie bei Diophant, bei den Arabern, bei Leonardo von Pisa. Sie alle nahmen in mehr oder weniger ausgesprochener Weise das pythagoräische Dreieck zum Ausgangspunkt, um zu einer arithmetischen Progression von Quadratzahlen zu gelangen. Jordanus ist der Einzige, der den entgegengesetzten Weg einschlug.

Indessen ist es irreleitend zu sagen, daß Jordanus in diesem Falle irgendeinen „Weg einschlug“, denn bei ihm sind die Lösungen der zwei von Herrn Cantor zitierten Sätze durchaus unabhängig voneinander. Wie Herr Cantor richtig erwähnt, gibt Jordanus an, daß die im 12. Satze gesuchten drei Quadrate

$$\left(b^2-\frac{c^2}{2}\right)^2,\quad \left(b^2+bc+\frac{c^2}{2}\right)^2,\quad \left(b^2+2bc+\frac{c^2}{2}\right)^2$$

sind, und ebenso gibt Jordanus an, daß die im 13. Satze gesuchten zwei Quadrate $\left(\frac{m^2}{4}-1\right)^2$ und $\left(\frac{m^2}{4}+1\right)^2$ sind, wenn das gegebene Quadrat m^2 gerade, aber $\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$, wenn das gegebene Quadrat m^2 ungerade ist. Wie Jordanus zu den Lösungen der zwei Sätze gekommen ist, deutet er gar nicht an, und erst im 26. Satze des 7. Buches bemerkt er, daß die Quadratzahlen durch Summierung der ungeraden Zahlen erhalten werden.

Da Herr Cantor auch behauptet, daß die Reihenfolge der zwei Aufgaben bei Jordanus die entgegengesetzte ist wie bei Diofantos, erlaube ich

mir zu bemerken, daß diese Behauptung nicht ganz genau ist. Soviel ich weiß, behandelt DIOFANTOS nicht direkt die fraglichen zwei Aufgaben, wohl aber im zweiten Buche seiner Arithmetik (Sätze 8—10) verwandte Probleme, die auf die folgenden Gleichungen führen (a, b und d sind gegebene, x und y gesuchte Größen):

$$\text{Satz } 8\colon\ x^2 + y^2 = a^2.$$
$$\text{Satz } 9\colon\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$
$$\text{Satz } 10\colon\ x^2 - y^2 = d.$$

Anderseits führen die zwei Aufgaben des JORDANUS auf die Gleichungen $x^2 - z^2 = z^2 - y^2$, also $x^2 + y^2 = 2z^2$ und $x^2 = a^2 + y^2$, also $x^2 - y^2 = a^2$. Die erste Aufgabe wird gewissermaßen mit dem 9. Satze des DIOFANTOS verwandt, wenn man $a^2 = b^2$ setzt, und die zweite Aufgabe des JORDANUS wird identisch mit dem 10. Satze des DIOFANTOS, wenn man $d = a^2$ setzt. Will man überhaupt die Reihenfolge der Aufgaben bei JORDANUS und bei DIOFANTOS vergleichen, kann man also ebensogut sagen, daß sie dieselbe ist.

Der ganze Passus: „Wir finden ... Weg einschlug" sollte also gestrichen oder auf andere Weise redigiert werden. G. ENESTRÖM.

---

2 : 65, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 151.

---

2 : 65. Die Bemerkung (Z. 21—23): „Einigermaßen überraschend kommt unmittelbar nach der Quadratwurzelausziehung der Satz von der Vertauschbarkeit der Faktoren $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$" sollte gestrichen oder modifiziert werden. Der fragliche Satz (Satz 38) wird bei der Kubikwurzelausziehung ausdrücklich benutzt (siehe Satz 39 am Ende: „multiplicavi ergo modo quod fit ex a in b per c, prius autem per b quod fit ex a in c, ergo ex proxima multiplicavi per aequipollens"), und da die Kubikwurzelausziehung, wie Herr CANTOR richtig angibt, nach der Quadratwurzelausziehung kommt, ist es gar nicht überraschend, daß der Satz diesen Platz bekommen hat. G. ENESTRÖM.

---

2 : 67, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 77,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 152. — **2 : 82,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 87,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 323. — **2 : 88,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395. — **2 : 89,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 245—246. — **2 : 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2 : 91—92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395—396; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 191; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 152. — **2 : 94, 96,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 167—168. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 73—74. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 152—153. — **2 : 103,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 262—263. — **2 : 104,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 168—169; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 81 — **2 : 104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153. — **2 : 106,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 380. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 112,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 56. — **2 : 112—113,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 56—57. — **2 : 114,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 57. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153—154. — **2 : 117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 191—192. — **2 : 129,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516.

---

2 : 134. Der Passus (Z. 1—6): „Wir haben (S. 117) Bradwardinus im Besitze dieses Wortes [irrationalis] gesehen, und wenn es sich auch weder bei Bradwardinus noch bei Oresme um das Erstlingsrecht der mathematischen Benutzung von irrational handelt, so (?!) läßt das doppelte Vorkommen eine sehr rasche (?) Verbreitung vermuthen", sollte gestrichen werden. Um zu verstehen, wie Herr Cantor dazu kam, in der zweiten Auflage der *Vorlesungen* eine so schlecht redigierte Bemerkung zu bringen, muß man auf die erste Auflage zurückgehen. Als Herr Cantor diese Auflage redigierte, konnte er nicht wissen, daß das Wort „irrationalis" schon in der von Gherardo Cremonese verfertigten Anaritius-Übersetzung vorkommt, und darum bemerkte er (**2**[1] S. 121—122): „Wir haben (S. 106) Bradwardinus im Besitze dieses Wortes gesehen, und zwischen Bradwardinus und Oresme kann es sich vielleicht um das Erstlingsrecht der mathematischen Benutzung von irrational handeln, während das doppelte Vorkommen eine sehr rasche Verbreitung vermuthen läßt". Aber bei der Redaktion der zweiten Auflage der *Vorlesungen* hatte Herr Cantor die Curtzesche Ausgabe der Anaritius-Übersetzung zur Verfügung, und er wußte also, daß es sich gar nicht zwischen Bradwardin und Oresme um das Erstlingsrecht der mathematischen Benutzung von irrational handeln konnte, so daß die Bemerkung der ersten Auflage nicht ohne weiteres zum Abdruck gebracht werden konnte. Das Natürlichste wäre wohl gewesen, die ganze Bemerkung zu streichen, aber Herr Cantor war anderer Ansicht und ließ nur die Vermutung in betreff des Erstlingsrechts weg. Allein wie kann man aus dem doppelten Vorkommen des Wortes irrational im 14. Jahrhundert ersehen, daß das zwei Jahrhunderte früher benutzte Wort vermutlich rasch verbreitet wurde? Man könnte ja ebensogut aus dem Umstande, daß keine Benutzung des Wortes für das 13. Jahrhundert nachgewiesen worden ist (Pisano schreibt „inratiocinata", vgl. *Scritti* **1**, Roma 1857, S. 356), schließen, daß das Wort sehr langsam verbreitet wurde!

Beiläufig bemerke ich, daß das Wort „irrationalis" auch in dem möglicherweise von Albert von Sachsen herrührenden Traktate *De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem* vorkommt, über welchen Herr Cantor S. 146—149 berichtet (siehe Zeitschr. für Mathem. **32**, 1887; Hist. Abt. S. 44: „proportio irrationalis est quantitatum incommensurabilium adinvicem habitudo").

G. Enestrom.

---

2 : 143, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 144,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381. — **2 : 145,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 148,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2 : 150—151,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288. — **2 : 155,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 323—325. — **2 : 155—156,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 87—88; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 154. — **2 : 163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 246—247. — **2 : 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 171,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 58. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 178—179,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 192—193; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 58. — **2 : 206,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 208,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 247. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398. — **2 : 224—226,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155. — **2 : 228,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 193. — **2 : 229,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 194; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 263. — **2 : 230,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 195—196; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155—157. — **2 : 232, 234, 237,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 196—198. — **2 : 238,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 198;

10$_3$, 1909/10, S. 59, 169. — **2 : 240,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 198—199; **10**$_3$, 1909/10, S. 59. — **2 : 242,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **8**$_3$, 1907/8, S. 199—200. — **2 : 243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **6**$_3$, 1905, S. 398; **7**$_3$, 1906/7, S. 382; **8**$_3$, 1907/8, S. 200. — **2 : 245,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 383. — **2 : 246,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 283; **8**$_3$, 1907/8, S. 200. — **2 : 247,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 383—384; **9**$_3$, 1908/9, S. 247. — **2 : 249,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 200—201. — **2 : 250,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 253,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2 : 272,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 247. — **2 : 273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **9**$_3$, 1908/9, S. 157—158; **11**$_3$, 1910/11, S. 160. — **2 : 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2 : 304,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 201. — **2 : 305,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88. — **2 : 306, 308,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 248. — **2 : 313,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 314,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 318,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 158. — **2 : 319,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 201—202. — **2 : 320,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88—89; **9**$_3$, 1908/9, S. 248. — **2 : 322,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399; **8**$_3$, 1907/8, S. 202—203. — **2 : 325,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 327,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 248—249. — **2 : 328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 339,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 341, 343,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 170. — **2 : 351,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87; **8**$_3$, 1907/8, S. 203. — **2 : 360,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314. — **2 : 375,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 75. — **2 : 379,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 382,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 60. — **2 : 385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207; **7**$_3$, 1906/7, S. 289; **10**$_3$, 1909/10, S. 170. — **2 : 386,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82; **10**$_3$, 1909/10, S. 171. — **2 : 395,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 211. — **2 : 398,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 204; **9**$_3$, 1908/9, S. 158—160. — **2 : 399,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108; **8**$_3$, 1907/8, S. 204—205; **10**$_3$, 1909/10, S. 344—345. — **2 : 401, 405,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89. — **2 : 413,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 205. — **2 : 419,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 205—206; **9**$_3$, 1908/9, S. 249—250. — **2 : 420,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 83, 206; **10**$_3$, 1909/10, S. 345. — **2 : 421, 422,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 206. — **2 : 423,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 345. — **2 : 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 426,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 207; **10**$_3$, 1909/10, S. 60—61. — **2 : 427,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315; **8**$_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 428,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 208; **9**$_3$, 1908/9, S. 160. — **2 : 429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202; **8**$_3$, 1907/8, S. 208—209. — **2 : 430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 434,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 160—161. — **2 : 437—438,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 209—210. — **2 : 440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 441,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 161. — **2 : 442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 444,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 446,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 250. — **2 : 449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **10**$_3$, 1909/10, S. 171. — **2 : 452,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 457,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 250—251. — **2 : 471,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 161. — **2 : 474,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141; **9**$_3$, 1908/9, S. 161, 251. — **2 : 476,** siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 75. — **2 : 479—480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385; **9**$_3$, 1908, S. 75, 251. — **2 : 481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **8**$_3$, 1907/8, S. 83. — **2 : 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401; **11**$_3$, 1910/11, S. 81. — **2 : 483,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 291. — **2 : 484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386; **11**$_3$, 1910/11, S. 161—162. — **2 : 493, 494,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 345—346. — **2 : 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386; **11**$_3$, 1910/11, S. 81—82. — **2 : 503, 505,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2 : 506, 507,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 162—163. — **2 : 508,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 264—265; **11**$_3$, 1910/11, S. 162—163. — **2 : 509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM **3**$_3$, 1902,

S. 141. — **2 : 514,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 515,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 163—164. — **2 : 516, 517,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 524,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 90; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 171—172. — **2 : 525,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 172. — **2 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 529,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91. — **2 : 530,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 531,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212. — **2 : 532,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 163—164. — **2 : 533,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 164. — **2 : 535,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 233—234. — **2 : 536,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 164—166. — **2 : 539,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 293; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 252. — **2 : 541,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 547,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84. — **2 : 548,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 549,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 554,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 322. — **2 : 558,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 561,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 566,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85. — **2 : 567, 568,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 569,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85—86; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 326—327. — **2 : 582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 584,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 166.

---

2 : 584. Es ist richtig, daß Viète in seinem 1579 gedruckten Tabellenwerke zuletzt die Dezimale durch einen sie von den ganzen Zahlen trennenden senkrechten Strich unterschied. Da indessen Tropfke (*Geschichte der Elementarmathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 89) auf diesen Umstand so großen Wert legt, daß er in gesperrter Schrift bemerkt: „Damit war der erste Dezimalbruch geschrieben", erlaube ich mir die Cantorsche Angabe ein wenig zu ergänzen.

In dem eigentlichen *Canon mathematicus* setzt Viète den Radius, der für Sinus und Cosinus „hypotenusa", für Tangente und Sekante „basis", für Cotangente und Cosekante „perpendiculum" genannt wird, gleich 100000. Im allgemeinen sind die Zahlen der Tafel ganze Zahlen, aber in gewissen Fällen benutzt Viète genauere Näherungswerte mit Dezimalbrüchen, und dann sind diese Brüche mit kleineren Typen gedruckt, aber immer ohne trennenden Strich.

Überdies enthält das Tabellenwerk Viètes verschiedene Tafeln, worin Dezimalbrüche zuweilen vorkommen, und in einigen dieser Tafeln benutzt Viète wagerechte Striche unter den Bruchziffern. Beispielsweise kommt im „Universalium inspectionum ad canonem mathematicum liber singularis" folgende Stelle (S. 15) vor:

Semi-diameter 100,000,$\underline{000,00}$, semiperimeter circuli satis accurate 314,159,$\underline{265,35}$,

also $100000\pi = 314\,159{,}265\,35$. Dieselbe Bezeichnungsweise hat Viète S. 51—54, 56—59 angewandt. Erst S. 64—65 des „Liber singularis" kommen kleine senkrechte Striche vor, und zwar gibt es zusammen 96 Zahlen, deren Dezimalziffern auf diese Weise von den übrigen Ziffern getrennt werden Beispielsweise steht am Ende der Seite 65 folgende Zahl:

9,999,999,348 | 00,00,10,62,76

die 9 999 999 348,0000106276 bedeutet. Man kann also mit Herrn Cantor diesen Strich den Vorgänger des später eingeführten Pünktchens nennen, aber Viète selbst legt offenbar keinen Wert auf seine ganz beiläufig benutzte Bezeichnung, die übrigens schon 1530 bei Rudolff vorkommt (siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 243).

G. Enestrom.

2 : 585, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 593,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 594,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 211. — **2 : 605,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86. — **2 : 610,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 388. — **2 : 611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 612—613,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 214, 389; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86—87; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 77. — **2 : 622,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87. — **2 : 623,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 639,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 77.

---

2 : 639. Der ganze Versuch, ausfindig zu machen, auf welchem Wege Viète zu seiner Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + 3ax = 2b$ kam, ist meines Erachtens wertlos, weil man auf verschiedenen Wegen dazu gelangen kann. Die einfachste Erklärung scheint mir allerdings die folgende zu sein. Unter Bezugnahme auf die Lösung Cardanos setzte Viète $x = z - y$, also

$$z^3 - 3z^2y + 3zy^2 - y^3 + 3a(z - y) = 2b$$

und zerlegte ferner in nahem Anschluß an Cardano (vgl. *De regula Aliza* Kap. I; Ausg. 1570, S. 2: „numerus tribuatur cubis") die Gleichung in die zwei folgenden:

$$z^3 - y^3 = 2b, \quad 3z^2y - 3zy^2 = 3a(z - y).$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort nach Division durch $3(z - y)$

$$zy = a, \text{ also } z = \frac{a}{y} \text{ und } x = z - y = \frac{a}{y} - y.$$

Allein auch wenn das von Herrn Cantor nach Marie angeführte Verfahren wirklich das von Viète benutzte gewesen wäre, so ist doch die Angabe (Z. 11—13): „Nun war bei dieser Annahme die Unbekannte ganz verloren gegangen (!). Vieta versuchte (!), ob $k = y$ gesetzt deren Stelle einnehmen könne, und das Gelingen (!) des Versuchs bildete die neue Auflösung" recht auffällig. Wie Herr Cantor sagen kann, daß in dem Ausdrucke $x = \frac{a - k^2}{k}$ „die Unbekannte ganz verloren gegangen" ist, verstehe ich nicht, denn k ist ja ebenso unbekannt wie z, aber wenn dieser Umstand nach der Ansicht des Herrn Cantor Nachteile mit sich führte, hätte er ganz einfach k statt z und z statt k setzen können, wodurch $x = \frac{a - z^2}{z}$. Ebensowenig verstehe ich, welchen Anlaß Viète gehabt hätte, zu „versuchen", ob y statt k gesetzt werden könne. Aus dem Ausdruck $x = \frac{a - k^2}{k}$ geht ja hervor, von welcher Form x sein muß, und nach der Voraussetzung ist

$$x^3 + 3ax = z^3 - k^3, \text{ folglich } \frac{a^3}{k^3} - k^3 = 2b,$$

weil $x^3 + 3ax = 2b$ und $z = \frac{a}{k}$.

Welches Zeichen man statt k setzt, ist natürlich durchaus gleichgültig — man könnte ebensogut einen hebräischen oder russischen Buchstaben benutzen.

Der von mir zitierte Passus muß also als schlecht redigiert bezeichnet werden. G. Enestrom.

---

2 : 640, siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 234—235. — **2 : 641,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 253; **11**$_3$, 1910/11, S. 235—237. — **2 : 642,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 652,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 347. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **10**$_3$, 1909/10, S. 265—266. — **2 : 656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 666,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 88—89; **9**$_3$, 1908/9, S. 164—165. — **2 : 667,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **9**$_3$, 1908/9, S. 328. — **2 : 687,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 391; **8**$_3$, 1907/8, S. 89; **9**$_3$, 1908/9, S. 253. — **2 : 693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **7**$_3$, 1906/7, S. 394—395; **11**$_3$, 1910/11, S 237—238. — **2 : 699,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 165—166. — **2 : 700, 701,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 703,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—272; **8**$_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 272—273. — **2 : 712,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 212—213. — **2 : 713,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 254. — **2 : 714,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 714—715,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 238—239. — **2 : 715,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412; **11**$_3$, 1910/11, S. 239. — **2 : 716,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404.

---

2 : 720. Nach Kästner gibt Herr Cantor ohne weiteres an, daß die von Ciermans erfundene Vorrichtung eine Rechenmaschine war. Aber meiner Ansicht nach ist es viel wahrscheinlicher, daß es sich um einen kreisförmigen logarithmischen Rechenschieber handelt. Es ist bekannt, daß W. Oughtred schon vor 1630 ein solches Instrument erfunden hatte und daß sein Schüler W. Forster 1632 in London eine Beschreibung desselben unter dem Titel *The circles of proportion* veröffentlichte (siehe z. B. F. Cajori, Tribune publique [de l'encyclopédie des sciences mathématiques] n° 13, 1910, S. 50). Es liegt sehr nahe anzunehmen, daß Ciermans von dieser Beschreibung Kenntnis bekommen und auf Grund derselben einen Rechenschieber angefertigt hatte. G. Enestrom.

---

2 : 721, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 726,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90. — **2 : 727,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 753—754,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 254. — **2 : 757,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 239—240. — **2 : 758,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 255. — **2 : 759,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 240. — **2 : 763,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S 166. — **2 : 765,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142; **5**$_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358; **7**$_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 773,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 213; **9**$_3$, 1908/9, S. 167. — **2 : 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2 : 780,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 78, 167. — **2 : 783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405; **7**$_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 393; **9**$_3$, 1908/9, S. 255; **10**$_3$, 1909/10, S. 62—63. — **2 : 791,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 316—317,

405—406. — **2 : 795,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 63—64. — **2 : 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 802—803,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 367—368. — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 240—243. — **2 : 815,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 64; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, 243—244. — **2 : 817,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 174. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 827, 830,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 256—257. — **2 : 832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328.

---

2 : 845. Die Angabe (Z. 13—16): „Cavalieri sprach die von ihm entdeckte Wahrheit zuerst 1639 als letzte Aufgabe seiner in Bologna gedruckten *Centuria di varii problemi per dimostrare l'uso e la facilità dei logaritmi nella Gnomonica, Astronomia, Geografia* aus", ist ein wenig auffällig, denn Herr Cantor gibt einen recht ausführlichen Auszug aus dem Titel der Schrift (statt *dei* lies *de'*) und daraus geht ja hervor, daß die 100 Aufgaben durch Anwendung von Logarithmen gelöst werden sollten. In Wahrheit hat die letzte Aufgabe („problema 100") der fraglichen Schrift gar nichts mit der Formel $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ zu tun, sondern bezieht sich, ganz wie die zwei vorangehenden Aufgaben, auf eine Frage „Delle annue pensioni". Aber nachdem diese Aufgabe erledigt worden ist (S. 518—522), bringt Cavalieri (S. 523—526) eine Nachschrift, worin er erwähnt, daß er viele andere Aufgaben gelöst habe, darunter auch das Problem, den Inhalt eines Umdrehungsparaboloids zu bestimmen. Dann fährt er etwa wie in den *Exercitationes geometricae* fort, hebt aber hervor, daß er den Satz, der in moderner Bezeichnung $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ lautet, nur für $n = 1, 2, 3, 4$ bewiesen habe, so daß der allgemeine Satz nur als wahrscheinlich bezeichnet werden könne. Statt „als letzte Aufgabe" soll also „in einer Nachschrift zu seiner Arbeit" gesetzt werden.

G. Enestrom.

---

2 : 850, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 851,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 174. — **2 : 852,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 175; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 244—245. — **2 : 856,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 860, 863,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 245—246. — **2 : 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 878,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 246. — **2 : 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 884,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 167—168. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 246—247. — **2 : 897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 175—176. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 902,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 329—330; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 64. — **2 : 903, 904,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 247—248. — **2 : 911,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 78—79. — **2 : 917,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 249. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : 922,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 168—170. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 1, siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 268. — **3 : 4,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 65—67. — **3 : 5,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 269. — **3 : 5—6,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 269—270. — **3 : 9,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 15, 16,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 270—272. — **3 : 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 18,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 168. — **3 : 19,** siehe BM $\mathbf{10}_3$,

1909/10, S. 67—68. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 91. — **3 : 24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 168. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 29,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 331. — **3 : 37,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 58,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 272—273. — **3 : 62,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 177. — **3 : 63,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 257—258; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 249. — **3 : 69,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 69. — **3 : 70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 258. — **3 : 72,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 249—250. — **3 : 78,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 250. — **3 : 79,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 69—71. — **3 : 81,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 251. — **3 : 82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 85,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 273 - 274. — **3 : 97,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 300; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 169. — **3 : 104,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 331. — **3 : 110,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 170—171. — **3 : 112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3 : 113,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 258—259. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 259—260; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 171. — **3 : 118,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92—93.

---

3 : 119. Herr Cantor gibt (Z. 17—18) an, daß in der lateinischen Algebra Wallis' ein Auszug aus der *Analysis aequationum universalis* von J. Raphson sich findet, aber Wallis sagt selbst: „cujus [methodi] specimen mihi suis [d. h. Raphsons] verbis nuper exhibitum, libet hic subjungere". Was Wallis zum Abdruck gebracht hat, ist also ein von Raphson verfertigter Bericht über die Methode, und wenn man diesen Bericht mit dem Buche Raphsons vergleicht, sieht man sofort, daß jener nicht lediglich ein Auszug aus diesem ist.

Wie Raphson in seinem Bericht erwähnt, hat er in seinem Buche auch versucht zu beweisen, daß sein Verfahren immer konvergent ist, unabhängig von dem Ausgangswert der unbekannten Größe. Nun weiß man ja schon seit der Mitte des 18. Jahrhunderts (siehe F. Cajori, BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 132), daß diese Behauptung falsch ist, so daß der Beweis Raphsons unrichtig sein muß. Hier unten gebe ich nach der „editio secunda" (mein Exemplar hat das Druckjahr 1702, aber es gibt Exemplare dieser Ausgabe mit dem Druckjahr 1697) der *Analysis aequationum universalis* Auskunft über den vermeintlichen Beweis.

Raphson geht von der Gleichung $f(a) = 0$ aus, und setzt $a = g + x$, wo g eine beliebige Zahl und x die Korrektion ist. Dann wird

$$f(g + x) = f(g) + xf'(g) + \frac{x^2}{2} f''(g) + \ldots = 0,$$

also

$$x = -\frac{f(g)}{f'(g)} - \frac{\frac{x^2}{2} f''(g) + \ldots}{f'(g)}$$

und die zwei Glieder der rechten Seite dieser Gleichung bezeichnet Raphson durch t und m, so daß $x = t + m$. Ferner bemerkt er, daß jede der Größen x, t, m sowohl positiv wie negativ sein kann, so daß man acht verschiedene Fälle in Betracht zu ziehen hat. Ich gebe wörtlich seine Behandlung des Falles wieder, in dem alle drei Größen positiv sind.

In $x = + t + m$, x convergentem minorem esse absolutâ quantitate (m) partem scilicet suo toto. x ergo convergente additâ suae (g) liquet hanc novam (g) auctam quantitate (t) majorem esse praecedenti, et hoc modo augeri (g) consequenter verò diminui (m) ad infinitum, post infinitam autem convergentiam, differentiam seu (m) reddi quantitate qualibet assignabili minorem.

Raphson bemerkt also, daß in diesem Falle der neue Näherungswert $(g + t)$ größer ist als der ursprüngliche (g), aber kleiner als der exakte Wert $(g + t + m)$, und dann folgert er ohne weiteres, daß auch jeder folgende Näherungswert größer als der vorangehende, aber kleiner als der exakte Wert sein muß. Aber diese Folgerung ist natürlich unzulässig, denn man weiß nicht einmal, ob $-\frac{f(g)}{f'(g)}$ immer positiv bleibt (vgl. den Fall, in dem g sich sehr wenig von einer Wurzel der Gleichung $f'(a) = 0$ unterscheidet). Ebenso wertlos ist der Beweis in den übrigen Fällen. Allerdings fügt Raphson hinzu: „si quis strictiorem demonstrationem desideret hoc modo procedere poterit", aber was er weiter sagt, weicht eigentlich gar nicht von dem ursprünglichen Beweise ab.

G. Enestrom.

---

3 : 122, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210.

---

3 : 131. Herr Cantor bemerkt (Z. 30—33): „In der Vorrede zu den geometrischen Vorlesungen . . . hat Barrow . . . Newton . . . hinlänglich deutlich bezeichnet" und aus dem folgenden Texte sowie aus der Fußnote 1 S. 132 ersieht man, daß es sich um den Passus: „Ultimam amicus (vir sane cum primis probus, ast in hujusmodi negotiis flagitator improbus) extorsit" handelt. Allein aus den Briefen Barrows an Collins vom 29. März und 23. April 1670 (siehe Rigaud, *Correspondence of scientific men of the seventeenth century* **2**, Oxford 1841, S. 73, 74) geht hervor, daß der Freund nicht Newton, sondern Collins war. Barrow schreibt nämlich:

> [29. März 1670.] I have, to satisfy your desire, scribbled over and sent unto you what concerns the curves for equations [das ist eben der Gegenstand der 13. Vorlesung], which, if you please, you may add to the rest.
>
> [23. April 1670.] For the 13th lecture . . . I . . . am content you should do therein as you please. If you do not like these words in the epistle (in which I meant to jest with you, no more), concerning it, I pray expunge them, and substitute these:
>
> Ultimam apposui, materiam quidem a reliquis abjunctam, at scopo non ita dissitam, nonnullis eam haud inutilem arbitratus.

Barrow selbst gibt also ausdrücklich an, daß die Stelle der Vorrede, die sich auf die letzte (d. h. die 13.) Vorlesung bezieht, einen Scherz mit Collins enthält, und die Worte, die Herr Cantor in der Fußnote 1 S. 132 zitiert, sind gerade die, welche Barrow gemeint haben muß.

An und für sich ist ja die unrichtige Deutung des Wortes „amicus" recht bedeutungslos, aber leider zeigt die Erfahrung, daß kleine Unrichtig-

keiten leicht zu durchaus schiefen Darstellungen Anlaß geben können, und einen Beleg hierfür bietet eben der jetzt behandelte Passus der *Vorlesungen*.

In seinem Pariser Vortrag 1900: *Origines du calcul infinitésimal* hat nämlich Herr Cantor (S. 22—23 des Sonderabzuges) auf Grund seiner unrichtigen Konjektur in betreff der Deutung des Wortes „amicus" eine Darstellung der Beziehung zwischen Barrow und Newton gegeben, die ich hier unten zum Abdruck bringe und mit einigen Bemerkungen versehe:

> Barrow dans ses „Leçons de géométrie" dit qu'un ami (c'était Newton sans aucune doute) lui avait extorqué la dernière leçon, qui est justement celle qui contient les problèmes du calcul infinitésimal.[1]) Barrow en était-il redevable à Newton? Barrow, qui a quitté sa chaire de professeur à Cambridge pour y faire monter Newton, qui a cité Newton de la manière que je viens d'indiquer, aurait-il manqué de dire que les méthodes et les idées de la dernière leçon appartenaient à Newton, s'il en était ainsi? Je crois qu'il suffit de poser la question pour recevoir une réponse négative.[2]) Il y a certainement eu des professeurs, et des plus célèbres, qui ont appris telle ou telle chose d'un élève favori. Mais alors il mettent je dirais de l'amour-propre à l'avouer franchement, et ne se contentent pas de se plaindre qu'on leur ait extorqué la publication de leurs leçons.[3]) Pour moi, je me suis fait de la suite des événements l'image suivante. Barrow a enseigné à Cambridge depuis 1663 jusqu'à 1669. Newton a suivi ses cours dès le commencement. Élève précoce, il écrivit en 1665 et 1666 un premier mémoire: c'était justement son „Analyse par les équations". Il y mit beaucoup du sien, mais il n'hesita pas non plus à y exposer des idées dont la source découlait des cours de Barrow.[4]) Le manuscrit reste entre ses mains. En 1669 Barrow, qui n'a pas de secrets pour Newton, lui montre les leçons[5]) qu'il va faire imprimer. Alors Newton lui demande d'ajouter cette dernière leçon infinitésimale, il la lui extorque[6]), comme dit Barrow, et j'admets que c'est en lui montrant le manuscrit mis au net depuis quelques années et contenant une partie notable de cette leçon. Barrow cède à ce solliciteur implacable[7]), et en même temps il songe à assurer à Newton ce qui lui est propre. Il expédie son mémoire à Collins afin de lui donner une date antérieure[8]) à celle de la publication des „Leçons de géométrie". Je crois que cette hypothèse, que je donne pour telle et non comme un fait historique tout prouvé[9]), suffit à faire comprendre l'enchaînement des dates et des écrits.

[1]) Es ist psychologisch sehr interessant zu sehen, wie Herr Cantor durch seine unrichtige Annahme in betreff der Deutung des Wortes „amicus" zu einer neuen Unrichtigkeit geführt wurde. In Wirklichkeit behandelt die letzte Vorlesung der *Lectiones geometricae* gar nicht Probleme der Infinitesimalrechnung, sondern die geometrische Konstruktion der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Allein Herr Cantor nimmt an, daß Newton die Veröffentlichung der Vorlesung veranlaßt hat, und da sich Newton damals mit Problemen der Infinitesimalrechnung beschäftigte, muß die Vorlesung solche Probleme behandeln! — [2]) Die ganze Frage ist sinnlos, da die Vorlesung gar nicht Probleme der Infinitesimalrechnung enthält. — [3]) Wie aus dem Anfang dieser Bemerkung hervorgeht, enthielt der Ausspruch Barrows einen Scherz mit

Collins, der fünf Jahre älter als Barrow war. — [4]) Das ist lediglich eine unbelegte Mutmaßung des Herrn Cantor. — [5]) Es ist durchaus unbekannt, ob Newton die *Lectiones geometricae* vor der Drucklegung einsah. — [6]) Nicht Newton, sondern Collins! — [7]) Der „unbillige Forderer" war Collins. — [8]) Wie Newton selbst hervorgehoben hat, enthalten die *Lectiones geometricae* nur einen sehr speziellen Fall der allgemeinen Methode, die in der *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* auseinandergesetzt wird. — [9]) ! !

G. Eneström.

3 : 132. Z. 5—7 sollten die Worte: „mit Ausnahme einer Stelle gegen Schluß der zehnten Vorlesung und einer zweiten am Anfang des ersten Anhanges zur elften [Schreibfehler! ließ: „zwölften"] Vorlesung" gestrichen werden. Allerdings steht gegen Schluß der zehnten Vorlesung: „Facio saltem ex amici consilio" und am Anfang des ersten Anhanges zur zwölften Vorlesung: „amico tamen morem gerens operâ dignum censenti", aber der fragliche Freund war höchst wahrscheinlich Collins und nicht Newton. Leider scheinen die Briefe von Collins an Barrow verloren gegangen zu sein, aber daß sich Collins ganz besonders für den ersten Anhang zur zwölften Vorlesung interessiert hat, sieht man aus dem Briefe, den Barrow am 13. März 1669 an Collins schrieb (Rigaud, *Correspondence of scientific men of the seventeenth century* **2**, Oxford 1841, S. 68—70). Die Erklärungen, die er darin seinem Freunde mitteilt, stimmen mit den zwei ersten Artikeln des gedruckten Textes des fraglichen Anhangs überein.

Es ist zu bedauern, daß sich auch Zeuthen durch die Cantorsche Behauptung zu einer unrichtigen Angabe hat verleiten lassen. In seiner Abhandlung: *Barrow, le maître de Newton* (Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1897, S. 591—592) bemerkt Zeuthen, nachdem er den Passus: „Facio saltem ex amici consilio" zitiert hat: „Que l'ami cité ici et ailleurs sans nom (. . . vir sane cum primis probus ast in hujusmodi negotiis flagellator improbus. — Préface particulière des Leçons géométriques) ne soit autre que Newton . . . c'est ce qui n'a jamais été revoqué en doute." Allein seit 1841 hat jeder Sachkundige gewußt (siehe die vorangehende Bemerkung), daß der „flagitator improbus" nicht Newton, sondern Collins war, und soviel ich weiß, gibt es gar keinen Anlaß zu vermuten, daß der zweimal genannte „amicus" eine andere Persönlichkeit als der „flagellator improbus" sei. Auch in seiner *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Leipzig 1903, S. 357, Z. 13—15) bemerkt Zeuthen auf Grund der unrichtigen Deutung des Wortes „amicus": „Jedenfalls sagt Barrow selbst, daß die Ratschläge Newtons auf die Ausarbeitung seines soeben erwähnten Werkes [*Lectiones geometricae*] von Einfluß gewesen seien."

Die Bemerkung (Z. 7—8): „Barrow selbst legte auf die geometrischen Vorlesungen nur geringes Gewicht" ist nicht ganz richtig. In betreff der Vorlesungen 6—12 sagt Barrow in seiner Vorrede: „alteras quas dixi septem conspectui tuo lubentius expono, nonnulla sperans in illis haberi, quae nec eruditiores piguerit inspicere."

G. Eneström.

3 : 147, siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 251. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 156,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 171. — **3 : 157,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 348—349. — **3 : 158,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 251—252. — **3 : 166,** siehe BM $\mathbf{9}_3$,

1908/9, S. 332. — **3 : 167,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 252—253. — **3 : 168, 171, 171—172,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 172—173. — **3 : 172,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 253—254. — **3 : 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 173,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 254. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 175,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 254—255. — **3 : 179,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 71—72. — **3 : 180,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 256. — **3 : 181,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 72—73. — **3 : 182,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 256. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241.

---

3 : 188. In betreff der unrichtigen Differentiationen von Wurzelgrößen, die im Briefe Leibnizens vom 21. Juni 1677 vorkommen, bemerke ich, daß Leibniz einige Wochen später auf diesem Gebiete einen anderen Fehler begangen zu haben scheint. In einem von Gerhardt (*Die Entdeckung der höheren Analysis,* Halle 1855, S. 143—145) herausgegebenen Entwurf vom 11. Juli 1677 behauptet Leibniz, wenn der Abdruck richtig ist, das Differential von $\sqrt[z]{w}$ sei $\frac{dw}{z\sqrt[z]{w}^{z-1}}$, während das richtige Ergebnis ja $\frac{dw}{zw^{z-1}}$ oder $\frac{dw}{z\sqrt[z]{w}^{z-1}}$ ist, und auch in einem anderen Entwurfe, der nach Gerhardt um dieselbe Zeit verfaßt wurde, kommt laut dem gedruckten Texte (a. a. O. S. 147) die unrichtige Behauptung vor. Allerdings kann hier ein wiederholter Schreibfehler vorliegen, aber meiner Ansicht nach ist es kaum angebracht, aus diesem unrichtigen Ergebnis ohne weiteres zu folgern, daß Leibniz „presque immédiatement après sa réponse à Newton, savait très bien différentier les quantités irrationnelles" (siehe H. G Zeuthen, *Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 229).

Ebensowenig kann ich mit Zeuthen einverstanden sein, wenn er (*Barrow, le maître de Newton*; Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1897, S. 605) bemerkt, Leibniz habe schon im November 1676 „indiqué d'une manière correcte comment il faut étendre les résultats de la différentiation des puissances aux racines". Allerdings scheint Leibniz hier anzugeben (siehe Gerhardt, a. o. O. S. 140—142), daß die Formel $d(x^e) = ex^{e-1}$ auch für negative und gebrochene Werte von e gilt, aber aus dem gedruckten Texte ersieht man nicht, daß er verstanden hat, seine eigene Regel für gebrochene Werte von e anzuwenden. Teils hat er die zwei Formeln $d(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $d(\sqrt{x}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$ angegeben, von denen die erste unrichtig, die zweite wegen des Minuszeichens auffällig ist, teils bringt er als Beispiele der Differentiation von Potenzen mit Bruchexponenten nur solche, in denen der Exponent $\frac{1}{2}$ ist, so daß das Ergebnis richtig wird, auch wenn man die falsche Formel $d(\sqrt[n]{x}) = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x}}$ anwendet. G. Enestrom.

---

3 : 195, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 311, 332—333; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 73. — **3 : 196,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 333. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 260—262. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. —

3 : 221, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 333. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 333—334. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 231,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 256—257 — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 334—335. — **3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 253,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 73—74; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 173—174. — **3 : 254, 258, 260,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 74—76. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 279,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 335—336. — **3 : 285,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1010/11, S. 257—258. — **3 : 286,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 76. — **3 : 290, 295,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 258—259. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 310,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 82, 259—261. — **3 : 310—311,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 82—83 — **3 : 312, 314, 316, 318, 319, 319—320,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 261—268.

---

3 : 319—320. Ich bin jetzt im Besitze eines Exemplares der Ausgabe 1722 des *Commercium epistolicum* und bringe hier unten zum Abdruck den Passus (S. 247) der „Annotatio", den ich in meiner früheren Bemerkung (BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 267) erwähnt habe:

> Methodus fluxionum utique non consistit in forma symbolorum. Et Keilius hoc notaverat anno 1711 (*pag.* 37, 238).

Wenn man nun bemerkt, 1. daß Seite 37 eine Stelle der „Recensio" enthält, die ausführlich die Newtonsche Bezeichnungsweise behandelt, 2. daß Seite 238 eine Bemerkung von Keill über diesen Gegenstand, und zwar aus dem Jahre 1711 vorkommt, so kann man meines Erachtens kaum umhin, den ersten Verweis auf die Worte „Methodus fluxionum utique non consistit in forma symbolorum", den zweiten Verweis auf die Worte: „Et Keilius hoc notaverat anno 1711" zu beziehen. Um die peinlichste Genauigkeit in betreff der Verweise zu beobachten, hätte Newton also schreiben sollen:

> Methodus fluxionum utique non consistit in forma symbolorum (*pag.* 37). Et Keilius hoc notaverat anno 1711 (*pag.* 238).

Will man indessen diese Erklärung, die meiner Ansicht nach die einzige natürliche ist, nicht gutheißen, kann man, wie ich schon in meiner früheren Bemerkung hervorgehoben habe, höchstens folgern, daß Newton eine besondere Stelle der „Recensio" als 1711 von Keill redigiert bezeichnet hat, während die Cantorsche Folgerung: „Also behauptet Newton, daß Keill der Verfasser des Originals der Recensio war" von einer Art ist, die nicht näher angegeben zu werden braucht.

G. Enestrom.

---

3 : 320—321, 321, 323, 326, siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 268—269. — **3 : 327,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 77; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 83—84. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 350,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 336. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 366,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 274—275. — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319. — **3 : 394,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 174—175, 269—270. — **3 : 395,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 270. — **3 : 397,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3 : 399,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 77—78. — **3 : 400,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 271. — **3 : 403,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 175. — **3 : 406,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 262; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 84. — **3 : 408,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 306. — **3 : 427,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 169. —

3 : 447, 455, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **457,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 271. — **3 : 461,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 337. — **3 : 468,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 271—272. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 272. — **3 : 475,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 79—80. — **3 : 476,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 169—170, 476. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95. — **3 : 481,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 79. — **3 : 482,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 178. — **3 : 496,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 337—338. — **3 : 497, 498,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309.

---

3 : 498. Da Herr Cantor hier bemerkt, daß Wolff im 5. Bande (1741) seiner *Elementa matheseos universae* den Streit zwischen Newton und Leibniz erzählt, erlaube ich mir, darauf aufmerksam zu machen, daß Wolff schon früher zweimal diesen Gegenstand behandelt hatte, nämlich teils in seinem *Mathematischen Lexikon* (Leipzig 1716, Sp. 283—288), teils in dem Anhange („Kurtzer Unterricht von den vornehmsten mathematischen Schrifften") der *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften,* deren erste Auflage 1710 erschien; in der dritten Auflage (Halle 1725) befindet sich die betreffende Stelle S. 47—61 und das letzte Aktenstück, das daselbst erwähnt wird, ist die *Historia fluxionum* Raphsons. G. Enestrom.

---

3 : 500, siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 84—87. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 507—509, 509,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 338—339.

---

3 : 510. Die zwei Bände des mathematischen Wörterbuches Saveriens erschienen nach den Titelblättern 1753 (nicht 1752). Ich gebe hier unten den vollständigen Titel wieder:

> Dictionnaire universel de mathématique (!) et de physique (!), où l'on traite de l'origine, du progrès de ces deux sciences & des arts qui en dépendent, & des diverses révolutions qui leur sont arrivées jusqu'à notre tems; avec l'exposition de leurs principes, & l'analyse des sentimens des plus célèbres auteurs sur chaque matiere. Paris M DCCLIII.
>
> 4°. **1** : (4) + XXVII + (1) + 483 S. + 51 Taf. — **2** : (4) + 486 + (2) S. + 50 Taf. — S. 486 des 2. Bandes steht noch einmal das Druckjahr 1753.

Am Ende des 2. Bandes befindet sich (S. 481—484) eine „Table alphabétique des plus célébres mathématiciens & physiciens qui ont fleuri depuis l'origine du monde jusques à notre tems, & dont on a analysé les opinions, ou exposé les découvertes dans cet ouvrage". Das Verzeichnis, das alphabetisch geordnet ist, umfaßt etwa 700 Namen; zuweilen ist es ein wenig schwierig, den richtigen Namen zu erkennen, z. B. bei „Elbroner" (= Heilbronner).

Z 2 ist „1734" statt „1732" zu setzen (vgl. BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309).

G. Enestrom.

---

3 : 521, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206.

---

3 : 537. Warum Saccheri das Buch von Malézieu „kaum gekannt haben kann" (Z. 9—10) verstehe ich nicht. Das Buch erschien schon 1713 in Padua in lateinischer Übersetzung und eine neue Auflage dieser Übersetzung wurde daselbst 1734 herausgegeben. Hieraus geht ja hervor, daß das

Buch zu Saccheris Zeit gerade im nördlichen Italien sehr verbreitet war. Ich gebe hier unten den vollständigen Titel der ersten lateinischen Auflage wieder:

> Serenissimi Burgundiae ducis elementa geometrica Ex Gallico sermone in Latinum translata ad usum seminarii Patavini. Accessere Quatuor Propositiones ad Trigonometriam apprime utiles. Insuper Introductio ad Algebrae applicationem ad Geometriam, auctore Guisneo, Nunc primum latine reddita. [Buchdruckermarke] Patavii, Ex Typographia Seminarii, MDCCXIII. Apud Joannem Manfrè. Superiorum Permissu, & Privilegio. 4°, (20) + 158 + 60 S. + 20 Taf.

Der Titel der Auflage 1734 unterscheidet sich von dem der ersten nur durch das Druckjahr „MDCCXXXIV" statt „MDCCXIII" und einige unbedeutende, rein typographische Abweichungen; auch die Seitenzahlen stimmen überein.

Beiläufig bemerke ich, daß nach dem Vorworte die im Titel erwähnten „Quatuor propositiones ad trigonometriam apprime utiles" (S. 136—138) von Jakob Hermann herrühren, der bis Ende April des Jahres 1713 Professor der Mathematik an der Universität in Padua war. G. Enestrom.

---

3 : 550, siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 87. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 562,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 176. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 566,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 176. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 170. — **3 : 575,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3 : 583,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 80; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 176—177.

---

3 : 584. Der erste Brief Eulers an Nikolaus I Bernoulli, worin die Frage der Zerlegung jeder algebraischen rationalen Funktion in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades berührt wird, ist vom 1. September 1742. Hier drückt Euler seinen Satz auf folgende Weise aus (*Opera postuma* **1**, Petropoli 1862, S. 525):

> Omnis expressio algebraica $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. quotcunque fuerit dimensionum, si non in factores simplices $p + qx$ omnes reales resolvi queat, ea saltem in factores trinomiales $p + qx + rxx$, qui omnes sint reales, semper resolubilis existat.

Euler sagt, daß er von der Richtigkeit des Satzes überzeugt sei, obgleich er noch keinen allgemeinen Beweis gefunden habe („etiamsi eam generaliter demonstrare non valeam").

Auch in seinem folgenden Brief vom 10. November 1742 (a. a. O. S. 528—536) beschäftigt sich Euler mit diesem Satze, und aus dem, was er (a. a. O. S. 529—530) sagt, geht hervor, daß er noch nicht weiß, wie der Satz bewiesen werden soll, wenn die gegebene Funktion fünften oder höheren Grades ist. G. Enestrom.

---

3 : 585. Der Z. 14—15 erwähnte Brief ist ein Antwortschreiben auf einen Brief Eulers vom 14. Mai 1743, und in diesem Briefe berührt Euler (*Opera postuma* **1**, Petropoli 1862, S 536—537) die Frage der Zerlegung eines Polynoms in reelle Faktoren, ohne der Lösung der Frage näher zu kommen. Dagegen ist der nächste Brief Eulers (vom 4. Februar 1744) von Interesse, weil daraus (a. a. O. S. 539—540) hervorgeht, daß er schon Anfang 1744,

und zwar auf Grund einer Bemerkung von Nikolaus Bernoulli („reliqua vero, quae hinc deduces, negotium, quod agitabam, prorsus conficiunt") den vermeintlichen Beweis gefunden hatte, den er 1751 veröffentlichte (*Recherches sur les racines imaginaires des équations;* Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 1749, gedruckt 1751, S. 247—250), und worüber Herr Cantor S. 602—603 berichtet. Das lateinische Original der Berliner Abhandlung wurde nach C. G. J. Jacobi am 10. November 1746 vorgelegt. G. Enestrom.

---

3 : 586, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 587, 590—591,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 88—89. — **3 : 593,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 214. — **3 : 599, 600—601,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 177—178.

---

3 : 603. Aus den Worten (Z. 8—9): „Bei Euler ist der Beweis für den Fall $m = 2$ erbracht, den Gauss dann verallgemeinerte", wird der Leser leicht versucht anzunehmen, daß Euler den fraglichen Satz nur für Polynome vierten Grades behandelte und für höhere Polynome den Beweis höchstens andeutete. Aber in Wirklichkeit hat sich Euler nicht auf den Fall $m = 2$ beschränkt. Nachdem er diesen Fall erledigt hatte, und zwar etwa wie Herr Cantor Z. 9—23 angibt, behandelte er nacheinander folgende Sätze: „Toute équation du 8me degré est toujours résoluble en deux facteurs réels du quatrième degré"; „toute équation du 16me degré est toujours résoluble en deux facteurs réels du 8me degré"; „toute équation d'un degré, dont l'exposant est une puissance du binaire comme 2^n (n étant un nombre entier plus grand que 1) est résoluble en deux facteurs réels du degré 2^{n-1}". Da nun ein Polynom m^{ten} Grades immer durch Vervielfachung mit einer Potenz von x eine Gradzahl von der Form 2^n bekommen kann, betrachtete Euler seinen Satz als für jedes m bewiesen.

Natürlich ist der Eulersche Beweis für $m > 2$ unvollständig, aber dies beruht nicht auf der Eulerschen Darstellung, sondern auf der Natur des Beweises, und Gauss hat selbst nachgewiesen, daß aus diesem Grunde der für $m = 2$ richtige Beweis nicht für $m > 2$ verallgemeinert werden kann.

G. Enestrom.

---

3 : 609, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 339—340. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 615,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 178—179. — **3 : 616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 617,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 80—81. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 655,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S 275—176. — **3 : 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 666,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 179. — **3 : 667,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 675,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 340—341. — **3 : 682,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 688,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 341; $\mathbf{10}_3$. 1909/10, S. 276. — **3 : 689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 691,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 272—273. — **3 : 692,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 693,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 341. — **3 : 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 700,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 171, 342. — **3 : 702,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 171. — **3 : 703, 705,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 342—343. — **3 : 718,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 273. — **3 : 722,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3 : 726—728,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 343—344. — **3 : 731—732,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 273—274. — **3 : 736,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 749,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3 : 750,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901,

S. 446. — **3 : 753,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172—174. — **3 : 754,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 344—345. — **3 : 758,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 345—346. — **3 : 759,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 762,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 346. — **3 : 763,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 180. — **3 : 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 773,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 174—175, 346—347. — **3 : 774,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 787, 789,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 274. — **3 : 792,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 347. — **3 : 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 813,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 348; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 180—181. — **3 : 819,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 870—871,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 81—82. — **3 : 871,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 275. — **3 : 877—878,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 181. — **3 : 880,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 264—265; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 83. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 348—349. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 265. — **3 : 894,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 349—350; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 89—90. — **3 : 897,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 83. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen.

152. Über die Bedeutung des Termes „radix relata" und verwandter Ausdrücke im fünfzehnten Jahrhundert. In meiner Anfrage *Über zwei ältere Benennungen der fünften Potenz einer Größe* (Biblioth. Mathem. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 324) habe ich im Vorübergehen bemerkt, daß der Ausdruck „radice relata" in einem von Libri veröffentlichten Traktate vorkommt, der meiner Ansicht nach wahrscheinlich aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts herrührt. Der Ausdruck bedeutet die Wurzel, deren Exponent 5 ist, und dieselbe Bedeutung hat der Ausdruck bei Paciuolo (siehe *Summa de arithmetica,* Venedig 1494, Bl. 115[b]). Da man weiß, daß im 15. Jahrhundert die 5. Potenz einer Größe „primo relato" genannt wurde, kann die Anwendung des Ausdruckes „radice relata" in einem entsprechenden Sinne als natürlich betrachtet werden.

Aber etwa gleichzeitig, und ebenfalls in Italien, wurde „radix relata" in einer anderen Bedeutung benutzt. L. Birkenmajer hat kürzlich Auszüge aus einem vor 1464 verfaßten Traktate von G. Bianchini mit dem Titel „Flores Almagesti" veröffentlicht (siehe *Flores Almagesti. Ein angeblich verloren gegangener Traktat Giovanni Bianchini's;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Cracovie 1911, S. 274—275), worin folgende Stellen vorkommen:

> 4 in se ductus producit 16. qui ductus in radicem de 4., producit 32. cuius radix relata est 4. . . . radix cubice relata de 128 est 8. . . . radix relata relatarum de 4096 est 32.

Nun ist ja $32 = 4^{2\frac{1}{2}}$, $128 = 8^{2\frac{1}{3}}$, $4096 = 32^{2\frac{2}{5}}$, so daß bei Bianchini die drei Ausdrücke „radix relata", „radix cubice relata", „radix relata relatarum" Wurzeln bedeuten, deren Exponenten bzw. $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$ sind. Warum gerade diese Wurzeln besondere Benennungen bekommen haben, und nach welchen Gründen die Ausdrücke gebildet worden sind, geht aus den veröffentlichten Auszügen nicht hervor.

Merkwürdigerweise kommt ein verwandter Ausdruck bei Paciuolo vor, und zwar unter noch auffälligeren Umständen. Nachdem dieser die Bedeutung des Ausdruckes „radice relata" (siehe oben) erklärt hat, fügt er hinzu:

Per ℞ pronica communamente se intende numero multiplicato in se e sopra suo quadrato posto la ℞ de ditto numero de questa summa quel numero sia ditta ℞ pronica. Commo .9. multiplicato in se fa .81. e sopra .81. posto la ℞ de .9. che e .3. fa .84. La ℞ pronica de .84. fia ditta da pratici .9. e cosi in molti.

Hier bedeutet also „radice pronica" der Zahl 84 eine Größe, die der Gleichung

$$x^2 + \sqrt{x} = 84$$

genügt. Bekanntlich werden die zwei Wörter „relato" und „pronico" bei Ghaligai als Benennungen der 5. und 7. Potenz einer Größe benutzt (siehe *Pratica d'arithmetica,* Florenz 1548, Bl. 71[b]).

Es wäre von Interesse, nähere Auskunft über den Ursprung der von Bianchini und Paciuolo benutzten Wurzelnamen zu bekommen.

G. Eneström.

---

153. Leibniz und die Newtonsche „Analysis per aequationes numero terminorum infinitas". Bekanntlich geht aus den Handschriften Leibnizens hervor, daß dieser im Oktober und November 1675 wichtige Resultate auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung erzielt hatte, und man hat hervorgehoben (vgl. F. Giesel, *Die Entstehung des Newton-Leibniz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung,* Delitsch 1866, S. 4), daß Leibniz dabei, soweit bekannt, nicht durch irgendwelche von außen kommende Hilfsmittel oder Winke unterstützt worden sei. Insbesondere dürfte bisher allgemein angenommen sein, daß Leibniz frühestens im Oktober 1676 von der Abhandlung Newtons *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* Kenntnis bekam. Indessen scheint es, wie ich schon bei einer anderen Gelegenheit (siehe Biblioth. Mathem. $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 256) bemerkt habe, als ob Tschirnhaus 1675 entweder in London oder kurze Zeit nach seiner Abreise von London eine Abschrift oder einen Auszug aus dieser Abhandlung bekommen hätte, und wenn dies wirklich der Fall war, ist es fast undenkbar, daß Leibniz die Abschrift nicht gesehen haben würde, weil Tschirnhaus und Leibniz im Herbst 1675 zusammen in Paris arbeiteten. Aber die *Analysis* enthält so wichtige Aufschlüsse über die Newtonsche Fluxionsmethode, daß es für die Beurteilung der Selbständigkeit Leibnizens bei der Erfindung der Differentialrechnung von großem Belang ist, endgültig zu entscheiden, ob meine Deutung des Briefes von Collins an Oldenburg vom 30. September 1675 richtig oder unrichtig sei.

Wie ich schon an der erwähnten Stelle hervorgehoben habe, enthielt dieser Brief (siehe Rigaud, *Correspondence of scientific men of the seventeenth century* **1**, Oxford 1841, S. 211—213) die zwei folgenden Passus:

> whereas he [Tschirnhaus] saith he did not see the same series in Mr. Newton's letter; that is true, but nevertheless his method is as well applicable to a sector of a circle as to a zone, arch or segment . . .
> . . . but if the square root of the 3rd and cube root of the 4th be extracted, according tho the first theorem in Mr. Newtons letter . . .

Aus diesen Zeilen habe ich gefolgert, teils daß „Mr. Newton's letter" höchstwahrscheinlich die *Analysis* selbst war, teils daß Tschirnhaus wahr-

scheinlich im September 1675 in Paris eine Abschrift (oder einen Auszug) der *Analysis* zur Verfügung hatte.

Die erste Folgerung dürfte sehr nahe liegen. Die *Analysis* wurde 1669 brieflich durch Barrow an Collins gesandt, und dieser konnte also die Abhandlung mit Recht „Mr. Newtons letter" nennen. Ferner enthält die *Analysis* einen Abschnitt („Applicatio praedictorum ad reliqua istiusmodi Problemata"), worin durch Wurzelausziehung und Integration eine unendliche Reihe für die Länge eines Kreisbogens hergeleitet wird, welche Reihe von der Leibnizschen verschieden ist, so daß Collins sehr wohl auf diesen Abschnitt hinweisen könnte. Endlich kennt man keinen anderen von Newton vor dem 30. September 1675 geschriebenen Brief, für welchen der Hinweis von Collins paßt. Freilich spricht Collins von „dem ersten Satze des Newtonschen Briefes", und der oben erwähnte Abschnitt wird nicht von Newton als Satz 1 bezeichnet.

Eine eingehendere Untersuchung über die Frage, ob Collins wirklich die Newtonsche *Analysis* gemeint hat, ist also wünschenswert.

Meine zweite Folgerung stütze ich darauf, daß Tschirnhaus, wenn er nicht in Paris eine Abschrift (oder einen Auszug) von „Mr. Newtons letter" zur Verfügung hatte, den Brief in London sehr eingehend studiert haben muß, was ich als wenig wahrscheinlich betrachte. Damals war Tschirnhaus ja nur 24 Jahre alt und sicherlich noch nicht weit in die höhere Mathematik eingedrungen, so daß man kaum annehmen kann, daß er sich nach vielen Monaten des genauen Inhaltes einer von ihm eingesehenen Arbeit aus der Reihenlehre erinnert hätte. Dagegen ist es sehr natürlich, daß er, wenn er nach Paris eine Abschrift des Newtonschen Briefes mitbrachte, dieselbe seinem Freunde Leibniz zum Einsehen überließ, und daß dieser ihn auf die Verschiedenheit der zwei Reihen aufmerksam machen sollte.

Indessen kann diese Folgerung offenbar nur als wahrscheinlich bezeichnet werden; denn es ist nicht unmöglich, daß Tschirnhaus den kurzen Abschnitt „Applicatio praedictorum ad reliqua istiusmodi Problemata" der *Analysis* recht genau studiert hatte. Hierzu kommt noch ein anderer Umstand, wodurch die Richtigkeit meiner Folgerung verdächtig scheint, nämlich daß man im *Commercium epistolicum* nichts über das Übersenden einer Abschrift der *Analysis* an Tschirnhaus findet. Allerdings kann dieser Umstand darauf beruhen, daß die Herausgeber des *Commercium epistolicum* den Brief Newtons vom 10. Dezember 1672 mit „Mr. Newtons letter" verwechselten (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 256); aber diese Erklärung ist natürlich nicht als endgültig zu betrachten. Ebensowenig entscheidend ist der Umstand, daß W. W. R. Ball in seinem *Account of the history of mathematics* (siehe die Ausgabe London 1908, S. 357—358) in betreff der *Analysis* bemerkt: „It is known that a copy of Newton's manuscript had been sent to Tschirnhausen in May, 1675"; denn nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn Ball beruht diese Angabe eben auf einer Verwechslung der *Analysis* mit dem Brief Newtons vom 10. Dezember 1672.

Eine nähere Untersuchung über die Frage, ob Tschirnhaus wirklich 1675 eine Abschrift der *Analysis* bekam, ist also wünschenswert.

G. Enestrom.

Rezensionen.

T. L. Heath. Diophantus of Alexandria. A study in the history of greek algebra. Second edition. With a supplement containing an account of FERMAT's theorems and problems connected with DIOPHANTine analysis and some solutions of DIOPHANTine problems by EULER. Cambridge, University press 1910. 8^0, VI + (1) + 387 S. [12½ Sh.]

Die erste Auflage dieser Arbeit erschien 1885 und enthielt 259 Druckseiten. Während der Jahre 1885—1910 sind, wie HEATH in seinem Vorwort zur zweiten Auflage hervorhebt, viele Untersuchungen über DIOFANTOS ausgeführt worden, und besonders ist dabei die DIOFANTOS-Ausgabe von P. TANNERY (1893—1895) zu nennen. Diese Untersuchungen hat HEATH bei der Vorbereitung der neuen Auflage seiner Arbeit berücksichtigt, so daß er einige Abschnitte neu bearbeitet hat, und überdies hat er auf die spätere Geschichte gewisser DIOFANTischer Probleme Bezug genommen, indem er als Supplement einen Bericht über Lösungen solcher Probleme bei FERMAT und EULER bringt.

Die eigentliche Arbeit besteht aus einer ausführlichen Einleitung (S. 1—127) und einen ebenso ausführlichen Bericht über die zwei uns aufbewahrten Schriften des DIOFANTOS, nämlich die Arithmetik (S. 129—246, 260—266), und das Bruchstück über die Vieleckszahlen (S. 247—259).

Die Einleitung enthält 6 Kapitel. Im ersten Kapitel (S. 1—13) faßt HEATH das wenige zusammen, das wir über die Persönlichkeit des DIOFANTOS und über seine Schriften wissen; bei dieser Gelegenheit wird auch die schwierige Frage: „Was enthielten die 7 verlorenen Bücher der Arithmetik" untersucht, und HEATH billigt dabei die von P. TANNERY gegen NESSELMANN verteidigte Ansicht, daß die verlorenen Bücher eben die letzten und die schwierigsten sind. Das zweite Kapitel (S. 14—31) bringt eine Übersicht der Handschriften, der Ausgaben, der Übersetzer und der Kommentatoren des DIOFANTOS; in betreff der Übersetzer verweilt HEATH besonders bei XYLANDER und hebt die Verdienste seiner Übersetzung hervor. Im dritten Kapitel (S. 32—53) beschäftigt sich HEATH mit den mathematischen Termen und Zeichen bei DIOFANTOS, und benutzt die Gelegenheit, um auch Notizen über die spätere Entwicklung der algebraischen Zeichensprache zu geben. Das vierte Kapitel (S. 54—98) ist den von DIOFANTOS angewandten Methoden gewidmet; bekanntlich hat schon NESSELMANN diesen Gegenstand eingehend behandelt, und HEATH wendet sich zum Teil polemisch gegen NESSELMANN. Dann folgt ein Kapitel (S. 99—110) über die von DIOFANTOS zitierten „Porismen" und anderen Sätze, die diesen ähnlich sind; daß die Porismen wirklich eine besondere Schrift das DIOFANTOS bildeten, hält HEATH für nicht unwahrscheinlich. Das letzte Kapitel (S. 111—127) bezieht sich auf den Platz, den DIOFANTOS in der Geschichte der Mathematik einnimmt.

Der Bericht über die Arithmetik gibt Auskunft über den Inhalt der einzelnen Sätze der uns aufbewahrten sechs Bücher, und ebenso wird das Frag-

ment über die Vieleckszahlen erläutert. Als Ergänzung des Berichtes wird eine tabellarische Übersicht der Sätze in modernen Zeichen hinzugefügt.

Bei der Bearbeitung der neuen Auflage hat sich HEATH offenbar bemüht, von den neuesten mathematisch-historischen Untersuchungen möglichst genaue Kenntnis zu nehmen und sie zu verwerten. Meines Erachtens haben seine Bemühungen auch guten Erfolg gehabt, und es sind eigentlich nur seine Notizen (S. 38—39) über die Geschichte der algebraischen Zeichensprache am Anfange der neueren Zeit, die mir weniger gelungen zu sein scheinen. Schon am Ende des 15. Jahrhunderts, also lange Zeit vor VIÈTE, hatte man Zeichen für mehr als eine Unbekannte, und im Laufe des 16. Jahrhunderts entwickelte sich die Zeichensprache noch weiter, so daß man nicht nur eine beliebige Zahl von Unbekannten, sondern auch ihre Potenzen bezeichnen konnte. PACIUOLO nennt die zweite Unbekannte „quantita" (siehe *Summa de arithmetica*, Venedig 1494, Bl. 148^{b}), während die erste „cosa" heißt, und er fügt hinzu, daß in den „libri pratichi antichi" die zweite Unbekannte „cosa seconda" genannt wurde; man hätte also schon damals in den Rechnungen eine beliebige Zahl von Unbekannten benutzen können. Als Zeichen der zweiten Unbekannten bediente sich PACIUOLO einer Abbreviatur des Wortes „quantita" und RUDOLFF vereinfachte dieses Zeichen, indem er nur q schrieb (siehe *Behend vnnd hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre*, Straßburg 1525, Bl. R 1^{a}). Etwas später benutzte STIFEL (siehe *Arithmetica integra*, Nürnberg 1544, Bl. 251^{b}) 1A, 1B, 1C, usw. für die zweite, dritte, vierte usw. Unbekannte, und BUTEO (siehe *Logistica*, Lyon 1559, S. 189—196) wandte wesentlich dieselbe Bezeichnungsweise an. Wenn in den Rechnungen mit mehreren Unbekannten auch ihre Potenzen vorkamen, bezeichnete STIFEL das Quadrat von 1A teils (a. a. O.) durch 1Aʒ, teils (siehe *Die Coss Christoph Rudolffs*, Königsberg 1553—1554, Bl. 61^{b}) durch 1AA, und auf diese Weise konnte er die Potenzen der zweiten, dritten usw. Unbekannten ebenso leicht wie die Potenzen der ersten Unbekannten bezeichnen. Ich kann also nicht mit dem Schluß der folgenden Bemerkung (S. 39) von HEATH einverstanden sein: „This system [nämlich von VIÈTE] . . . has the infinite advantage that by means of it we can use in one and the same solution any number of unknown quantities. This is absolute by impossible with the notation used by . . . the earlier algebraists."

Sonst sind die Bemerkungen, die ich bei der Durchsicht der Arbeit von HEATH notiert habe, von untergeordneter Bedeutung. Nur beispielsweise bringe ich hier unten zum Abdruck einige derselben.

S. 20. HEATH bemerkt, daß das exakte Datum der *Oratio introductoria* des REGIOMONTANUS nicht bekannt ist. Allein nach A. FAVARO (*Le matematiche nello studio di Padova dal principio del secolo XIV alla fine del XVI*, Padova 1880, S. 36) begann REGIOMONTANUS seine Vorlesung am Ende des Jahres 1463, das also das Datum der *Oratio introductoria* sein dürfte, und endete die Vorlesung 1464. — Der Brief an BIANCHINI, den HEATH in der Fußnote 3 zitiert, ist seit 1902 den Historikern der Mathematik leichter zugänglich in den Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **12**, S. 242—266.

S. 31. Außer den von HEATH erwähnten Übersetzungen des DIOFANTOS dürfte es noch eine holländische geben. D. BIERENS DE HAAN (*Bibliographie néerlandaise . . . sur les sciences mathématiques*, Rome 1883, S. 134)

verzeichnet unter Fr. van der Huips: *De stel-konstige Boecken Diophanti Alexandrini* (Dordrecht 1654, 70 S. 8^0, neue Auflage, Amsterdam 1661) und J. W. Müller (*Auserlesene mathematische Bibliothek,* Nürnberg 1820, S. 254) erwähnt eine Schrift: *Diophantes van Alexandrien Stelkonst, in de Nedertuytsche tael vertaelt door Fr. van Huips* (Heusden 1754 [!]). Ob es sich um drei Auflagen derselben Schrift handelt, weiß ich nicht. — Eine schwedische freie Übersetzung des 1. Buches der Arithmetik besorgte P. Glimstedt (*Första boken of Diophanti Arithmetica. Algebraisk öfversättning,* Lund 1855, (2) + II + 22 S. 8^0)

S. 53. Mit der Bemerkung: "Such equations then as lead to surd . . . roots he [Diophantus] regards as useless for his purpose" bin ich nicht ganz einverstanden. Allerdings ist für Diofantos die Hauptaufgabe, rationale Werte der unbekannten Größen zu finden, aber daß er nicht unter allen Umständen Gleichungen, deren Wurzeln nicht rational sind, als unnütz betrachtet, hebt Heath selbst einige Zeilen weiter unten hervor, indem er auf die Lösung des 30. Problems des 5. Buches hinweist.

S. 121. In betreff des Ursprunges der von Heiberg und Zeuthen (Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 118—134) veröffentlichten Aufgaben der unbestimmten Analytik schließt sich Heath der Ansicht Zeuthens an, daß die Aufgaben wahrscheinlich aus der Zeit zwischen Euklides und Diofantos herrühren. Ich erlaube mir zu bemerken, daß die Aufgaben sehr wohl aus einer weit späteren Zeit herstammen und indisch-arabischen Ursprunges sein könnten (vgl. Jahrb. über d. Fortschr. d. Mathem. **38**, Berlin 1910, S. 59).

Das Supplement bezieht sich, wie ich schon bemerkt habe, auf Lösungen Diofantischer Probleme bei Fermat und Euler. Auf Fermat beziehen sich die Abschnitte: Über Darstellung von Zahlen durch Ausdrücke von der Form $ax^2 \pm by^2$; über die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ (auch die ältere Geschichte dieser Gleichung wird behandelt); über rationale rechtwinklige Dreiecke; über einige andere Probleme bei Fermat; über dreifache Gleichheiten. Von Euler hat Heath 17 Probleme entnommen, vorzugsweise über Ausdrücke, die gleichzeitig Quadrate sein sollen. Wenn man sich erinnert, daß wir noch keine ausführliche Geschichte der Zahlentheorie besitzen, kann das Supplement als eine dankenswerte Vorarbeit zu einer solchen Geschichte betrachtet werden. Ob diese Vorarbeit durch das Einfügen derselben in die Monographie über Diofantos einen passenden Platz bekommen hat, sei dahingestellt.

Zwei Register, das eine ein griechisches Sachregister, das andere ein englisches Sach- und Namenregister, beenden die neue Auflage.

Stockholm. G. Enestrom.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ahrens, 16.
Alasia, 8, 67.
Al-Hadschdschadsch, 32.
Al-Narizi, 32.
André, 118.
Archimedes, 23.
Auerbach, 3.
Ball, R. S., 100.
Barrau, 5.
Besthorn, 32.
Bianchi, 114.
Bigourdan, 45.
Billy, 56.
Birkenmajer, 39.
Borel, 109.
Braytzeff, 115.
Cajori, 59, 66.
Cannon, Annie, 89.
Cantor, 4, 71.
Celoria, 105.
Ceretti, 28.
Dannemann, 10.
Del Gaizo, 52.
Delisle, 62.
Demoulin, 94.
Doublet, 62, 65.
Duhem, 41.
Eibe, Thyra, 54.
Ekstrand, 26.
Eneström, 1, 53, 120.
Engel, 76.
Euklides, 32.
Euler, 63, 64.
Faraut, 15.
Favaro, 47—50.
Feddersen, 78.
Fergola, 105.
Fleet, 29, 30.
Fuss, 63.
Galán, 51.
Geer, 58
Goldbeck, 21.
Gorczyński, 108.
Gram, 110.
Guimarães, 13.
Gunnell, 119.
Günther, 99
Halsted, 81.
Haskins, 35.
Hayashi, 61.
Heath, 19, 27.
Heiberg, 23, 24, 32, 34, 37.
Hensel, 73, 75.
Hilbert, 97.
Jiménes Rueda, 44.
Jolles, 114.
Jouguet, 11.
Karpinski, 36, 40.
Kewitsch, 17.
King, Elisabeth, 112.
Klein, 68.
Königsberger, 79.
Kučera, 86.
Kummer, 75.
Laisant, 95.
Lampe, 91.
Lebon, 82.
Leibniz, 60.
Lind, 7.
Lorey, 102.
Loria, 2, 9, 113.
Maggi, 98.
Meth, 74.
Meyer, Kirstine, 54
Milhaud, 6.
Miller, 121.
Morduchai-Boltowskij, 84
Müller, Karl H., 69.
Müsebeck, 77.
Navarre, 62.
Novak, 107.
Octavio de Toledo, 14.
Oliva, 43.
Paoli, 55.
Perron, 117.
Picard, 109.
Poincaré, 81.
Poske, 92.
Possé, 93.
Reindl, 80.
Ricci, 85.
Riecke, 92.
Riehl, 46.
Ristenpart, 111.
Ritter, 60.
Rogovskij, 103.
Römer, 54.
Rothe, 3.
Schaewen, 56.
Schlesinger, 72.
Schotten, 83.
Schumacher, 57.
Simon, 31, 38.
Smith, Edv., 87.
Sobotka, 101.
Somigliana, 98.
Sommerfeld, 96.
Springer, 12.
Stäckel, 64
Sturm, 42.
Thaer, 20.
Torelli, 85.
Veillon, 90.
Vogt, 18.
Voigt, 70.
Volterra, 113.
Vrána, 25.
Weyl, 97
Wiedemann, 34.
Wisk, 97.
Würschmidt, 33.
Zeuthen, 22.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1

11_3 (1910/11): 3. — [Rezension des Bandes 10_3:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_3, 1911, 335—337. (H. Bosmans.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2

13 (1911): 1—2.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von Felix Auerbach und R. Rothe. Leipzig, Teubner. [3

2 (1911). XI + 567 S. + Porträt. — [7 Mk.] — [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, *101*. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_3, 1911, 277—279. (P. M.) — L'enseignement mathém. **13**, 1911, 253. — Mathesis 1_4, 1911, 186—187. (P. M.)

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 233—249. (G. Eneström, A. Favaro.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 249—275. (G. Eneström.) [4

***Barrau, J. A.,** Over de ontwikkelingswijze der wiskunde. Delft, Waltman 1909. 8°, 29 S. [5

***Milhaud, G.,** Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique. Paris, Alcan 1911. [6

8°, 235 S. — [5 fr.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 1168—1169 (K. Böhm.)

Lind, B., Über das letzte Fermatsche Theorem (1910). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. **22**, 1911; Lit.-Ber. 29—30. (Schrutka.) [7

Alasia, C., Euclidei e non euclidei. [8
Rivista di fisica **20**, 1909, 183—224. — Über die Geschichte der nichteuclidischen Geometrie.

Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe. Aufl. 2. 1—2 (1910—1911). [Rezension des 1. Teiles:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 545—546. (C. L. E. Moore. — [Rezension des 2. Teiles:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 19_3, 1911, 633—636. (H. Bosmans.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 545—546. (C. L. E. Moore.) — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, *99*. (F. Schütte.) — Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 179—180. (H. Wieleitner.) — Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 156—162. (E. Lacour.) [9

Dannemann, F., Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung. 1 (1910). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **42**, 1911, 389—390. (E. Roth.) [10

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. 1—2 (1908—1909). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. **22**, 1911; Lit.-Ber 37—38. (Lampa.) [11

***Springer, P. H.,** Die Lichttheorie in ihrer geschichtlichen Entwicklung. I—II. Linz 1907—1908. [12
8°, 53 + 51 S.

Guimarães, R., Les mathématiques en Portugal. Ed. 2 (1909). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, *130*. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1911, 5—6. (G. L.) — L'intermédiaire des mathématiciens **18**, 1911, Suppl. n° 1, S 2. (A. B.) [13

Octavio de Toledo, L., La historia de la matemática pura en España. [14
Madrid, Soc. matem., Revista **1**, 1911, 62—65.

Faraut, F. G., Astronomie cambodgienne (1910). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_3, 1911, 281—284. (H. Bosmans.) [15

Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Aufl. 2. 1 (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 1149—1150. (E. Lampe.) — Monatsh. für Mathem. **22**, 1911; Lit.-Ber. 32. (Schrutka.) [16

b) Geschichte des Altertums.

Kewitsch, G., Zur Entstehung des 60-Systems. [17
Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 165—168.

Vogt, H., Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts (1910). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_3, 1911, 330—335. (H. Bosmans.) [18

Heath, T. L., Osservazioni storiche sopra la scoperta degli irrazionali. [19
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1911, 1—4.

Thaer, C., Über die Würfelverdoppelung des Archytas. [20
Jena, Mathem. Seminar, Bericht 1908/9, 13—15 + Taf.

***Goldbeck, E.,** Die geozentrische Lehre des Aristoteles und ihre Auflösung. Berlin, Weidmann 1911. [21
8°, 27 S. — [1 Mk.]

Zeuthen, H. G., Sur la constitution des livres arithmétiques des éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité (1910). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_3, 1911, 330—335. (H. Bosmans.) [22

Archimedis Opera omnia. Iterum edidit J. L. Heiberg. 1 (1910). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 155—156. (P. D., Er. L.) [23

***Heiberg, J. L.** [Eine neue Schrift des Archimedes]. Odessa 1908. [24
8°, XV + 27 + 4 S. + Bildnis. — Russisch.

***Vrána, F.** [Die von Archimedes dem Eratosthenes gegebene Erläuterung der mathematischen Methoden der Forschung]. [25
[Programm des Gymnasiums in] Prossnitz 1909, 3—17. — Böhmisch.

Ekstrand, V., Heron från Alexandria. [26
Tidskrift för landtmäteri 3, 1911, 6—21. — Bericht über den Traktat *Περὶ διόπτρας*.

Heath, Th. L., Diophantus of Alexandria Ed. 2 (1910). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **32**, 1911, 1977—1980. (K. Bopp.) — The americ. mathem. monthly **18**, 1911, 48. (F.) [27

c) Geschichte des Mittelalters.

Ceretti, U., Sulla origine delle cifre numerali moderne. I. [28
Rivista di fisica **19**, 1909, 503—517; **20**, 1909, 285—300, 381—413, 479—488.

Fleet, J. F., Aryabhata's system of expressing numbers. [29
Asiatic soc., Journal 1911, 109—126.

Fleet, J. F., The use of the abacus in India. [30
Asiatic soc., Journal 1911, 518—521.

Simon, M., Zu Hwarizmi's hisab al gabr wal muqabala. [31
Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 202—203.

Besthorn, R. O. et **Heiberg, J. L.,** Codex Leidensis 399, 1. Euclidis elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. II: 1—2, III: 1 (1900—1910). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 277—280. (H. Suter.) [32

Würschmidt, J., Über die Brennkugel. [33
Monatsh. für den naturwiss. Unterr. **4**, 1911, 98—113. — Über eine Arbeit von Kamal al Din al Farisi.

Heiberg, J. L. und **Wiedemann, E.,** Eine arabische Schrift über die Parabel und parabolische Hohlspiegel. [34
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 193—208.

Haskins, Ch. H., Adelard of Bath. [35
The english historical review 1911, 491—498.

Karpinski, L. C., Robert of Chesters translation of the algebra of Al-Khowarizmi (1911). [Résumé:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 522. [36

Heiberg, J. L., Noch einmal die mittelalterliche Ptolemaios-Übersetzung. [37
Hermes **46**, 1911, 207—216.

Simon, M., Zur indischen Trigonometrie.
Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 202. [38

Birkenmajer, L., Flores Almagesti. Ein angeblich verloren gegangener Traktat Giovanni Bianchini's. [39
Cracovie, Acad. d. sc., Bulletin 1911 (sc. mathém.), 268—278.

Karpinski, L. C., An italian algebra of the fifteenth century. [40
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 209—219.

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. 1—2 (1906—1909). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 484—488. (D. E. Smith.) [41

d) Geschichte der neueren Zeit.

Sturm, R., Koppernicus ist deutscher Nationalität. [42
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, 161—167.

***Oliva, A.,** Sulla soluzione dell' equazione cubica di Tartaglia. Studio storico-critico. Milano 1909. [43
8°, 36 S.

Jiménez Rueda, C., Pedro Nuñez (Nonius). *Madrid*, Soc. matem., Revista **1**, 1911, 41—43. [44

Bigourdan, G., La découverte des lois de Kepler. [45
Revue génér. d. sc. **21**, 1910.

Riehl, A., Galileo Galilei. [46
Internationale Wochenschrift **3**, 1909, 697—716.

Favaro, A., Galileo Galilei (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1911, 6. (G. L.) [47

Favaro, A., Galileo e le edizioni delle sue opere (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1911, 47. [48

Favaro, A., Ascendenti e collaterali di Galileo Galilei. [49
Archivio storico italiano 1911. 35 S.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXV. Tommaso Segeth. [50
Venezia, Istituto Veneto, Atti **70**: 2, 1911, 618—654.

Galán, G., Pierre Fermat. [51
Madrid, Soc. matem., Revista **1**, 1911, 1—3.

Del Gaizo, M., L'opera scientifica di G. A. Borelli e la scuola di Roma nel secolo XVII. [52
Roma, Accad. d. Nuovi Lincei, Memorie **27**, 1909, 275—307.

Eneström, G., Über die Erfindung des Algorithmus der Newtonschen Fluxionsrechnung. [53
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 276. — Anfrage.

Eibe, Thyra og **Meyer, Kirstine,** Ole Römers Adversaria, med understöttelse af Carlsbergsfondet udgivne af det kgl. danske Videnskabernes Selskab. København 1910. [54
8°, 7 + 271 S. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 151—152. (Er. L.)

Paoli, A., La scuola di Galileo nella storia della filosofia. Corrispondenza del padre Grandi col Tomasso Ceva (1908) [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1911, 48. [55

Schaewen, P. von, Jacobi de Billy, Doctrinae analyticae inventum novum (1910). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **42**, 1911, 324. (K. Löschhorn.) [56

Schumacher, J., Das Colonel Titus' Problem. [57
Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 141—154.

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. IX. [58
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief **9**, 1911, 338—358.

Cajori, F., Historical note on the Newton-Raphson method of approximation. [59
The americ. mathem. monthly **18**, 1911, 29—32. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_3, 1911, 337—340. (H. Bosmans.)

Ritter, P., Drei neue Briefe von Leibniz. [60
Berlin, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 1909, 897—901.

Hayashi, T., The „Fukudai" and determinants in Japanese mathematics (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1911, 48. [61

Doublet, E., Correspondance échangée de 1720 à 1739 entre l'astronome J.-N. Delisle et M. de Navarre. [62
Bordeaux, Acad. d. sc., Actes 1910. 87 S. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 150. (Er. L.)

Leonardi Euleri Opera omnia. Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer et P. Stäckel. I: 1. Leipzig, Teubner 1911. [63
4°, XCV + 651 S. + Porträt. — [35 fr.] — Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von J. L. Lagrange. Herausgegeben von H. Weber. Mit einem Bilde von L. Euler, einem Vorwort zur Eulerausgabe und der Lobrede von N. Fuss.

Stäckel, P., Ein Brief Eulers an d'Alembert. [64
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 220—226.

Doublet, E., La vie d'un professeur de mathématiques pendant la révolution.
La revue du mois **9**, 1910, 460—466. [65

Cajori, F., Horner's method of approximation anticipated by Ruffini. [66
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 17_2, 1911, 409—414.

Alasia, C., Essai d'une bibliographie sur la théorie des groupes. [67
Rivista di fisica **19**, 1909, 315—323, 435—447, 527—539.

Klein, F., Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. IX. [68
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachr. 1911 (Geschäftl Mitteil.), 26—32. — [Wieder abgedruckt:] Mathem. Ann. **71**, 1911, 251—256.

Müller, Karl H., Traugott Müller und sein Einfluß auf die Methode des mathematischen Unterrichts in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. [69
Zeitschr. für mathem. Unterr. **42**, 1911, 265—281.

Voigt, W., Ein deutsches Gelehrtenleben (Franz Neumann). [70
Internationale Wochenschrift **3**, 1909, 371—378, 397—410.

Cantor, M., Karl Wilhelm Feuerbach. [71
Heidelberg, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 1910. 18 S. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 20_3, 1911, 340—342. (H. Bosmans.)

Schlesinger, L., Bemerkung zu dem Aufsatze: „Über Jacobis Auffassung des realen Integrals als einer mehrdeutigen Funktion." [72
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 275—276.

Hensel, K., Gedächtnisrede auf E. E. Kummer (1910). [Rezension:] Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 94. (A. Fleck.) [73

Meth, B., Zur Erinnerung an E. E. Kummer als Lehrer. [74
Mathematischer Verein der Universität Berlin 1910. — [Rezension:] Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 78—79. (E. Jahnke.)

Hensel, K., Briefe E. E. Kummers an seine Mutter und an L. Kronecker (1910). [Rezension:] Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 95. (A. Fleck.) [75

Engel, Fr., Graßmanns Leben. [76
Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke **3** : 2, Leipzig 1911. XXII + (1) + 400 S.

Müsebeck, C., Hermann Graßmann. [77
Mathem.-naturw. Blätter **6**, 1909, 33—36.

Feddersen, W., Zur Entdeckung der elektrischen Wellen. [78
Leipzig, Sächs. Ges. d. Wiss., Berichte (Math. Kl.) **61**, 1909, 153—155.

Königsberger, L., Über Helmholtz's Bruchstück eines Entwurfes betitelt: „Naturforscher-Rede" (1910). [Rezension:] Archiv der Mathem. 18_3, 1911, 192. (P. B. Fischer.) [79

Reindl, J., Siegmund Günther; zu seinem 60. Geburtstage. [80
Nürnberg, Naturf. Ges., Abhandl. 1908. 17 S. + Porträt.

Poincaré, H., The Bolyai prize. Translated by G. B. Halsted. [81
Science 33_2, 1911, 753—765, 801—808.

Lebon, E., Emile Picard (1910). [Rezension:] *Porto*, Acad. polytechn., Annaes **6**, 1911, 59. (G. T.) — Monatsh. für Mathem. **22**, 1911; Lit.-Ber. 25. [82

Schotten, H., Friedrich Pietzker. [83
Zeitschr. für mathem. Unterr. **42**, 1911, 337—342 + Porträt.

e) Nekrologe.

Wassilij **Anissimoff** (1860—1907). [84
Warszawa, [Polytechn. Institut, Nachrichten] 1909. 14 S. (D. Morduchai-Boltowskij.)

Alfredo **Capelli** (1855—1910). [85
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 16_2, 1910, 20—25. (G. Torelli.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti **69**, 1910, 59—65. (G. Ricci.) — Bollettino della „Mathesis" (Padova) **2**, 1910, 10—14. (G. Ricci.)

Karl **Domalip** (1846—1909). [86
Časopis pro pěstov. mathem. **39**, 1909/10, 387—395. (B. Kučera.)

William **Eimbeck** (1841—1909). [87
Washington, Philos. soc., Bulletin **15**, 1909, 127—131. (Edw. Smith.)

Aureliano **Faifofer** (1843—1909). [88
Bollettino della „Mathesis" (Padova) **1**, 1909, 14—15.

Williamina **Fleming** (1857—1911). [89
Science 33_2, 1911, 987—988. (Annie J. Cannon.)

Eduard **Hagenbach-Bischoff** (1833—1910). [90
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. **55**, 1910, 572 – 576. (H. Veillon.)

Arthur **Hamburger** (1881—1911). [91
Berlin, Mathem. Ges., Sitzungsber. **10**, 1911, 70—74. (E Lampe.)

Friedrich **Kohlrausch** (1840—1910). [92
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachrichten 1910 (Geschäftl. Mitteil.), Heft 1. (E. Riecke.) [Wieder abgedruckt:] *Zürich*, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. **55**, 1910, 553 – 564. — Zeitschr. für d. physikal. Unterr. **22**, 1910, 384—386. (F. Poske.)

Alexander **Korkin** (1837—1908). [93
Kharkoff, [Mathem. Ges., Mitteil.] 10_2, 1909, 217—230. (K. A. Possé.)

Junius **Massau** (1852—1909). [94
Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin (sc. mathém.) 1909, 305—308. (A. Demoulin.)

Charles **Méray** (1835—1911). [95
Madrid, Soc. matem., Revista **1**, 1911, 30—31. — L'enseignement mathém. **13**, 1911, 181—186 + Porträt. (C. A. Laisant.)

Oskar Emil **Meyer** (1834—1909). [96
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsberichte (Math. Kl.) **39**, 1909, 17. (A. Sommerfeld.)

Hermann **Minkowski** (1864—1909). [97
Mathem.-naturw. Blätter **6**, 1909, 36—37. (A. Wisk.) — Taschenbuch für Mathematiker **2**, 1911, 1—8 + Porträt. (D. Hilbert, H. Weyl.)

Giacinto **Morera** (1856—1909). [98
Giorn. di matem. **48**, 1910, 317—324. (G. A. Maggi.) — *Kharkoff*, [Mathem. Ges., Mitteil.] 11_2, 1910, 243—248. (G. A. Maggi.) — Il nuovo cimento 17_5, 1909, 191—194. (C. Somigliana.)

Georg von **Neumayer** (1826—1909). [99
Leopoldina **45**, 1909, 91—95. (S. Günther.)

Simon **Newcomb** (1835—1909). [100
London, Royal soc., Proceedings **84**, 1911 (Obituary notices), XXXII—XXXVIII. — *Washington*, Philos. soc., Bulletin **15**, 1909, 133—167 + Porträt. — Nature **81**, 1909, 103—105. (R. S. Ball.)

Karl **Pelz** (1845—1908). [101
Časopis pro pèstov. mathem. **39**, 1909/10, 433—460. (J. Sobotka.)

Julius **Petersen** (1839—1910). [102
Zeitschr. für mathem. Unterr. **42**, 1911, 398—399. (W. Lorey.)

Nikolai **Piltchikoff** (?—1909?). [103
Kharkoff, [Mathem. Ges., Mitteil.] 11_2, 1910, 235—242. (E. Rogovskij.)

Edward John **Routh** (1831—1907). [104
London, Royal soc., Proceedings **84**, 1911 (Obituary notices), XII—XVI.

Giovanni **Schiaparelli** (1835—1910). [105
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 16_3, 1910, 203—205. (E. Fergola.) — *Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti 19_2: 2, 1910, 528—555. (G. Celoria.)

Adolf **Sprung** (1848—1909). [106
Leopoldina **45**, 1909, 69.

Čeněk **Strouhal** (1850—1909?). [107
Časopis pro pèstov. mathem. **39**, 1909/10, 369—383. (V. Novak.)

Józef **Szukiewicz** (1862—1910). [108
Wiadomości matem. **15**, 1911, 141—143. (W. Gorczyński.)

Jules **Tannery** (1848—1910). [109
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus **151**, 1910, 845—846. (E. Picard.) — La revue du mois **6**, 1911. (E. Borel.)

Thorvald Nicolai **Thiele** (1838—1910). [110
Nyt Tidsskr. for Mathem. **21**, 1910, B: 73—78. (J. P. Gram.)

John Macon **Thome** (1843—1908). [111
Leipzig. Astronom. Ges., Vierteljahrsschr. **44**, 1909, 92—102. (F. W. Risтenpart.)

William **Thomson**, Lord **Kelvin** (1824—1907). [112
Lord Kelvin's early home. Being the recollections of his sister, the late Mrs. Elizabeth King; together with some family letters and a supplementary chapter by the editor Elizabeth Thomson King. London, Macmillan 1909.
8°, XII + 245 S. — [Rezension:] Nature **82**, 1910, 331—333.

Giovanni **Vailati** (1863—1909). [113
Bollettino della „Mathesis" **1**, 1909, 60—63. (V. Volterra.) — Rivista ligure di scienze (Genova) 1911, 146—150. (G. Loria.)

Julius **Weingarten** (1836—1910). [114
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 19_5: 2, 1910, 470—477. (L. Bianchi.) — Bullet. d. sc. mathém. 35_2, 1911, 142—148 (Übersetzung des Nekrologes von St. Jolles, siehe Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, S. 190).

Georgij **Woronoj** (1868—1908). [115
Kharkoff, [Mathem. Ges., Mitteil.] 11_2, 1910, 197—210. (I. Brayтzeff.)

Adolph **Wüllner** (1835—1908). [116
Leopoldina **45**, 1909, 36.

f) Aktuelle Fragen.

Perron, O., Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik. [117
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **20**, 1911, 196—211.

André, D., Des notations mathématiques (1909). [Rezension:] *Porto*, Acad. polyt., Annaes **6**, 1911, 58. (G. T.) [118

Gunnell, L. C., The second international convention of the international catalogue of scientific literature, London 1910. [119
Science 33_2, 1911, 713—718.

Eneström, G., Wie soll die Herausgabe der Valentinschen mathematischen Bibliographie gesichert werden? [120
Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, 227—232.

Miller, G. A., Courses in higher pure mathematics. [121
Science 33_2, 1911, 984—987.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. J. A. Anderson in Baltimore zum Professor der Astronomie an der „Johns Hopkins university" daselbst.

— Privatdozent G. Angenheister in Göttingen zum Professor der Geophysik an der Universität daselbst.

— Privatdozent F. Bernstein in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Harriet W. Bigelow zum Professor der Astronomie am „Smith college".

— Professor G. A. Bliss in Chicago zum Dozenten der Mathematik an der „Harvard university" in Cambridge, Mass.

— R. D. Carmichael in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität von Indiana in Bloomington.

— Privatdozent P. Debye in München zum Professor der theoretischen Physik an der Universität in Zürich.

— Privatdozent G. Du Pasquier in Zürich zum Professor der Mathematik an der Universität in Neuchatel.

— Professor L. Fejér in Klausenburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Budapest.

— Privatdozent H. von Ficker in Innsbruck zum Professor der Meteorologie an der Universität in Graz.

— Professor E. Fischer in Brünn zum Professor der Mathematik an der Universität in Erlangen.

— Privatdozent R. Fuchs in Berlin zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Caroline E. Furness zum Professor der Astronomie am „Vassar college" in Poughkeepsie.

— „Instructor" D. C. Gillespie in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university" daselbst.

— Privatdozent B. Glatzel in Berlin zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor F. L. Griffin am „Williams college" zum Professor der Mathematik am „Reed college", Portland, Ore.

— Professor J. Hartmann in Göttingen zum Direktor der Sternwarte in La Plata.

— Professor K. Hillebrand in Graz zum Professor der Astronomie an der Universität in Barcelona.

— Privatdozent R. Hugershoff in Dresden zum Professor der Geodäsie an der Forstakademie in Tharandt.

— Professor W. Láska in Lemberg zum Professor der Mathematik an der böhmischen Universität in Prag.

— Dozent S. Lattès in Besançon zum Professor der rationellen Mechanik an der Universität in Toulouse.

— „Répétiteur" E. Maillet in Paris zum Professor der Analysis und Mechanik an der „Ecole des ponts et chaussées" daselbst.

— Dozent G. Majcen in Agram zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor M Mason in Madison zum Dozenten der Mathematik an der „Harvard university" in Cambridge, Mass.

— Professor S. Oppenheim in Prag zum Professor der Astronomie an der Universität in Wien.

— Dr. A. H. Pfund in Baltimore zum Professor der Physik an der „Johns Hopkins university" daselbst.

— Privatdozent M. Plancherel in Genf zum Professor der Mathematik an der Universität in Freiburg in der Schweiz.

— F. K. Richtmyer in Ithaca zum Professor der Physik an der „Cornell university" daselbst.

— Dr. H. N. Russell in Princeton zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent E. Salkowski in Berlin zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor E. Schmidt in Erlangen zum Professor der Mathematik an der Universität in Breslau.

— Professor A. Schönflies in Königsberg zum Professor der Mathematik an der Akademie für Sozialwissenschaften in Frankfurt am Main.

— Dr. L. Simonin in Nizza zum Astronomen an der Sternwarte in Paris.

— Professor J. K. Whittemore in Cambridge, Mass., zum Professor der Mathematik an der „Western reserve university".

— Professor J. W. Young in Lawrence zum Professor der Mathematik am „Dartmouth college".

— Dr. L. Zoretti in Grenoble zum Professor der Mechanik an der Universität in Caen.

Todesfälle.

— Axel Anthon Björnbo, Bibliothekar an der kgl. Bibliothek in Kopenhagen, geboren in Kopenhagen den 20. April 1874, gestorben daselbst den 6. Oktober 1911.

— Roberto Bonola, Professor der Mathematik am Lehrerinnen-Seminarium in Rom, gestorben in Bologna den 16. Mai 1911, 36 Jahre alt.

— Emil Bose, Professor der Physik an der Universität in La Plata, geboren in Bremen den 20. Oktober 1874, gestorben den 25. Mai 1911.

— Johannes Bosscha, Sekretär der holländischen Gesellschaft der Wissenschaften in Haarlem, geboren in Breda den 18. November 1831, gestorben in Amsterdam den 18. April 1911.

— Williamina Fleming, Vorsteherin der Abteilung für astronomische Photographie an der Sternwarte in Cambridge, Mass., geboren in Dundee den 15. Mai 1857, gestorben in Cambridge, Mass., den 21. Mai 1911.

— Karl Fritsch, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Darmstadt, geboren zu Bonames bei Frankfurt a. M. den 1. August 1869, gestorben im April 1911.

— Josef Grünwald, Professor der Mathematik an der deutschen Universität in Prag, geboren in Prag den 11. April 1876, gestorben den 1. Juli 1911.

— Arthur Ray Maxson, „Instructor" für Mathematik an der „Columbia university" in New York, gestorben in New York den 13. April 1911, 30 Jahre alt.

— Wilhelm Meyer, Direktor der „Urania" in Berlin, geboren in Braunschweig den 15. Februar 1853, gestorben in Meran im Januar 1911.

— Hermann Schubert, Professor der Mathematik am Johanneum in Hamburg, geboren in Potsdam den 22. Mai 1848, gestorben in Hamburg den 20. Juli 1911.

— George Johnstone Stoney, früher Professor der Physik an der „Queen's university" in Irland, geboren den 15. Februar 1826, gestorben den 1. Juli 1911.

— François Terby, Direktor der Privatsternwarte in Löwen, geboren in Löwen den 8. August 1911, gestorben im April 1911.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität von Indiana in Bloomington hat Professor D. A. Rothrock für den Sommer 1911 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— At the „Columbia university" in New York, professor D. E. Smith will deliver during the academic year 1911—1912 a course of history of mathematics (three hours each week).

— An der „Clark university" hat Professor W. E. Story für das Wintersemester 1911 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. Amodeo für das akademische Jahr 1911—1912 eine dreistündige Vor-

lesung über Geschichte der Mathematik im Mittelalter angekündigt.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Accademia di scienze di Napoli.* Concorso dell' anno 1912. Nuovo contributo della teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.

— *Academie des sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours de l'année 1912. Elucider les notes astronomiques contenues dans les Adversaria d'Ole Römer; les rattacher à ce que l'on sait par ailleurs sur l'oeuvre scientifique de Römer et sur l'état de l'astronomie à son époque.

Vermischtes.

— In Madrid ist am Anfange des Jahres 1911 eine spanische mathematische Gesellschaft begründet worden. Die Gesellschaft hat schon begonnen eine Revista de la sociedad matemática española herauszugeben.

Namenregister.

Abel, N. H., 139, 140.
Abraham bar Chijja, 332.
Abu Abdallah Muhammed ben Ahmed el-Shanni, siehe El-Shanni.
Abu Ali el-Hasan ben el-Hosein el-Basri, siehe El-Haitam.
Abu Ali el-Hosein ben el-Harith el-Djanubi, siehe El-Djanubi.
Abu Kamil el-Misri, siehe El-Misri.
Abul Djud Muhammed ben el-Leith, siehe El-Leith.
Abul-Hasan Adarkhuda ben Ushtadh Hashbas (Hashtas), 14.
Abul Raihan Muhammed el-Biruni, siehe El-Biruni.
Abul Wefa, 77.
Abu Nasr Mansur ben Ali ben Irak, 18, 21, 27, 28, 56, 58, 60, 68, 75—78.
Abu Said Ahmed ben Muhammed ben Abdeldjalil el-Sidjzi, siehe El-Sidjzi
Abu Said Muhammed ben Ali el-Darir el-Djordjani, siehe El-Djordjani.
Adarkhora ben Yazdankhasis, 67.
Adarkhuda ben Ustad Djashnas, 20, 67.
Afdal ed-din Omar ben Allan, 117, 119.
Ahrens, W., 94, 187, 189, 190, 220, 281, 282, 284. 359, 360
Alasia, C., 359, 360, 362
Albattani, siehe El-Battani.
Albert, J., 185.
Albert von Sachsen, 338.
Alberuni, siehe El-Biruni.
d'Alembert, J., 88—90, 220—223, 321, 326, 361.
Aley, R. J., 191.
Al-Farisi, siehe El-Farisi.
Algaurizin (Alghoarizim, Alguarizm), siehe Alkhwarismi.
Al-Hadschdschadsch, 277, 281, 282, 359, 360.
Alkarkhi, siehe El-Karkhi.
Alkhwarismi, 24, 46, 50, 95, 102, 113, 125, 126, 128—130, 209—212, 214, 215, 282, 334, 360.
Al Kindi, 282.
Alkuin, 114.
Al-Mahalli, 121.
Al-Nairizi, 81, 277—279, 281, 282, 338, 359, 360.
Al-Sidjzi, siehe El-Sidjzi.
Amodeo, F., 187, 189, 287, 365
Ampère, A. M., 309.
Anaritius, siehe Al-Nairizi.
Anderson, J. A., 364.
André, D., 94, 95, 187, 190, 359, 363.
Angenheister, G., 364.
Anissimoff, W. A., 362.
Antonio (Maestro), 211, 219.
Apastamba, 282.
Apianus, P., 113, 120.
Apollonios, 7, 8, 14, 97, 187, 194—198, 201—204, 208, 237, 238, 240—243.
Appell, P., 94, 95, 284.
Archibald, R. C., 187, 189.
Archimedes, 13, 14, 37, 39, 64, 67, 69, 97, 187, 188, 197, 281, 282, 359, 360.
Archytas, 360.
Aristoteles, 90, 210, 360.
Aryabhatta, 95, 210, 289, 291—294, 360.
Atelhard von Bath, 332, 334, 360.
Aubry, A., 183.
Aubry, L., 286.
Auerbach, F., 94, 281, 359.
August, E. F., 278.
Aurel, M., 210.
Autenrieth, E., 287

Averroes, 210.
Avicenna, 290
Avogadro, A., 283.

Babczyński, T., 284.
Bacon, R., 194, 195.
Bädecker, K., 96.
Bailey, F. K, 287.
Baker, R. Ph., 96.
Ball, R. S., 359, 363.
Ball, W. W. R., 175, 270, 281, 283, 355.
Baltzer, R., 183.
Barozzi, F., 321.
Barrau, J. A., 359.
Barrow, I., 252, 268, 269, 345—347, 355.
Batelli, A., 187, 188.
Batemann, H., 191.
Bates, W. H., 191.
Bauer, G , 316.
Baur, E. M., 284.
Baeyer, O. von, 191.
Beaune, siehe Debeaune.
Beetz, W., 316.
Bellavitis, G., 309.
Benedetto da Firenze, 209.
Benedicks, C , 286.
Berberich, A., 94, 95.
Bergstrand, Ö., 286.
Bernard, J. P., 176.
Bernays, M., 316.
Bernoud, A., 188.
Bernoulli, D., 89, 283.
Bernoulli, Jak., 180, 257.
Bernoulli, Joh. I., 186, 221, 222, 256, 257, 261—264, 271—272, 307, 308.
Bernoulli, Nik. I., 222, 262, 264, 272, 273, 351, 352.
Bernstein, F., 364.
Bernward, 333.
Bertrand, J , 182.
Bessel, F. W., 192.
Besthorn, R. O., 277—279, 281, 282, 359, 360.
Bettelheim, A., 320, 329.
Bhaskara, 114, 115, 290, 293—295, 297, 298.
Biagio (Maestro), 211, 217, 219.
Biagio da Parma, 211, 217, 219.
Bianchi, L., 359, 363.
Bianchini, G., 160, 353, 354, 357, 361.
Bieberbach, L., 192.
Biedenkapp, G., 187, 189.
Bierens de Haan, D., 357.
Bigelow, Harriet 364.
Bigourdan, G., 359, 361.
Biliotti, A., 211.
Billy, J., 187, 189, 281, 283, 359, 361.
Biot, J. B., 82, 253, 256, 261.
Birkenmajer, L., 353, 359, 361.
Birkhoff, G. D., 286.
Biruni, siehe El-Biruni.
Bischoff, J. N., 316, 317.
Bjelopolskij, A. A., 187, 190, 281, 284.
Bjerknes, C. A., 140.
Björnbo, A. A., 69, 94, 95, 125, 318, 323, 365.
Bliss, G. A., 364.
Boer, F. de, 310.
Boetius, A. M. T. S., 211, 333.
Bohlmann, G., 311.
Böhm, K., 359.
Bolyai, J., 189, 284, 362.
Bolza, O., 96.
Boncompagni, B., 81, 114, 120, 125, 128, 129, 210, 335, 336.
Bonnet, O , 310.
Bonola, R., 94, 365.
Bopp, K., 360.
Borchardt, K. W., 150.
Borel, E., 286, 359, 363.
Borelli, G. A., 361.
Bortolotti, E., 281, 284.
Bose, E., 365.
Bosmans, H., 9, 126, 128, 187—190, 281—283, 359—362.
Bosscha, J., 365.
Bossut, Ch., 240.
Böttcher, J. E., 187.
Bouquet de la Grye, A., 190.
Bousquet, M. M., 225.
Boutroux, P., 187, 188, 286.
Boyer, J., 300.
Bradwardin, Th., 338.
Brahe, T., 323.
Brahmagupta, 70, 292—295, 297, 298.
Braikenridge, W., 321.
Bramer, B., 237, 238, 241.
Braunmühl, A. von, 180, 238, 301, 316—327, 330.

Braunmühl, Fanny, 319, 327.
Braytzeff, I., 187, 190, 359, 363.
Bricard, R., 94, 95.
Brill, A, 143, 177, 316, 327, 328
Brocard, H., 281, 284.
Bronson, H. L., 96.
Brunacci, V., 308.
Brünnow, 122.
Bryk, O., 94, 95.
Buchka, K. von, 94, 187, 281
Buffon, G. L. L. de, 320
Buhl, A., 281, 282, 284.
Bühler, G, 123.
Bürgi, J., 238, 323.
Burkhardt, H., 281, 283, 327.
Buteo, J., 357.

Cabreira, A., 187, 190.
Cajori, F., 94, 95, 132, 187—189, 235, 281, 283, 300, 342, 344, 359, 361.
Camerarius, J., 193, 191.
Campano, J., 81, 278.
Campbell, G, 134, 176.
Canacci, G., 210.
Canacci, R, 210.
Cannon, Annie, 359, 362.
Cantor, M., 8, 9, 40, 81—90, 94, 113, 158, 161—181, 187, 193, 211, 233—241, 243—246, 248—259, 261—273, 275, 281, 294, 300, 322, 324, 330—338, 340—347, 349, 350, 352, 359, 362.
Capelli, A., 190, 284, 362.
Cardano, G.. 162—166, 178, 182, 183, 233, 234, 341.
Cardinaal, J., 94, 281.
Carlebach, J., 281, 282.
Carmichael, R. D., 364.
Carrus, S., 96, 286.
Castellani, siehe Gratia de Castellani.
Castelnuovo, G., 187, 281.
Caswell, J., 324.
Cauchy, A. L, 139, 143—145, 147, 148, 150, 309, 310.
Cavalieri, B., 92, 189, 343.
Cayley, A., 247, 315.
Celoria, G., 359, 363.
Ceretti, U., 187, 188, 359, 360.
Cesaro, E., 284.
Ceulen, L. van, 9, 10, 283.
Ceva, T., 361
Changadeva, 290.
Chasles, M., 292.
Chatelet, A., 281, 285.
Chaturveda, 292, 297.
Chevalier, U, 211.
Christmann, J., 323.
Chrzaszczewski, S., 318.
Chuquet, N., 120.
Ciermans, J., 342.
Cipolla, M., 286.
Clairaut, A. C., 86, 180.
Claeys, A., 286.
Clemens III (Pabst), 194.
Clements, G. R., 96.
Coi, G. da, 163, 182, 183.
Colebrooke, H. T., 114, 292, 293, 296.
Colla, siehe Coi.
Collins, J., 82, 83, 252, 253, 255, 256, 259, 261, 266, 268, 269, 345—347, 354, 355.
Colson, J., 172.
Commandino, F., 240, 241.
Conti, A. S., 266, 268, 271, 272.
Converse, H. A, 191.
Copernicus, siehe Koppernikus.
Cossali, P., 165, 166, 210.
Cotes, R., 263, 266, 270, 271, 276, 325, 326, 329.
Couturat, L, 281, 285
Cramer, G., 177
Crelle, A. L., 138, 140, 142, 145, 220.
Curtze, M., 81, 90, 126, 277, 279, 338.

Dagomari, P, 211, 217, 219.
Dannemann, F., 187, 188, 281, 282, 359, 360.
Darboux, G., 136, 190, 281, 284, 285
Darmstädter, L., 221.
Darwin, G. H., 320.
Davenant, 253.
Debeaune, F., 93, 245.
Debye, P, 364.
Decker, F. F, 286.
Decourdemarche, J. A., 94, 187, 188, 281, 282.
Dedekind, R, 315
Dee, J., 95.
Dehn, M., 286.
Delambre, J. B. J., 322.

Del Ferro, Sc., 81, 165, 183.
Del Gaizo, M., 359, 361.
Delisle, J. N., 359, 361.
Della Nave, A., 81.
Del Lungo, I., 281, 283.
Delsaulx, 193
Demoulin, A., 286, 359, 362.
Desargues, G., 318.
Descartes, R., 7, 88, 175, 189, 240—246, 283, 310, 321, 327, 330.
Dickson, L. E., 284.
Dickstein, S., 282.
Dingeldey, H., 94, 95.
Dintzl, E., 128.
Diofantos, 188, 282, 293, 300, 311, 312, 336, 337, 356—358, 360.
Dirichlet, P. G. L., 182.
Dirksen, E. H., 308.
Djamschid, 124.
Domalip, K., 362.
Doublet, E., 359, 361.
Drobisch, M. W., 309.
Du Bois Reymond, P., 311.
Dufour, H., 190.
Duhem, P., 187, 188, 283, 359, 361.
Düker, H., 333.
Dulac, H., 286.
Du Pasquier, G., 364.
Dyck, W. von, 281, 283, 317, 328.
Dyson, F. W., 96.

Edleston, J., 261, 263, 264, 266, 270, 271, 276.
Egmont, siehe Maximilian von Egmont.
Eibe, Thyra, 359, 361.
Eimbeck, W., 362.
Einstein, A., 191.
Ekman, V. W., 96.
Ekstrand, V., 359, 360.
El-Bagdadi, 277.
El-Basri, siehe El-Haitam.
El-Battani, 71, 280, 322.
El-Biruni, 11, 17, 23—25, 29—32, 34, 35, 37, 38, 40, 42, 44—46, 49—57, 60, 61, 64—75, 77, 78, 121, 187, 188, 289, 298, 299.
El-Darir, siehe El-Djordjani.
El-Djanubi, 17.
El-Djordjani, 13, 15.
El-Djulfari, 112, 113.
El-Farisi, 282, 360.
El-Habani, 17.
El-Haitam, 22, 26, 27, 72, 94, 95, 188.
El-Harith, siehe El-Djanubi.
El-Karkhi, 71, 114.
El-Kashi, 65.
El-Khwarizmi, siehe Alkhwarismi.
El-Leith, 32.
Ellingwood, A. R., 300.
El-Masihi, 66.
El-Misri, 100, 104, 111, 113—116, 118, 119, 281, 282.
El-Sabbah, 48.
El-Schirasi, 282.
El-Shanni, 18—21, 29, 35, 39—41, 67, 70.
El-Sidjzi, 16, 17, 26—28, 32, 67, 122.
El-Tusi, 278, 322, 329.
Emch, A., 96.
End, W., 318.
Eneström, G., 1—3, 5, 6, 9, 81—84, 87—90, 93—95, 120, 125. 129, 160, 162—166, 168, 170—181, 183, 186—189, 210, 220—222, 227, 234, 235, 237—241, 243—259, 261, 262, 265, 267—276, 281, 283, 284, 300—302, 308, 324, 325, 331—334, 336—338, 340, 342, 343, 345, 347—352, 354, 355, 358, 359, 361, 363.
Engel, F., 187, 192, 283, 359, 362.
Eratosthenes, 360.
Eukleides, 3, 9, 15, 19, 27, 29, 40, 55, 68, 69, 71, 72, 81, 84, 90, 94, 126, 188, 196, 203, 206, 207, 277—282, 294, 358—360.
Euler, J. A., 189, 221.
Euler, L., 3, 4, 86, 87, 89, 90, 95, 177—180, 188—190, 220—223, 226, 272—274, 283, 284, 308, 312, 313, 321, 323, 326, 330, 351, 352, 356, 358, 359, 361.
Eutokios, 97.
Eversheim, P., 191.
Ewald, P., 122.

Fabbroni, A., 247.
Fabre, A., 133.
Fabricius, Johann, 320.
Fabricius, J. A., 211.
Faifofer, A., 362.
Faraut, F. G., 281, 282, 359, 360.
Fatio de Duillier, N., 258.
Faught, J. B., 191.

Favaro, A., 91—95, 187, 189, 247, 281, 283, 287, 357, 359, 361.
Feddersen, W., 359, 362.
Fejér, L., 364
Fergola, E., 359, 363.
Fermat, P. de, 7, 94, 95, 188, 189, 239, 240, 245, 246, 271, 284, 312, 313, 356, 358, 359, 361.
Ferrari, L., 182, 183.
Feuerbach, K. W., 362.
Ficker, H. von, 364.
Finsterwalder, S., 317, 327.
Fischer, E., 364.
Fischer, P. B., 188, 362.
Fleck, A., 362.
Fleet, J. F., 359, 360.
Fleming, Williamina, 362, 365.
Flügel, G., 122, 123.
Forster, W., 342.
Förster, W., 287.
Fouret, G., 132.
Fourier, J. B., 132, 133, 136, 137, 283.
Frankland, W. B., 187, 281, 282.
Frati, L., 81.
Fréchet, M., 286.
Freytag, G., 184.
Friedländer, G., 220.
Friedlein, G., 69.
Fries, J. F., 283.
Frisch, Ch., 93.
Fritsch, K., 365.
Frobenius (Abt), 114.
Fuchs, R., 364.
Fueter, R., 192, 281, 284.
Furness, Caroline, 364.
Furst, J., 184.
Fuss, N., 87, 361.
Fuss, P. H., 89, 179, 220, 223, 274, 281, 284, 359.

Galán, G., 359, 361.
Galilei, G., 91—95, 168, 187, 189, 281, 283, 320, 328, 361.
Galitzin, R., 187, 190.
Galle, J. G., 95.
Galois, E., 182, 189, 284.
Gambioli, D., 187, 188.
Ganeśa, 293, 296, 297.
Gangadhara, 294.
Gärtner, F. von, 316.
Gast, P., 286.
Gauss, K. F., 3, 94, 95, 139, 149, 189, 310, 318, 352, 362.
Geber, 209.
Geer, P. van, 187, 189, 359, 361.
Geigel, R., 192.
Gemma-Frisius, R., 193, 194.
Gerbert, 187, 188.
Gerhardt, C. I., 82, 85, 171, 186, 250, 252, 259, 260, 262, 263, 265, 268, 272, 348.
Germain, Sophie, 189.
Gernez, D. J. B., 192.
Ghaligai, F., 209, 210, 354.
Gherardo Cremonese, 81, 125, 240, 277, 279, 338.
Gherli, O., 308.
Ghigath ed-din el-Kashi, siehe El-Kashi.
Giacomelli, R., 281, 283.
Gibson, G. A., 266
Giesel, F., 354.
Gillespie, D. C., 364.
Giovanni (Maestro), 211, 219.
Glatzel, Br., 364.
Glimstedt, P., 358.
Gloriosi, G. C., 92.
Gogava, A., 193—195, 197, 201, 208.
Goldbach, Chr., 179, 274.
Goldbeck, E., 359, 360.
Gonnessiat, F., 286.
Göpel, A., 328.
Gorczynski, W., 359, 363.
Gosiewski, W., 281, 284.
Gram, J., P., 94, 95, 359, 363.
Grammateus, H., 113.
Grandi, G., 183, 361.
Grassmann, H., 362.
Gratia de Castellani, 211, 217, 219.
Gravelaar, N. L. W. A., 187, 189.
Gravesande, W. J., 174.
Gray, G. J., 94, 95, 172.
Gray, 123.
Gregory, D., 82.
Gregory, J., 82, 183, 239, 252, 253, 259, 261, 269.
Griffin, F. L., 364.
Grunert, J. A., 308.
Grünwald, J., 365.
Guareschi, I., 281, 283.

Guglielmo de Lunis 209, 210, 212.
Guimarães, R., 187, 188, 281, 282, 359, 360.
Guisnée, 351.
Gülfferich, H, 185.
Gundelfinger, S, 138, 142, 144, 145, 147, 148, 150, 192, 275.
Gundelfinger (Frau), 150.
Gunnell, L. C., 359, 363.
Günther, L, 189.
Günther, S., 6, 7, 86, 187, 281, 282, 326, 327, 359, 362.
Guthrie, D. V., 191.

Haar, A., 192
Habash, 25, 61.
Hagenbach-Bischoff, E, 287, 362.
Hagi Khalfa, 17, 104.
Hahn, H., 94, 281, 283, 284.
Haller, S., 318.
Halley, E., 95, 174.
Halsted, B, 359, 362.
Hamburger, A., 362.
Hamilton, W. R., 314, 315.
Hammer, E., 187, 188.
Hankel, H., 162, 164, 237, 322.
Harnack, A, 310.
Harriot, Th, 177.
Hartmann, J., 364.
Hartmann, N, 94.
Hartogs, F, 286.
Haskins, Ch. H, 332—334, 359, 360.
Hasselberg, B., 94, 95.
Hausherr, J, 66.
Hayashi, T., 283, 359, 361.
H'Doubler, F. T., 191.
Headwood, P. J., 286
Heath, T. L, 187, 188, 281, 282, 356—360.
Heegaard, P., 281, 284.
Heffter, L., 191.
Hegius, A, 194.
Heiberg, J. L., 64, 68, 69, 72, 84, 90, 94, 97, 187, 188, 193—195, 197, 277—279, 281, 282, 331, 358—361.
Heilbronner, J. C., 350.
Heinrich, G., 318.
Helmholtz, H. von, 362.
Henning, N, 185.
Henry, Ch., 220, 271.
Hensel, K., 187, 189, 190, 281, 284, 359, 362.
Herakleitos, 187.
Heriger von Lobbes, 187, 188.
Hermann, J., 180, 181, 274, 351.
Hermite, Ch., 182, 310.
Heron, 3, 5, 69, 81, 97, 187, 277—280, 360.
Heymann, W., 287.
Hilbert, D., 192, 284, 359, 362.
Hill, Ch. B, 96.
Hillebrand, K., 364.
Hochheim, A, 71, 114
Hodge, F. H., 191.
Hoff, M., 185.
Hohenemser, P., 184.
Homersham-Cox, 310.
Hoppe, E., 94, 188, 189, 282
Horner, W. G., 361.
Hosein ibn Muhammed al Mahalli, siehe Al-Mahalli.
Houzeau, J. C., 232.
Hudde, J., 251.
Hugershoff, R., 364.
Huggins, W., 284.
Hugo Sanctelliensis, 333.
Huips, Fr. van, 358.
Husson, E., 286.
Huygens, Chr., 92, 189, 240, 246, 247, 249, 251, 259, 261, 281, 283, 361.

Ibn al-Haitam, siehe El-Haitam.
Ibn Junis, 322.
Initius Algebras, 120.
Isa ben Yahya el-Masihi, siehe El-Masihi.
Isely, L., 187, 189.
Isidorus von Sevilla, 122.

Jacobi, C. G. J., 138—150, 177, 220, 221, 223, 275, 276, 281, 282, 284, 352, 362.
Jahnke, E., 187, 189, 190, 284, 362.
Jeremias, A, 281, 282.
Jiménez Rueda, C., 359, 361.
Johannes de Muris, 85.
Jolles, St, 187, 190, 359, 363.
Jolly, Ph. von, 316.
Jordanus Nemorarius, 3, 8, 9, 81, 90, 126, 127, 211, 336, 337.
Jöstel, M., 323.
Jouguet, E, 187, 188, 191, 359, 360.
Jourdain, Ph. E. B, 281, 282.
Jullien, M., 287.

Jung, F., 286.
Juynboll, Th. W., 65.

Kaltenbrunner, J., 185
Kamal al-Din al-Farisi, siehe El-Farisi.
Kant, I., 189, 320.
Kapteyn, W., 94, 281.
Karl V., 194.
Karpinski, L. C., 94, 121, 125, 189, 192, 209, 281, 282, 334, 359—361.
Kästner, A. G., 176, 177, 238, 342
Katharina I, 87.
Kaye, G. R., 94, 95, 289, 291.
Keill, J., 262, 263, 267, 349.
Kelvin, siehe Thomson.
Kempe, A. B., 315.
Kepler, J., 93, 189, 283, 361.
Kewitsch, G., 359, 360.
Kiepert, L., 310.
King, Elizabeth, 359, 363.
Klein, F., 94, 95, 303, 316, 359, 362.
Kleinfeller, 317.
Klug, J., 187, 189.
Klügel, G. S., 308.
Kluyver, J. C., 94, 281.
Knopf, O., 95.
Knopp, K., 187.
Köbe, P., 191, 192.
Kochanski, A. A., 189.
Kohlrausch, F., 190, 362.
König, J. S., 177, 178.
Königsberger, L., 281, 283, 359, 362.
Koppe, K., 287.
Koppernikus, N., 283, 320, 329, 361.
Korda, D., 187, 189.
Korkin, A., 190, 362.
Kowalewski, G., 281, 283.
Krazer, A., 187, 189, 361.
Krienelke, K., 187, 189.
Kronecker, L., 182, 190, 284, 362.
Kučera, B., 359, 362.
Kucharzewski, F., 187, 189, 281, 283.
Kullrich, E., 190.
Kummer, E. E., 182, 187, 189, 190, 284, 359, 362.
Kutta, W. M., 96, 318.

Labatie, A. G. M., 284.
Lacour, E., 360.
Lacroix, S. F., 154.
Lagny, T. F. de, 307.
Lagrange, J. L., 88, 132, 133, 264, 308—310, 325, 361.
Laguerre, E. N., 310.
Lahire, Ph. de, 321.
Laisant, C. A., 359, 362.
Lambert, J. H., 189, 324.
Lamont, J. von, 316.
Lampa, A., 360.
Lampe, E., 187, 189, 190, 281, 285, 359, 360, 362.
Lancaster, A., 232.
Lane, E. W., 123.
Langenkamp, O., 281, 283.
Langius, C., 194.
Langren, M. F. van, 189.
Laplace, P. S. de, 320, 326.
Laska, W., 364.
Lattès, S., 364.
Laub, J. J., 286
Lautard, J. B., 133.
Lebesgue, H., 286.
Lebon, E., 94, 95, 187, 190, 281, 284, 288, 359, 362.
Lefort, F., 82, 253, 256, 261, 267.
Legebeke, G. J., 310.
Leibniz, G. W., 4, 82—85, 133, 169—172, 186, 189, 221, 222, 250—253, 256—263, 265, 266, 268, 269, 271, 272, 307, 318, 348, 350, 354, 355, 359, 361.
Le Paige, C., 251.
Lessing, G., 221.
Lessing, 221.
Leveau, G., 287.
Levi, B., 286.
Levi ben Gerson, 282.
Lévy, M., 96, 190.
Libri, G., 125, 128, 129, 211, 212, 215 289, 290, 334, 353.
Lie, S., 139, 320, 321, 329.
Liebmann, H., 94, 191, 192.
Lietzmann, W., 281, 284.
Lind, B., 94, 187, 189, 359.
Lindhagen, D. A., 95.
Lindstedt, A., 94, 95.
Locke, L. L., 128.
Lockyer, J. N., 320.
Löffler, E., 187, 188.

Lonicer, A., 185
Lorey, W., 187, 190, 281, 284, 285, 359, 363.
Loria, G., 94, 95, 97, 98, 187, 281, 282, 359, 360, 363.
Löschhorn, K., 361.
Lossius, L., 185.
Löwy, A., 132, 301.
Lucha (Maestro), 211, 219.
Ludwig I. von Bayern, 316.
Lunis, siehe Guglielmo de Lunis.
Lunn, A. C., 191.
Lüroth, J., 96, 187, 190.
Lytle, E. B., 191.

Mac Culloch, J. F., 310.
Mach, E., 187
Maclaurin, C., 88, 89, 133, 176, 275, 321.
Machmet siehe Alkhwarismi.
Maggi, G. A., 359, 362.
Magliabecchi, A., 171.
Mahavira, 114, 293, 294, 297.
Mahler, E, 282.
Mahucmet, siehe Alkhwarismi.
Maillet, E., 364.
Maire, E., 187, 189.
Majcen, G., 364.
Malézieu, N. de, 350.
Manindra Chandra Nundy, 288.
Manitius, K., 282.
Mannu 289.
Mansion, P., 187, 189, 309, 311, 324.
Manville, O., 94, 95.
Mariano (Maestro), 211, 219.
Marie, M., 247, 300, 341.
Marty, M., 4.
Mascart, J., 187, 188.
Mason, M., 364.
Massau, J., 362.
Mathias, E., 191.
Maurolico, F., 241, 323.
Maximilian von Egmont, 193, 194.
Maxson, A. R., 365.
Meitner, L., 94.
Menelaos, 31, 32, 69, 323.
Meray, Ch., 284, 287, 362.
Mercator, N., 318.
Mersenne, M., 246.
Messick, J. F., 191.
Mesud ben Muhammed ben ali el-Djulfari, siehe El-Djulfari.
Meth, B., 359, 362.
Meyer, Eug., 284.
Meyer, F., 192.
Meyer, Kirstine, 359, 361.
Meyer, O. E., 362.
Meyer, R., 303.
Meyer, St., 286.
Meyer, W., 365.
Michele (Maestro), 211, 219.
Michl, F., 281, 283.
Mikami, Y., 187, 189, 281, 283.
Milhaud, G., 281, 282, 359.
Miller, G. A., 94—96, 182, 281, 283, 284, 314, 331, 359, 363.
Millosevich, E., 187, 190.
Milone, F., 187, 190.
Minkowski, H., 362.
Mirimanoff, D., 283
Mohammed ben Musa Alkhwarismi, siehe Alkhwarismi.
Mohr, G., 260.
Moivre, A. de, 89, 323, 329.
Möller, D. M. A., 95.
Mollweide, K. B., 324, 329.
Montucla, J. E., 246, 300.
Moerbeke, siehe Wilhelm von Moerbeke.
Moore, C. L. E., 360.
Morduchai Boltovskij, D., 359, 362.
Morera, G., 362.
Moreux, Th., 281, 284.
Mourraille, J. R., 132—137, 283, 308.
Muggenthaler, L., 321, 329.
Muhammed ben Abdelbaqi, siehe El-Bagdadi.
Muhammed ben el-Sabbah, siehe El-Sabbah.
Muhammed ben Musa, siehe Alkhwarismi.
Muhammed ibn Ishak, siehe Nadim.
Müller, A., 122.
Müller, Conrad H., 2.
Müller, E., 192.
Müller, Felix, 187, 188, 275, 281, 283, 285.
Müller, J. W., 358.
Müller, Karl H., 359, 362.
Müller, Traugott, 362.
Murhard, F. W. A., 85, 133.
Muris, siehe Johannes de Muris.

Murphy, R., 308.
Müsebeck, C., 359, 362.

Näbauer, M., 96.
Naber, H. A., 281, 282.
Nadim, 123.
Nairizi, siehe Al-Nairizi.
Nallino, C. A., 71, 280.
Narr, Fr., 316.
Nasir ed-din el-Tusi, siehe El-Tusi.
Nathan, E., 326.
Navarre, M. de, 359, 361
Nemorarius, siehe Jordanus Nemorarius.
Nesselmann, G. H. F., 356.
Netto, E., 189, 284.
Neumann, F., 192, 320, 329, 362.
Neumayer, G. von, 362.
Neustetter, E., 79, 80.
Neustetter, J. Chr., 79.
Neustetter, S., 79.
Newcomb, S., 190, 284, 363.
Newton, Isaac, 82—85, 88, 95, 132—136, 169—175, 181, 192, 235, 237, 249, 250, 252—259, 261—271, 276, 281, 283, 318, 321, 324—326, 329, 345—350, 354, 355, 361.
Newton, John, 84, 85.
Nitz, K., 187, 190.
Nix, L., 81.
Nonius, siehe Nuñez.
Nöther, M., 143, 177.
Novak, V., 359, 363.
Nuñez (Nonius), P., 188, 361.

Octavio de Toledo, L., 359, 360.
Olbers, W., 94, 95.
Oldenburg, H., 82—84, 171, 250, 252, 253, 255, 256, 259—261, 266, 354.
Oliva, A., 359, 361.
Omont, H., 187, 188.
Oppel, F. W., 324.
Oppenheim, S., 364.
Oresme, N., 7, 243, 338.
Ostwald, W., 132, 138, 143, 147, 301.
Otto III, 333.
Oughtred, W., 283, 342.
Ozanam, J., 186.

Paciuolo, L., 160, 213, 353, 354, 357.
Pagel, J., 282.
Painlevé, P. 281, 285.
Paoli, A., 359, 361.
Paolo, siehe Dagomari.
Papperitz, E., 192.
Paraf, A., 284, 287.
Pascal, Bl., 86, 189, 239, 240.
Pascal, E., 92.
Pasch, M., 275, 276.
Peano, G., 311.
Pelecani, siehe Biagio da Parma.
Pell, J., 4, 261.
Pelz, K., 363.
Pemberton, W. S., 286.
Perelli, T., 183.
Perron, O., 359, 363.
Peter, B., 287.
Petersen, J., 284, 363.
Petri, N., 189.
Pfaff, J. F., 326.
Pfund, A. H., 364.
Phileno, 183.
Picard, E, 190, 281, 284, 285, 359, 362, 363.
Pierpont, J., 182.
Pietzker, F., 362.
Piltchikoff, N., 363.
Pisano, L., 4, 81, 114, 115, 120, 160, 209—212, 215, 217, 219, 335, 336, 338.
Plancherel, M., 365.
Platon, 97, 360.
Platone Tiburtino, 81, 332.
Plimpton, G. A., 29, 124, 125, 209, 211.
Plowden, E., 246.
Plowden, Maria, 246.
Poggendorff, J. C., 133, 155.
Poincaré, H., 95, 187, 190, 281, 284, 359, 362.
Porfyrios, 210.
Poske, F., 359, 362.
Possé, K. A., 187, 190, 359, 362.
Priestley, H. J., 286.
Pringsheim, A., 275, 301, 310.
Proklos, 3, 69, 94.
Ptolemaios, 50, 64, 65, 69, 71, 72, 127, 193, 194, 322, 331, 361.
Puiseux, V, 139, 148, 149.
Pythagoras, 3, 282.

Qutb al-Din el-Schirazi, siehe El-Schirazi.

Raffy, L., 95.
Ramsauer, 287.
Ranganatha, 294.
Raphson J., 132, 134—136, 235, 268, 276, 283, 344, 345, 350, 361.
Ratti, A., 187, 188
Regiomontanus, J., 160, 318, 322, 329, 357.
Reiff, R., 247, 248, 284.
Reindl, J., 359, 362.
Reinhardstöttner, K. von, 320.
Renaldini, C., 271.
Reuschle, C., 284.
Reyneau, Ch., 133, 308.
Riccardi, P., 209.
Ricci, G., 359, 362.
Richtmyer, F. K, 365.
Riecke, E., 359, 362.
Riehl, A., 359, 361.
Riehl, B, 316
Riemann, B., 139, 144—146, 148, 149.
Riese, A., 113, 155
Rigaud, S. J, 253, 270, 345, 347, 354.
Rigaud, S. P., 276.
Rindi, S., 300.
Risley, W. J, 191.
Ristenpart, F. W., 359, 363.
Ritter, P., 359, 361.
Rivaud, A., 187, 189.
Robert von Chester, 125—129, 282, 334, 360.
Robert von Ketene, 127.
Robert von Reading, 126, 127, 129.
Robertus Cestrensis (Cestiensis), 126—128.
Robertus Retinensis, 127.
Roberval, J. P. de, 168, 246.
Rocha, A., 210.
Rödiger, J., 122.
Rogowskij, E, 359, 363.
Rollandus, 125.
Rolle, M., 133, 300—313.
Römer, O., 359, 361, 366.
Roomen, A. van, 126, 128.
Rosen, Fr., 125, 128, 129.
Rosenhain, J. G., 138, 142, 147, 149.
Rosenthal, E., 191.
Rosevare, V. N., 96.
Rosselet, A., 187, 190.
Roth, E., 360.
Rothe, R, 359.
Rothrock, D. E., 365.
Rouché, E., 95, 96, 190, 284, 310.
Routh, E. J., 363.
Rozé, C., 287.
Rudio, F., 187, 190, 361.
Rudolff, Chr., 113, 340, 357.
Ruffini, P., 308, 361.
Rühlmann, M., 87.
Russell, A., 187, 189.
Russell, H. N., 365.

Saccheri, G., 283, 350, 351.
Sachau, E., 32, 49, 64, 66, 289, 299.
Sacrobosco, J. de, 211.
Sacy, S. de, 121, 122.
Saint-Vincent, Grég. de, 238, 239.
Salignac, B, 185.
Salkowski, E., 365.
Sampson, R. A., 191.
Sarasa, A. A. de, 239.
Saunderson, N., 89.
Savasorda, siehe Abraham bar Chijja.
Saverien, A, 307, 350.
Schaewen, P. van, 187, 189, 281, 283, 359, 361.
Schedel, D., 185.
Scheiner, Chr, 319—321, 328.
Schepp, A., 311.
Scheybl, J., 126, 127, 129, 130.
Schiaparelli, G. V., 71, 95, 284, 363.
Schilling, W, 94, 95.
Schlesinger, L., 138, 150, 151, 276, 281, 284, 287, 359, 362.
Schlichtung, J., 184.
Schmaus (nicht Schaum), A., 191.
Schmidt, C. D., 287.
Schmidt, E., 365.
Schmidt, Wilh., 81.
Schöner, J., 79, 80, 188.
Schönflies, A., 192, 365.
Schooten, F. van, 170, 171, 235, 240, 243—245.
Schotten, H, 359, 362.
Schottenfels, Ida, 191.
Schoute, P. H., 94, 281.
Schrutka, L., 359, 360
Schubert, H., 326, 365
Schultz, W., 187, 188.

Schumacher, J., 359, 361.
Schumann, R., 287.
Schuster, M., 284.
Schütte, F., 187, 281, 282, 360.
Schweidler, E. von, 287.
Scotus, M., 211.
Segeth, T., 361.
Segkerwitz, J., 185.
Seidel, L., 316, 320, 329.
Semmola, E., 287.
Serret, J. A., 177, 309, 310.
Shaw, J. B., 96, 285.
Sheldon, E. W., 191.
Shodja ben Aslam, siehe El-Misri.
Shumway, R. R., 287.
Siacci, F., 190.
Sierpinski, W., 287.
Sievers, 87.
Simon, M., 281—283, 287, 359—361.
Simonin, L., 365.
Simplikios, 278.
Simpson, Th., 183, 283.
Singhana, 290.
Sluse, R., 83, 246, 249, 251, 269.
Smith, D. E., 79, 94, 114, 125, 126, 184, 185, 187, 188, 209, 211, 282, 361, 365.
Smith, Edw., 359, 362.
Smith, I. W., 287.
Smith, J. B., 287.
Smith, R., 325.
Sobotka, J., 359, 363.
Sohncke, L., 320, 329.
Somigliana, C., 359, 362.
Sommer, J., 192.
Sommerfeld, A., 192, 359, 362.
Springer, P. H., 359, 360.
Sprung, A., 363.
Sridhara, 293, 294, 297.
Stäckel, P., 143, 187, 189, 220, 243, 281, 284, 285, 359, 361.
Stadler, H., 94, 187, 281.
Staigmüller, H., 126, 284.
Stamm, E., 281, 285.
Stamper, A., 187.
Steinschneider, M., 126, 128, 210, 333.
Stern, S., 281, 284.
Stevenson, R., 308.
Stichel, G., 185.
Stifel, M., 163, 357.
Stiltz, Ch., 185.
Stirling, J., 325.
Stockhausen, J. F., 84—86.
Stölzl, Fanny, 319.
Stoney, G. J., 365.
Story, W. E., 365.
Stötter, M., 185.
Stringham, W. I., 190.
Strouhal, C., 363.
Strunz, F., 94, 187, 188, 281, 282.
Sturm, A., 94.
Sturm, Ch., 310.
Sturm, R., 359, 361.
Sudhoff, K., 94, 187, 281.
Suryadasa, 295, 296.
Suter, H., 11, 13, 14, 16—18, 22, 24, 25, 32, 48, 66, 67, 69, 70, 100, 122, 129, 187, 188, 280—282, 360.
Sylow, L., 139.
Szabó, P., 187, 189.
Szarvassi, A., 96.
Szukiewicz, J., 363.

Tannery, J., 192, 281, 284, 285, 363.
Tannery, P., 2, 246, 252, 271, 356.
Tartaglia, N., 81, 161—164, 183, 361.
Taylor, Br., 155, 309, 310.
Terby, F., 365.
Tessari, D., 192.
Thabit ben Kurra, 32, 69.
Thaer, C., 359, 360.
Thiele, T. N., 96, 190, 363.
Thomas, Ch. X., 155.
Thome, J. M., 363.
Thomé, L. W., 96.
Thomson, William (Kelvin), 363.
Tietze, H., 191.
Tischer, E., 172, 253.
Titus, S., 361.
Töplitz, O., 192.
Torelli, G., 187, 190, 281, 284, 359, 362.
Torricelli, E., 167, 168, 183, 283.
Trautmann, K., 320, 328.
Treutlein, P., 120, 127.
Tropfke, J., 162, 166, 240, 241, 336, 340.
Trueblood, Mary, 94, 95.
Tschirnhaus, E. W. von, 252, 253, 256, 321, 354, 355.
Turrière, E., 281, 284.

Vacca, G., 94.
Vailati, G., 188, 363.
Valentin, G., 153, 227—232, 281, 285, 363.
Van den Berg, F. J., 310.
Van der Vries, J. N., 192.
Vaux, C. de, 77, 97.
Veillon, H., 359, 362.
Viète, F., 9, 166, 234—236, 271, 283, 323, 340, 341, 357.
Villat, H., 287.
Vinci, L. da, 188, 361.
Vitellio, 194—196, 202.
Viterbi, A., 287.
Vogt, H., 359, 360.
Voigt, W., 359, 362.
Volterra, V., 359, 363.
Voß, A., 94.
Vrána, Fr., 359, 360.
Vries, H. de, 94, 281.

Wallenberg, G., 192.
Wallace, W., 189.
Wallis, J., 83, 165, 171, 247—250, 258, 270, 274, 344.
Wallner, C. R., 246, 318.
Walmesley, Ch., 325.
Walz, Th., 325.
Wangerin, A., 192.
Wappler, E., 126, 129.
Waring, E., 325.
Waessenaer, J. van, 88.
Weber, H., 182, 361.
Weber, W., 187.
Weierstraß, K., 310, 320, 321, 329.
Weingarten, J., 190, 363.
Weinmeister, Paul, 187, 190.
Weinmeister, Ph., 96, 190.
Weiß, F., 189.
Weißenborn, H., 172.
Werner, J., 323.
Werner, N., 185.
Wertheim, G., 5, 6, 309.
Weyl, H., 192, 359, 362.
Whiston, W., 174, 175, 270.
White, R., 93, 246, 247.
White, T., 246, 247.
Whittaker, E. T., 187, 189.
Whittemore, J. K., 365.
Widman, J., 186.
Wiedemann, E., 65, 94, 95, 113, 187, 188, 193—195, 281, 282, 359, 360.
Wieleitner, H., 94, 95, 187, 281, 282, 316, 330, 360.
Wiener, Chr., 320, 329.
Winkelmann, M., 287.
Wilhelm von Moerbeke, 81.
Winsheim, C. N., 86.
Wisk, A., 359, 362.
Wittich, P., 323.
Witting, A., 192.
Wohlwill, E., 281, 283.
Wolf, R., 87.
Wolff, Chr., 241, 262, 350.
Wölffing, E., 156, 229, 281, 282, 284.
Wöpcke, F., 121—124, 129.
Woronoj, G., 190, 363.
Wüllner, A., 363.
Würschmidt, J., 359, 360.

Xavier, A., 132.
Xylander, W., 356.

Yohannan, A., 122.
Young, J. R., 308.
Young, J. W., 95, 284, 365.
Yrinus (= Heron), 279.
Yuhanna ben Yusuf, 14, 26, 67.

Zach, F. X. de, 247.
Zeuthen, H. G., 7, 8, 172, 187, 188, 244, 245, 252—255, 257, 303, 347, 348, 358—360.
Zona, T., 96.
Zoretti, L., 365.
Zugmesser, J. E., 93.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 018099470